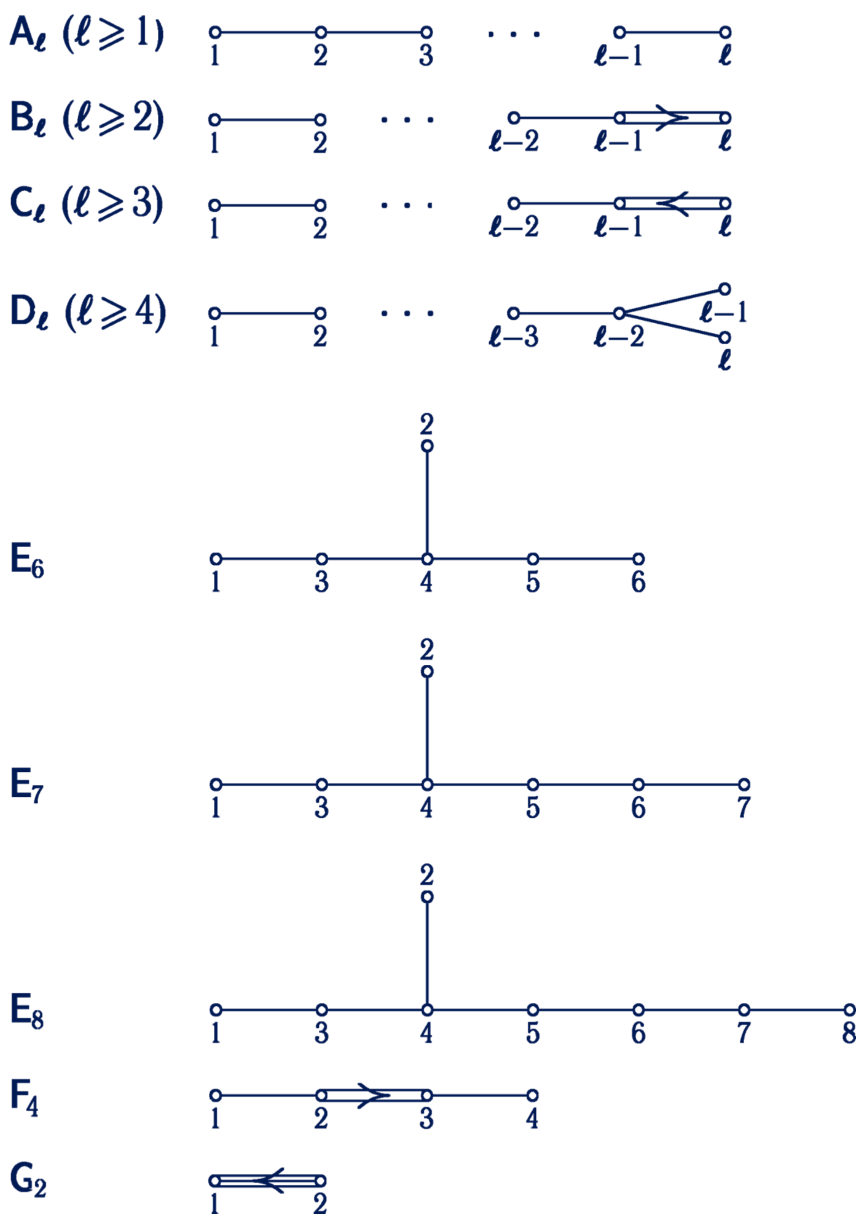
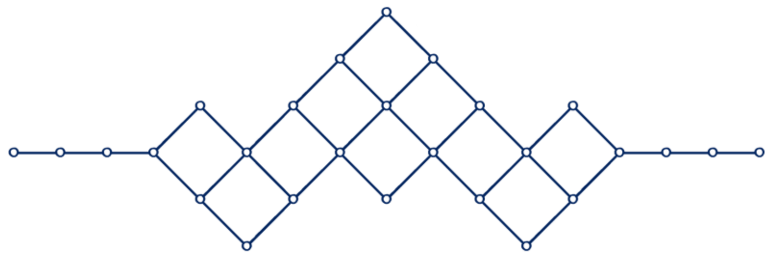


Двенадцатая школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов

Москва
26–31 января 2026

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ



МИАН

NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
LABORATORY ON ALGEBRAIC TRANSFORMATION GROUPS

SIMC
Steklov International Mathematical Center

Москва
2026

ЛАБОРАТОРИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ
ФКН НИУ ВШЭ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ В.А. СТЕКЛОВА РАН
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР МИРОВОГО УРОВНЯ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.А. СТЕКЛОВА РАН» (МЦМУ МИАН)
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА

Двенадцатая школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов

Москва, Россия
26–31 января 2026 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

The Twelfth School-Conference on

Lie Algebras, Algebraic Groups and Invariant Theory

Moscow, Russia
January 26–31, 2026

ABSTRACTS

Москва 2026

Предисловие

Двенадцатая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» проходила в Москве с 26 по 31 января 2026 года. Её организаторами были Лаборатория алгебраических групп преобразований ФКН НИУ ВШЭ, Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова и Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва (информацию о предыдущих школах см. на сайте `https://lie-school.ru`).

Программный комитет школы-конференции: И.В. Аржанцев (НИУ ВШЭ), М.Х. Гизатуллин (Самара), С.О. Горчинский (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН), М.В. Игнатьев (НИУ ВШЭ), А.Н. Панов (Самарский университет), В.А. Петров (СПбГУ), Д.А. Тимашёв (МГУ им. М.В. Ломоносова), О.К. Шейнман (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН), К.А. Шрамов (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН).

Организационный комитет школы-конференции: И.В. Аржанцев (НИУ ВШЭ), Т.В. Вилкин (НИУ ВШЭ), С.А. Гайфуллин (НИУ ВШЭ), С.О. Горчинский (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН), П.И. Евдокимова (НИУ ВШЭ), Ю.И. Зайцева (НИУ ВШЭ), М.В. Игнатьев (НИУ ВШЭ), А.Н. Панов (Самарский университет), Д.А. Тимашёв (МГУ им. М.В. Ломоносова).

Участниками школы были студенты, аспиранты и молодые учёные. Им были прочитаны следующие лекционные курсы:

- *Мономиальные базисы неприводимых представлений полупростых алгебр Ли*
  (Андрей Александрович Горницкий, МГУ им. М.В. Ломоносова).

  Пусть G — односвязная связная простая комплексная группа Ли. В курсе речь пойдет о способе построения некоторых базисов в каждом конечномерном комплексном линейном представлении G, предложенном в работе Фанга, Фурье и Литтельмана (essential bases and toric degenerations arising from birational sequences). Этот способ обобщает многие предложенные ранее способы, например, так получаются струнные базисы Литтельмана, базисы Люстига, базисы FFLV-типа (Feigin–Fourier–Littelmann–Vinberg) и др. Как правило, такие базисы вводились для построения плоских торических вырождений сферических многообразий, однако этим пределы их использования не ограничиваются. Мы обсудим, как они находят применение при решении задачи о тензорном разложении неприводимых представлений, а также более общей задачи ветвления представлений. Предполагается, что слушатели знакомы со структурной теорией полупростых групп и алгебр Ли, желательно знакомство с теорией старшего веса.

- *Введение в дифференциальную теорию Галуа*
  (Сергей Олегович Горчинский, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН).

  Теория Галуа исследует симметрии у решений уравнений и позволяет применять методы теории групп для описания различных свойств решений. Мы рассмотрим дифференциальную теорию Галуа, относящуюся к решениям систем линейных дифференциальных уравнений. В этом случае симметрии образуют алгебраические группы, а решения образуют векторные пространства, являющиеся представлениями групп симметрий.

  Будет дано общее введение в дифференциальную теорию Галуа. В качестве одного из приложений будет рассказано, почему гауссов интеграл не берется в элементарных функциях.

- *Аксиальные алгебры*
  (Илья Борисович Горшков, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН).

  Аксиальные алгебры — это недавно разработанный класс неассоциативных алгебр, неразрывно связанных с группами. В качестве мотивирующих примеров можно привести йордановы алгебры, связанные с классическими и некоторыми исключительными алгебраическими группами, алгебры Мацуо, связанные с группами с 3-транспозициями, и алгебру Грисса, использованную для реализации спорадической простой группы Монстр. В рамках данного мини-курса будет представлена общая теория аксиальных алгебр. Слушатели познакомятся с ключевыми определениями и конструкциями, увидят ряд важных примеров и проследят их связи с другими разделами алгебры.

- *Алгебраические моноиды*
  (Юлия Ивановна Зайцева, НИУ ВШЭ).

  Алгебраической полугруппой называется алгебраическое многообразие X с ассоциативным умножением $X \times X \to X$, являющимся морфизмом алгебраических многообразий. Алгебраическая полугруппа называется алгебраическим моноидом, если в ней есть нейтральный элемент. Про алгебраические полугруппы и моноиды известно довольно много. Например, можно доказать, что в любой алгебраической полугруппе есть идемпотент, а в любой коммутативной алгебраической полугруппе число идемпотентов конечно. При помощи идемпотентов можно изучать структурную теорию полугрупп, например, описать максимальные подмоноиды и подгруппы в X.

Группа G обратимых элементов алгебраического моноида X является алгебраической группой, открытой по Зарисскому в X. При этом G аффинная тогда и только тогда, когда многообразие X аффинное. В этом случае структуры моноида с группой обратимых элементов G находятся во взаимно-однозначном соответствии с групповыми вложениями G в X. Это помогает классифицировать алгебраические моноиды в случае некоторых типов групп. Так, для редуктивных групп можно использовать теорию представлений со старшим весом, а для унипотентных групп изучать действия аддитивной группы поля с помощью локально нильпотентных дифференцирований алгебры регулярных функций на X.

В курсе лекций мы докажем различные свойства произвольных алгебраических полугрупп и моноидов, обсудим классификацию редуктивных моноидов и некоторые результаты в разрешимых случаях.

- *Проблема Серра о проективных модулях и гипотеза Басса–Квиллена* (Анастасия Константиновна Ставрова, ПОМИ РАН).

  В 1976 году Дэниел Квиллен и Андрей Суслин независимо доказали, что любой конечно-порожденный проективный модуль над кольцом многочленов $k[x_1, \ldots, x_n]$ над полем k свободен. Этот замечательный результат явился решением так называемой проблемы Серра, возникшей в его статье 1955 года «Faisceaux algébriques cohérents». С геометрической точки зрения теорема Квиллена–Суслина выглядит совершенно естественной — она утверждает, что любое алгебраическое векторное расслоение на аффинном пространстве $\mathbb{A}_n^k$ является тривиальным. Аналогичное утверждение для обычных, топологических, векторных расслоений верно даже для произвольного стягиваемого пространства. Тем не менее, имеющиеся доказательства проблемы Серра — скорее алгебраические, чем геометрические, а их самая геометричная часть, неожиданно, связана с описанием расслоений на проективной прямой $\mathbb{P}^1$. В ходе лекций мы обсудим наиболее известное доказательство Квиллена, а также более «элементарное» доказательство Васерштейна.

Уже в момент решения проблемы Серра Квилленом и Суслиным специалистам было известно, что эта красивая задача является только частью гораздо более общего утверждения, называемого в настоящее время гипотезой Басса–Квиллена: если R — произвольное регулярное коммутативное кольцо, то любой конечно-порожденный проективный модуль над $R[x]$ «постоянен» в том смысле, что он получается из некоторого модуля над R расширением скаляров до $R[x]$. Регулярные кольца являются довольно прямолинейным обобщением координатных колец гладких алгебраических многообразий — одно из стандартных определений регулярности по сути и говорит, что размерность кольца в окрестности любой точки его спектра равна размерности касательного пространства в этой точке. В частности, регулярным является кольцо многочленов $k[x_1, \ldots, x_n]$, поэтому, учитывая, что модули над полем свободны, проблема Серра легко следует из гипотезы Басса–Квиллена индукцией по n. Обратно, как было показано Линделом (1981) и Попеску (1989), решение проблемы Серра влечет гипотезу Басса–Квиллена для всех регулярных колец, содержащих поле.

Другой важный класс регулярных колец — дедекиндовы кольца, включающие в себя, в частности, кольцо $\mathbb{Z}$ и другие кольца целых алгебраических чисел. Эти кольца — в точности регулярные кольца размерности 1, то есть их можно рассматривать как обобщенные гладкие кривые. Об этом часто забывают, но, на самом деле, и Квиллен, и Суслин в своих статьях 1976 года доказали гипотезу Басса–Квиллена для колец многочленов не только над полями, но и над дедекиндовыми кольцами. Более того, еще в 1965 году Паваман Мурти доказал гипотезу Басса–Квиллена для локальных регулярных колец размерности 2. К сожалению, их рассуждения пока не удается обобщить на более высокие размерности, и гипотеза Басса–Квиллена в общем случае остается широко открытой.

В 2017 году Аравинд Асок, Марк Оуа и Маттиас Вендт заметили, что некоторые результаты по гипотезе Басса–Квиллена могут быть обобщены с векторных расслоений на главные G-расслоения, где G — редуктивная алгебраическая группа над полем k. А именно, оказалось, что для любой изотропной редуктивной группы G над полем k и любого регулярного кольца R, содержащего k, любое главное G-расслоение на $R[x]$, являющееся локально тривиальным в топологии Зариского, расширено с R. Таким образом, перед нами встал уже обобщенный вариант гипотезы Басса–Квиллена, который утверждает, что аналогичный результат должен иметь место для всех регулярных колец R и изотропных редуктивных групп (вернее, групповых схем), определенных над R. Как часто бывает в математике, это позволило взглянуть на проблему свежим взглядом и получить первое за много лет продвижение и в оригинальной гипотезе — Нинг Гуо и Фей Лью (2025) обобщили теорему Линдела–Попеску на регулярные кольца, гладкие над дедекиндовыми кольцами. В заключительной части нашего курса мы обсудим некоторые новые случаи обобщенной гипотезы Басса–Квиллена, в том числе, полученные автором.

Сборник содержит тезисы докладов участников школы-конференции.

Мероприятие проводится в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2026 году и при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2025-303).

Оргкомитет

Группы автоморфизмов полных тороидальных орисферических многообразий

Р.С. Авдеев
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
suselr@yandex.ru

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики и $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$ — аддитивная группа поля $\mathbb{K}$. Если группа $\mathbb{G}_a$ нетривиально действует на неприводимом алгебраическом многообразии X, то её образ H в группе автоморфизмов многообразия X называется *$\mathbb{G}_a$-подгруппой* на X. Пусть теперь на X регулярно действует алгебраическая группа F. Если F нормализует группу H, то H называется *F-корневой подгруппой* на X. В этом случае F действует на одномерной алгебре Ли $\operatorname{Lie} H$ умножением на характер χ, называемый *весом* F-корневой подгруппы H.

Пусть T — алгебраический тор. Нормальное неприводимое T-многообразие X называется *торическим*, если оно обладает открытой T-орбитой. Важную роль при изучении групп автоморфизмов торических T-многообразий играют T-корневые подгруппы. Полное описание всех T-корневых подгрупп на произвольном торическом многообразии X хорошо известно и восходит к знаменитой работе Демазюра [3]. Оказывается, что всякая T-корневая подгруппа на X однозначно определяется своим весом, а множество весов всех T-корневых подгрупп на X (эти веса называются *корнями Демазюра*) допускает комбинаторное описание в терминах веера, задающего многообразие X. Если вдобавок X является полным, то тогда тор T и все T-корневые подгруппы (их конечное число в этом случае) порождают связную компоненту единицы группы автоморфизмов многообразия X.

Пусть теперь G — произвольная связная редуктивная группа. Естественным обобщением понятия торического многообразия для G-многообразий служит понятие сферического многообразия. А именно, нормальное неприводимое G-многообразие X называется *сферическим*, если оно обладает открытой орбитой для индуцированного действия борелевской подгруппы $B \subset G$. В работе [1] в качестве обобщения T-корневых подгрупп на торических T-многообразиях было предложено изучать B-корневые подгруппы на сферических G-многообразиях.

Дополнительная мотивация для изучения B-корневых подгрупп возникает при описании групп автоморфизмов полных сферических многообразий. Известно, что для полного сферического многообразия X связная компонента единицы A его группы автоморфизмов является линейной алгебраической группой. Если считать действие группы G на X эффективным, то можно отождествить G с подгруппой в A, и тогда алгебра Ли $\operatorname{Lie} A$ допускает разложение

$$\operatorname{Lie} A = \operatorname{Lie} G \oplus \operatorname{Lie} S \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} \mathfrak{a}_i, \qquad (1)$$

где S — некоторый подтор в A, централизующий группу G, а каждое слагаемое $\mathfrak{a}_i$ — это простой G-модуль, старший вектор которого порождает алгебру Ли некоторой B-корневой подгруппы в A. Заменяя G на GS, можно считать $\operatorname{Lie} S = \{0\}$, и тогда полное описание всех B-корневых подгрупп на X позволяет вычислить $\operatorname{Lie} A$ как G-модуль, а последующее нахождение всех коммутационных соотношений между слагаемыми в (1) позволяет восстановить структуру алгебры Ли на $\operatorname{Lie} A$. Отметим, что в торическом случае (когда $G = B = T$ — тор) все слагаемые $\mathfrak{a}_i$ в (1) автоматически одномерны и находятся в естественной биекции с корнями Демазюра, причём коммутационные соотношения между ними также хорошо известны.

Сферическое G-многообразие X называется *орисферическим*, если стабилизатор точки общего положения в X содержит максимальную унипотентную подгруппу группы G, и *тороидальным*, если никакая G-орбита в X не содержится в B-инвариантном простом дивизоре, не являющемся G-инвариантным. Орисферические многообразия по некоторым свойствам напоминают торические многообразия и потому представляют собой наиболее доступный для изучения класс сферических многообразий. Ещё более близкими к торическим являются тороидальные орисферические многообразия.

В работе [2] получено частичное описание B-корневых подгрупп на орисферических многообразиях. В случае полных тороидальных орисферических многообразий это описание оказывается исчерпывающим и позволяет полностью описать связную компоненту единицы группы автоморфизмов соответствующего многообразия, о чём и планируется рассказать в докладе. Исследования поддержаны грантом РНФ 25-11-00302.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, R. Avdeev. Root subgroups on affine spherical varieties. Selecta Math. (N. S.) **28** (2022), no. 3, article 60, see also arXiv: `math.AG/2012.02088`.

[2] R. Avdeev, V. Zhgoon. Root subgroups on horospherical varieties, arXiv: `math.AG/2312.03377` (2023).

[3] M. Demazure. Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **3** (1970), no. 4, 507–588.

Подалгебры Бореля в алгебрах Ли векторных полей

И.В. Аржанцев
ФКН НИУ ВШЭ, Москва, Россия
arjantsev@hse.ru

Доклад основан на совместной работе с М.Г. Зайденбергом [1]. Мы рассматриваем разрешимые подалгебры в алгебрах Ли дифференцирований аффинных алгебр и в касательных алгебрах групп автоморфизмов аффинных алгебраических многообразий над алгебраически замкнутыми полями нулевой характеристики. Определяем интегрируемые подалгебры Бореля и доказываем, что это в точности касательные алгебры подгрупп Бореля группы автоморфизмов. Приводятся примеры, когда интегрируемая подалгебра Бореля не является подалгеброй Бореля, то есть максимальной разрешимой подалгеброй. Детально изучается случай алгебры Ли дифференцирований кольца многочленов от небольшого числа переменных и касательной алгебры группы автоморфизмов аффинного пространства размерности не выше 3.

Исследования поддержаны грантом РНФ 25–11–00302.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, M. Zaidenberg. Borel subalgebras of Lie algebras of vector fields, arXiv: `math.AG/2510.17223v2` (2025).

$6j$-символы для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$

Д.В. Артамонов
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
artamonovdv@my.msu.ru

Доклад основан на работе автора [1].

Рассмотрим неприводимые представления V^1, V^2, V^3 данной алгебры и рассмотрим их тензорное произведение $V^1 \otimes V^2 \otimes V^3$. Скобки в данном произведении могут быть расставлены двумя способами:

$$(V^1 \otimes V^2) \otimes V^3 \text{ или } V^1 \otimes (V^2 \otimes V^3).$$

Соответственно, в сумму неприводимых $V^1 \otimes V^2 \otimes V^3$ можно раскладывать двумя способами.

1. Первый способ. Сначала раскладываем на неприводимые $V^1 \otimes V^2$:

$$V^1 \otimes V^2 = \bigoplus_U Mult_U^{V^1,V^2} \otimes U, \tag{1}$$

где U — неприводимое представление, а $Mult_U^{V^1,V^2}$ — пространство кратности. Это векторное пространство, не снабженное действием g. Умножая (1) тензорно на V^3 справа, получаем

$$(V^1 \otimes V^2) \otimes V^3 = \bigoplus_{U,W} Mult_U^{V^1,V^2} \otimes Mult_W^{U,V^3} \otimes W \tag{2}$$

2. Второй способ. Сначала раскладываем $V^2 \otimes V^3$:

$$V^2 \otimes V^3 = \bigoplus_{U} Mult_H^{V^2,V^3} \otimes H, \tag{3}$$

и далее

$$V^1 \otimes (V^2 \otimes V^3) = \bigoplus_{H,W} Mult_H^{V^2,V^3} \otimes Mult_W^{V^1,H} \otimes W. \tag{4}$$

Имеется изоморфизм $\Phi\colon (V^1 \otimes V^2) \otimes V^3 \to V^1 \otimes (V^2 \otimes V^3)$, который даёт отображение

$$\Phi\colon \bigoplus_{U} Mult_U^{V^1,V^2} \otimes Mult_W^{U,V^3} \to \bigoplus_{H} Mult_H^{V^2,V^3} \otimes Mult_W^{V^1,H} \tag{5}$$

Определение. Отображение Рака — это индуцированное Φ отображение

$$\mathcal{R}\begin{Bmatrix} V^1 & V^2 & U \\ V^3 & W & H \end{Bmatrix} : Mult_U^{V^1,V^2} \otimes Mult_W^{U,V^3} \to Mult_H^{V^2,V^3} \otimes Mult_W^{V^1,H}. \tag{6}$$

После выбора базиса в пространствах кратности появляются матричные элементы данного отображения. Они называются *коэффициентами Рака.* Из этого определения ясно значение данных коэффициентов с точки зрения теории представлений. Рассмотрим категорию конечномерных представлений и перейдём к её кольцу Гротендика. Фактически это означает переход от категории представлений к кольцу их характеров. При этом переходе теряется часть информации о категории представлений. Например, информация, заключенная в коэффициентах Рака. В некоторых случаях по кольцу Гротендика и коэффициентам Рака категория представлений восстанавливается.

Пусть s_1, s_2, s_3, s_3 — индексы базисных векторов в четырёх пространствах кратности, участвующих в формуле (6). Пусть $\bar{s}_i$ — индексы двойственных базисных векторов в двойственных пространствах. Тогда $6j$-символ определяется следующим образом через коэффициент Рака:

$$\begin{Bmatrix} V^1 & V^2 & U \\ V^3 & W & H \end{Bmatrix}^{s_1,s_2}_{s_3,s_4} := \mathcal{R}\begin{Bmatrix} V^1 & V^2 & U \\ V^3 & W & H \end{Bmatrix}^{\bar{s}_1,\bar{s}_2}_{s_3,s_4}$$

При вычислении проще работать именно с $6j$-символами.

Общая формула для $6j$-символа даже для $\mathfrak{gl}_3$ была неизвестна до недавнего времени. Явные формулы были получены только для некоторых классов представлений.

В докладе будет приведена конструкция индексов s_i (правда, перечисляющие не базисные векторы, а порождающие векторы в соответствующем пространстве кратности) и приведена явная формула для *произвольного* $6j$-символа для алгебры $\mathfrak{gl}_n$.

Список литературы

[1] Д.В. Артамонов. Вычисление $6j$-символов для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$. Сиб. матем. журн. **66** (2025), no. 4, 551–569, см. также arXiv: `math.RT/2405.05628v2`.

Локальные и 2-локальные антидифференцирования разрешимых алгебр Ли

Х.О. Атажонов

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан

atajonovxusainboy@gmail.com

Доклад основан на работе автора [1].

Понятие δ-дифференцирований было введено В. Филипповым для алгебр Ли в работах [3], [4]. Пространство δ-дифференцирований включает обычные дифференцирования ($\delta = 1$), антидифференцирования ($\delta = -1$), а также элементы центроида. Понятие локальных дифференцирований было введено в 1990 году Кадисоном [5], а также Ларсоном и Суруром [6]. Позднее, в 1997 году, Шемрль ввёл понятия 2-локальных дифференцирований и 2-локальных автоморфизмов алгебр [7]. Исследование локальных и 2-локальных δ-дифференцирований алгебр Ли было начато в работе [9] А. Худойбердиева и Б. Юсупова. В частности, в [9] были введены понятия локальных и 2-локальных δ-дифференцирований, а также описаны локальные и 2-локальные $\frac{1}{2}$-дифференцирования конечномерных разрешимых алгебр Ли с филиформным, гейзенберговым и абелевым нильрадикалами.

Определение 1. Пусть $(\mathfrak{L}, [-,-])$ — алгебра с умножением $[-,-]$. Линейное отображение φ называется δ-дифференцированием, если для любых $x, y \in \mathfrak{L}$ выполняется

$$\varphi[x,y] = \delta\big([\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)]\big),$$

где δ принадлежит основному полю $\mathbb{F}$.

Определение 2. Линейное отображение Δ называется локальным δ-дифференцированием, если для любого $x \in \mathfrak{L}$ существует δ-дифференцирование $\varphi_x \colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ (зависящее от x) такое, что $\Delta(x) = \varphi_x(x)$. Множество всех локальных δ-дифференцирований алгебры $\mathfrak{L}$ обозначается через $\mathrm{LocDer}_\delta(\mathfrak{L})$.

Определение 3. Отображение $\nabla \colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ (не обязательно линейное) называется 2-локальным δ-дифференцированием, если для любых $x, y \in \mathfrak{L}$ существует δ-дифферен-цирование $\varphi_{x,y} \in \mathrm{Der}_\delta(\mathfrak{L})$ такое, что

$$\nabla(x) = \varphi_{x,y}(x), \quad \nabla(y) = \varphi_{x,y}(y).$$

Для произвольной алгебры Ли $\mathfrak{L}$ определим производную и центральную серии следующим образом:

$$\mathfrak{L}^{[1]} = \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{L}^{[s+1]} = [\mathfrak{L}^{[s]}, \mathfrak{L}^{[s]}], \ s \geq 1,$$
$$\mathfrak{L}^{1} = \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{L}^{k+1} = [\mathfrak{L}^{k}, \mathfrak{L}], \ k \geq 1.$$

Определение 4. n-мерная алгебра Ли $\mathfrak{L}$ называется разрешимой (нильпотентной), если существует $s \in \mathbb{N}$ ($k \in \mathbb{N}$) такое, что $\mathfrak{L}^{[s]} = \{0\}$ ($\mathfrak{L}^{k} = \{0\}$). Такое минимальное число называется индексом разрешимости (нильпотентности).

Все разрешимые алгебры Ли, нильрадикал которых является естественно градуированной филиформной алгеброй Ли $\mathfrak{n}_{n,1}$, классифицированы в [8] ($n \geq 4$). Более того, разрешимые алгебры Ли, нильрадикал которых является естественно градуированной филиформной алгеброй Ли $\mathfrak{Q}_{2n}$, классифицированы в [2]. Доказано, что размерность разрешимой алгебры Ли, нильрадикал которой изоморфен n-мерной естественно градуированной филиформной алгебре Ли, не превышает $n+2$.

Ниже приводится список таких разрешимых алгебр Ли. Обозначим через $\mathfrak{s}_{n,1}^{i}$ разрешимые алгебры Ли с нильрадикалом $\mathfrak{n}_{n,1}$ и коразмерности один, а через $\mathfrak{s}_{n,2}$ — коразмерности два:

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{s}_{n,1}^{1}(\beta): & [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 2 \leq i \leq n-1, \\
 & [e_1, x] = e_1, \quad [e_i, x] = (i-2+\beta)e_i, \ 2 \leq i \leq n; \\
\mathfrak{s}_{n,1}^{2}: & [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 2 \leq i \leq n-1, \quad [e_i, x] = e_i, \ 2 \leq i \leq n; \\
\mathfrak{s}_{n,1}^{3}: & [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 2 \leq i \leq n-1, \\
 & [e_1, x] = e_1 + e_2, \quad [e_i, x] = (i-1)e_i, \ 2 \leq i \leq n;
\end{array}$$

$$\mathfrak{s}^4_{n,1}(\alpha_3,\alpha_4,\dots,\alpha_{n-1}) : [e_i,e_1]=e_{i+1},\ 2\le i\le n-1,\quad [e_i,x]= e_i+\sum_{l=i+2}^{n}\alpha_{l+1-i}e_l,\ 2\le i\le n;$$

$$\mathfrak{s}_{n,2}\ : \begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1},\ 2\le i\le n-1, & [e_1,x_1]=e_1,\\ [e_i,x_1]=(i-2)e_i,\ 3\le i\le n, & [e_i,x_2]=e_i,\quad 2\le i\le n.\end{cases}$$

Любая комплексная разрешимая алгебра Ли размерности $2n+1$ с нильрадикалом, изоморфным $\mathfrak{Q}_{2n}$, изоморфна одной из следующих алгебр:

$$\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda) : \begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1},\ 2\le i\le 2n-2, \quad [e_i,e_{2n+1-i}]=(-1)^ie_{2n},\ 2\le i\le n,\\ [e_1,x]=e_1,\quad [e_i,x]=(i-2+\lambda)e_i,\ 2\le i\le 2n-1,\\ [e_{2n},x]=(2n-3+2\lambda)e_{2n};\end{cases}$$

$$\mathfrak{r}_{2n+1}(2-n,\varepsilon) :$$
$$\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1},\ 2\le i\le 2n-2, \quad [e_i,e_{2n+1-i}]=(-1)^ie_{2n}, & 2\le i\le n,\\ [e_1,x]=e_1+\varepsilon e_{2n},\ \varepsilon=-1,1, \quad [e_i,x]=(i-n)e_i, & 2\le i\le 2n-1,\\ [e_{2n},x]=e_{2n};\end{cases}$$

$$\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda_5,\dots,\lambda_{2n-1}) :$$
$$\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1},\ 2\le i\le 2n-2, \quad [e_i,e_{2n+1-i}]=(-1)^ie_{2n},\quad 2\le i\le n,\\ [e_{2+i},x]=e_{2+i}+\sum\limits_{k=2}^{\left[\frac{2n-2-i}{2}\right]}\lambda_{2k+1}e_{2k+1+i},\ 0\le i\le 2n-6,\\ [e_{2n-i},x]=e_{2n-i},\ i=1,2,3,\quad [e_{2n},x]=2e_{2n}.\end{cases}$$

Кроме того, первый ненулевой параметр λ_{2k+1} может быть нормирован до 1.

Наконец, для любого $n\ge 3$ существует только одна разрешимая алгебра Ли $\mathfrak{r}_{2n+2}$ размерности $2n+2$ с нильрадикалом, изоморфным $\mathfrak{Q}_{2n}$:

$$\mathfrak{r}_{2n+2} : \begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1},\ 2\le i\le 2n-2, \quad [e_i,e_{2n+1-i}]=(-1)^ie_{2n},\ 2\le i\le n,\\ [e_i,x_1]=ie_i,\ 1\le i\le 2n-1, \quad [e_{2n},x_1]=(2n+1)e_{2n},\\ [e_i,x_2]=e_i,\ 2\le i\le 2n-1, \quad [e_{2n},x_2]=2e_{2n}.\end{cases}$$

Теорема 1. Разрешимые алгебры Ли $\mathfrak{s}^1_{n,1}(\beta)$, $\mathfrak{s}^2_{n,1}$, $\mathfrak{s}^3_{n,1}$, $\mathfrak{s}^4_{n,1}(\alpha_3,\dots,\alpha_{n-1})$, $\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda)$, $\mathfrak{r}_{2n+1}(2-n,\varepsilon)$, и $\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda_5,\dots,\lambda_{2n-1})$ допускают локальное антидифференцирование, которое не является антидифференцированием.

Теорема 2. Любое 2-локальное антидифференцирование алгебр $\mathfrak{s}^1_{n,1}(\beta)$, $\mathfrak{s}^2_{n,1}, \mathfrak{s}^3_{n,1}$, $\mathfrak{s}^4_{n,1}(\alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}), \mathfrak{s}_{n,2}, \tau_{2n+1}(\lambda), \tau_{2n+1}(2-n, \varepsilon), \tau_{2n+1}(\lambda_5, \lambda_6, \dots, \lambda_{2n-1})$, и τ_{2n+2} является антидифференцированием.

Список литературы

[1] S. Ayupov, K. Atajonov, B. Yusupov. Local and 2-local anti-derivations on solvable Lie algebras. European Journal of Mathematics **11** (2025), article 52, `https://doi.org/10.1007/s40879-025-00841-w`.

[2] J. M. Ancochea Bermúdez, R. Campoamor-Stursberg, L. García Vergnolle. Solvable Lie algebras with naturally graded nilradicals and their invariants. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **39** (2006), no. 6, 1339–1355.

[3] V. Filippov. On δ-derivations of Lie algebras. Siberian Mathematical Journal **39** (1998), no. 6, 1218–1230.

[4] V. Filippov. δ-Derivations of prime Lie algebras. Siberian Mathematical Journal **40** (1999), no. 1, 174–184.

[5] R. Kadison. Local derivations. Journal of Algebra **130** (1990), 494–509.

[6] D. Larson, A. Sourour. Local derivations and local automorphisms of $B(X)$. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **51** (1990), 187–194.

[7] P. Šemrl. Local automorphisms and derivations on $B(H)$. Proceedings of the American Mathematical Society **125** (1997), 2677–2680.

[8] L. Šnobl, P. Winternitz. A class of solvable Lie algebras and their Casimir invariants. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **38** (2005), no. 12, 2687–2700.

[9] A.Kh. Khudoyberdiyev, B.B. Yusupov. Local and 2-local $\frac{1}{2}$-derivation on finite-dimensional Lie algebras. Results in Mathematics **79** (2024), article 210.

Проективные гиперповерхности высоких степеней, допускающие индуцированное аддитивное действие

И.С. Бельдиев

ФКН НИУ ВШЭ, Москва, Россия

ivbeldiev@gmail.com

Аддитивным действием называется эффективное регулярное действие алгебраической группы $\mathbb{G}_a^m$ на алгебраическом многообразии X. В случае, когда X является замкнутым подмногообразием в проективном пространстве $\mathbb{P}^n$, можно рассматривать так называемые индуцированные аддитивные действия, то есть аддитивные действия на X, которые могут быть продолжены до регулярного действия на объемлющем проективном пространстве.

Наиболее хорошо изучен случай, когда X является проективной гиперповерхностью. Например, доказано, что степень проективной гиперповерхности в $\mathbb{P}^n$ не превосходит n. Кроме того, для каждого k от 2 до n существует невырожденная гиперповерхность (то есть гиперповерхность, не изоморфная проективному конусу над гиперповерхностью в меньшем проективном пространстве) $X \subseteq P^n$ степени k, допускающая индуцированное аддитивное действие. Известно, что такая гиперповерхность единственна (с точностью до изоморфизма) в экстремальных случаях $k = 2$ и $k = n$.

Мы рассматриваем случай гиперповерхностей высоких степеней. А именно, мы даём полную классификацию таких гиперповерхностей степеней $n-1$, $n-2$ и $n-3$.

Доклад основан на статье [1] и подготовлен в ходе проведения исследования в рамках проекта «Международное академическое сотрудничество» НИУ ВШЭ.

Список литературы

[1] I. Beldiev. Projective hypersurfaces of high degree admitting an induced additive action. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society **48** (2025), article 195.

Алгебры Ли, порождённые однородными дифференцированиями кольца частичных полиномов Лорана

О.Т. Боковикова

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

olbokovikova@gmail.com

Пусть $\mathbb{K}$ — поле характеристики ноль. Обозначим через

$$\mathcal{A}_{s,n} = \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_s^{\pm 1}, x_{s+1}, \ldots, x_n]$$

кольцо *частичных полиномов Лорана* над полем $\mathbb{K}$ в n переменных, где первые s переменных обратимы.

В кольце $\mathcal{A}_{s,n}$ можно ввести естественную $\mathbb{Z}^n$-градуировку:

$$\mathcal{A}_{s,n} = \bigoplus_{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{Z}^n} \mathbb{K}x_1^{a_1}\ldots x_n^{a_n}.$$

Относительно данной градуировки однородные дифференцирования кольца $\mathcal{A}_{s,n}$ имеют один из следующих двух типов.

Тип I. Дифференцирования вида

$$\nabla_i^a = \lambda x_1^{a_1} \dots x_{i-1}^{a_{i-1}} x_{i+1}^{a_{i+1}} \dots x_n^{a_n} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где $a = (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^s \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-s}, \quad i > s, \quad \lambda \in \mathbb{K}$. Такие дифференцирования являются локально нильпотентными.

Тип II. Дифференцирования вида

$$\Delta_\beta^p = x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n} \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

где $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^s \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-s}, \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$.

Вопрос конечномерности алгебры Ли, порождённой конечным числом однородных дифференцирований, активно изучался в последние годы. В работах [1], [2] получен критерий для дифференцирований типа I в кольце многочленов, а в работе [3] — для дифференцирований типа II также в кольце многочленов, причём критерий сформулирован в терминах ориентированного графа, ассоциированного с множеством дифференцирований.

Расширяя графовый подход на случай кольца $\mathcal{A}_{s,n}$, появляются новые ограничения, возникающие из-за обратимых переменных. Основной результат доклада приводится в следующей теореме.

Теорема. Пусть $\mathcal{D} = \{\Delta_{\beta(1)}^{p(1)}, \dots, \Delta_{\beta(m)}^{p(m)}\}$ — множество дифференцирований типа II кольца $\mathcal{A}_{s,n}$. Если ассоциированный с множеством $\mathcal{D}$ ориентированный граф содержит цикл длины строго больше $s+1$, то порождённая множеством $\mathcal{D}$ алгебра Ли $\mathfrak{g}(\mathcal{D})$ является бесконечномерной.

В докладе будет приведён пример, иллюстрирующий точность полученной оценки на длину цикла. Кроме того, для простейшего нетривиального случая кольца $\mathcal{A}_{1,n}$ будет представлен критерий, связывающий допустимую длину ориентированных циклов с конечномерностью порождённой алгебры Ли.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, A. Liendo, T. Stasyuk. Lie algebras of vertical derivations on semiaffine varieties with torus actions. J. Pure Appl. Algebra **225** (2021), no. 2, article 106499.

[2] I. Arzhantsev, M. Zaidenberg. Tits-type alternative for groups acting on toric affine varieties. Int. Math. Res. Not. IMRN (2022), no. 11, 8162–8195.

[3] I. Arzhantsev, S. Gaifullin, V. Lopatkin. On finite-dimensional homogeneous Lie algebras of derivations of polynomial rings. Izv. Math. **89** (2025), no. 3, 425–441.

Нётеровость по уравнениям двуступенно нильпотентных графовых групп

И.М. Бучинский
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия
buchvan@mail.ru

Универсальная алгебраическая геометрия, или алгебраическая геометрия над алгебраическими системами [1], [2], — это направление математики, занимающееся исследованием решений уравнений над различными алгебраическими системами. Под уравнениями понимаются, как правило, атомарные формулы языка алгебраической системы. Текущий доклад будет посвящен алгебраической геометрии над группами [3]. В частности, будет рассматриваться так называемый диофантов случай, то есть случай группового языка с добавленными в него константными символами, взаимно однозначно соответствующими всем элементам группы. Таким образом, под уравнением от переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ над группой G мы имеем в виду равенство вида $w(X) = e$, где $w(X)$ — групповое слово от переменных X с константами из G, или, что то же самое, это слово в группе $F(X) * G$, где $F(X)$ — свободная группа с базисом X.

Введём наиболее важные для нас понятия универсальной алгебраической геометрии, следуя [1]. Несмотря на то, что эти понятия носят универсальный характер, мы приведем их в адаптации на язык теории групп (см., например, [3]).

Непустое (возможно, бесконечное) множество уравнений над группой G называется системой уравнений над G. Точка $\overline{g} \in G^n$ называется решением уравнения $s(X)$, $|X| = n$, над группой G, если $G \models s(\overline{g})$. Точка $\overline{g} \in G^n$ называется решением системы уравнений $S(X)$, $|X| = n$, над группой G, если $\overline{g}$ является решением каждого уравнения из системы $S(X)$ над G. Две системы уравнений над группой G называются эквивалентными, если их множества решений (алгебраические множества) совпадают. Группа G называется *нётеровой по уравнениям*, если для любого целого положительного n любая система уравнений $S(X)$ над G от n переменных X эквивалентна своей некоторой конечной подсистеме $S_0(X) \subseteq S(X)$. Аналогичным образом вводится понятие группы, нётеровой по уравнениям от одной переменной.

Нётеровость по уравнениям (или, следуя [2], геометрическая нётеровость) является важным свойством для универсальной алгебраической геометрии. Для нётеровых по уравнениям алгебраических систем существует общий теоретический подход [1], [4] (объединяющие теоремы), позволяющий взглянуть на алгебраические множества с разных точек зрения. Также известно, что в нётеровых по уравнениям алгебраических системах произвольное алгебраическое множество представимо в виде конечного объединения неприводимых алгебраических множеств [1, Следствие 2.5.6]. Известно достаточно много примеров нётеровых по уравнениям алгебраических систем. Например, нётеровыми по уравнениям являются конечные алгебраические системы, абелевы группы, линейные группы, гиперболические группы без кручения [1], свободные разрешимые группы произвольных ступеней разрешимости и рангов [5], конечно порождённые двуступенно нильпотентные группы [3], [6]. Известно также много и алгебраических систем, не являющихся нётеровыми по уравнениям: например, сплетение неабелевой группы и бесконечной группы [7], есть примеры двуступенно нильпотентных групп и конечно порождённых центрально-метабелевых групп [5].

Обозначим через $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$ коммутатор элементов g и h группы G. Группа G называется двуступенно нильпотентной, если $[[g, h], t] = e$ для всех $g, h, t \in G$. Из нормальной формы элементов известен общий вид уравнения от переменных $x_1, \ldots, x_n$ над двуступенно нильпотентной группой G:

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} g \prod_{i=1}^{n} [x_i, a_i] \prod_{i>j} [x_i, x_j]^{\beta_{i,j}} = e,$$

где $g, a_i \in G$, $\alpha_i, \beta_{i,j} \in \mathbb{Z}$.

Пусть Γ — простой неориентированный граф. Группа $G_\Gamma = \langle X \mid R \rangle$ называется *свободной частично коммутативной* (или *графовой*), если $X = V(\Gamma)$ и

$$R = \{[x_i, x_j] \mid x_i \text{ и } x_j \text{ смежны в графе } \Gamma\}.$$

Граф Γ называется *графом коммутативности* частично коммутативной группы G_Γ. Графовые группы, или частично коммутативные группы, или right-angled Artin groups, имеют множество замечательных свойств (удобные нормальные формы элементов, разрешимость основных алгоритмических задач, богатая структура подгрупп и многое другое; [8]). Ранее В.Н. Ремесленниковым ставился вопрос об установлении связей между алгебраической геометрией над такими группами и алгебраической геометрией над неориентированными графами.

Основным результатом, который будет представлен на докладе, является описание всех нётеровых по уравнениям двуступенно нильпотентных графовых групп. Полученное описание фактически связывает свойство нётеровости по уравнениям таких групп с нётеровостью по уравнениям их графов коммутативности. Нётеровы по уравнениям графы ранее уже были описаны в [9]. Среди промежуточных результатов отметим, что в любых двуступенно нильпотентных группах без кручения с изолированным коммутантом, не являющихся нётеровыми по уравнениям от одной переменной, всегда найдется бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов. Кроме того, стало понятно, что все двуступенно нильпотентные графовые группы аппроксимируются свободной двуступенно нильпотентной группой ранга 2.

Доклад основан на работе [10].

Список литературы

[1] Э.Ю. Даниярова, А.Г. Мясников, В.Н. Ремесленников. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. Новосибирск, Изд-во СО РАН, 2016.

[2] B.I. Plotkin. Algebras with the same (algebraic) geometry. Proc. Steklov Inst. Math. **242** (2003), 176–207.

[3] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov. Algebraic geometry over groups I: Algebraic sets and ideal theory. Journal of Algebra **219** (1999), no. 1, 16–79.

[4] E. Daniyarova, A. Myasnikov, V. Remeslennikov. Unification theorems in algebraic geometry. Aspects of infinite groups. A Festschrift in honor of Anthony Gaglione. World Scientific, Hackensack, 2008, 80–111.

[5] Ch.K. Gupta, N.S. Romanovskii. The property of being equationally Noetherian for some soluble groups. Algebra Logic **46** (2007), no. 1, 28–36.

[6] M. Valiunas. On equationally Noetherian and residually finite groups. Journal of Algebra **587** (2021), 638–677.

[7] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Roman'kov. Two theorems about equationally Noetherian groups. Journal of Algebra **194** (1997), no. 2, 654–664.

[8] A.J. Duncan, V.N. Remeslennikov, A.V. Treier. A survey of free partially commutative groups. J. Phys.: Conf. Ser., **1441**, 012136, 2020, 12 pp.

[9] И.М. Бучинский, А.В. Трейер. О графах, не являющихся нетеровыми по уравнениям. Сиб. электрон. матем. изв. **20** (2023), no. 2, 580–587.

[10] И.М. Бучинский. О связи уравнений над частично коммутативными двуступенно нильпотентными группами с уравнениями над графами. Сиб. электрон. матем. изв. **22** (2025), no. 2, 961–988.

Классификация регулярных и субрегулярных орбит коприсоединённого действия максимальных унипотентных подгрупп в группах типа B_n, C_n, D_n

М.С. Венчаков
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
mihail.venchakov@gmail.com

Рассмотрим классические алгебраические группы типа B_n, C_n, D_n над конечным полем достаточно большой характеристики. Пусть U — максимальная унипотентная подгруппа в любой из них. Неприводимые конечномерные представления группы U, согласно методу орбит Кириллова (а точнее, его модификации для конечных полей), находятся во взаимно однозначном соответствии с орбитами коприсоединённого действия на пространстве, двойственном к её алгебре Ли.

Я планирую посвятить доклад специальным классам таких орбит. Более конкретно, мы можем рассмотреть представления, соответствующие орбитам максимальной и предмаксимальной размерности при коприсоединённом действии наших групп. Классификация таких орбит частично получена. Например, есть классификация орбит максимальной размерности для типа C_n. Я собираюсь рассказать об уже известных, а также новых результатах в этой области.

Исследования поддержаны грантом РНФ 25–21–00219.

Гомотопические группы гладких торических многообразий

Ф.Е. Вылегжанин
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
vylegf@gmail.com

С точки зрения теории гомотопий, (рационально) гладкие торические многообразия X_Σ над полем комплексных чисел тесно связаны с полиэдральными произведениями — момент–угол-комплексами

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (D^2)^{\times I} \times (S^1)^{\times [m] \setminus I} \subset (D^2)^m$$

и пространствами Дэвиса–Янушкевича

$$\mathrm{DJ}(\mathcal{K}) = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\mathbb{C}P^\infty)^{\times I} \subset (\mathbb{C}P^\infty)^m$$

(здесь $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс, соответствующий вееру Σ; его вершины $[m] = \{1, \ldots, m\}$ соответствуют лучам веера). Недавний прогресс в изучении пространств петель $\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ и $\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K})$ [1], [2] позволяет получить результаты о гомотопических группах торических многообразий.

Теорема. [1] Пусть $\mathcal{K}$ — флаговый симплициальный комплекс (то есть, любой набор попарно смежных вершин образует симплекс). Тогда имеем гомотопическую эквивалентность $\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq \prod_{n\geq 3}(\Omega S^n)^{\times D_n}$, где числа $D_n \geq 0$ определяются из тождества

$$\prod_{n\geq 3}(1-t^{n-1})^{D_n} = \sum_{J\subset[m]}(1-\chi(\mathcal{K}_J))t^{|J|} \in \mathbb{Z}[[t]].$$

Следствие. Для любого d-мерного гладкого торического многообразия X_Σ, соответствующего флаговому комплексу $\mathcal{K}$, имеем: $\pi_1(X_\Sigma) = 0$, $\pi_2(X_\Sigma) \simeq \mathbb{Z}^{m-d}$ и

$$\pi_N(X_\Sigma) = \bigoplus_{n=3}^{N} \pi_N(S^n)^{\oplus D_n}, \quad N \geq 3.$$

Для набора простых чисел P обозначим

$$\mathbb{Z}[1/P] = \mathbb{Z}[1/p : p \in P] \subset \mathbb{Q}$$

локализацию кольца $\mathbb{Z}$ вне P. Эта конструкция имеет аналог в теории гомотопий.

Теорема. [2] Пусть множество P содержит все простые числа, не превосходящие $2m$, а также все простые числа p такие, что в $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbb{Z})$ есть p-кручение (заведомо достаточно взять все $p \leq 2^{m\cdot 2^{2^m}}$). Тогда имеем $1/P$-локальную гомотопическую эквивалентность $\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq_{(1/P)} \prod_{n\geq 3}(\Omega S^n)^{\times D_n}$, где числа $D_n \geq 0$ алгоритмически вычислимы (выражаются в терминах функтора $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Q}[\mathcal{K}]}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$). Следовательно, для любого гладкого торического многообразия имеем

$$\pi_*(X_\Sigma) \otimes \mathbb{Z}[1/P] = \bigoplus_{n=3}^{N} \pi_N(S^n)^{\oplus D_n} \otimes \mathbb{Z}[1/P]$$

при $* \geq 3$.

Аналогичные результаты получены для односвязных торических орбифолдов. Для некоторых классов симплициальных комплексов (остовы флаговых комплексов, графы, склейки сильно смежностных комплексов) числа

D_n можно описать более явно, и та же формула верна без локализации (это неопубликованный результат, полученный совместно с Л. Стэнтоном).

Список литературы

[1] F. Vylegzhanin. Loop homology of moment-angle complexes in the flag case. Algebr. Geom. Topol. **25** (2025), 5619–5663, см. также arXiv: `math.AT/2403.18450`.

[2] L. Stanton, F. Vylegzhanin. Anick's conjecture for polyhedral products, arXiv: `math.AT/2506.15573` (2025).

Обобщённо гибкие многообразия с инвариантным дивизором

С.А. Гайфуллин

МГУ им. М.В. Ломоносова, ФКН НИУ ВШЭ, Москва, Россия

`sgayf@yandex.ru`

Доклад основан в том числе на совместной работе с К. Шахматовым и Д. Чунаевым (в процессе написания).

Пусть X — неприводимое аффинное алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики. Будем называть $\mathbb{G}_a$-действиями алгебраические действия аддитивной группы основного поля. Напомним, что точка $x \in X$ называется *гибкой*, если её касательное пространство порождается касательными векторами к орбитам $\mathbb{G}_a$-действий. Рассмотрим группу $\mathrm{SAut}(X)$ специальных автоморфизмов на X, то есть подгруппу в группе всех регулярных автоморфизмов, порождённую всеми алгебраическими подгруппами, изоморфными аддитивной группе основного поля. В работе [1] показано, что гибкие точки, если они есть, образуют открытую $\mathrm{SAut}(X)$-орбиту $\mathcal{O} \subseteq X$. Многообразия, обладающие хотя бы одной (и следовательно открытым множеством) гибких точек, называются *обобщённо гибкими.* Если $\mathcal{O}$ совпадает с множеством гладких точек X^{reg} в X, то многообразие называется *гибким.* Наконец, если коразмерность $X \setminus \mathcal{O}$ в X не менее 2, то X называется *гибким в коразмерности один.*

Интерес к гибким многообразиям обусловлен тем, что в работе [1] для аффинных многообразий X размерности хотя бы 2 доказана эквивалентность трёх условий: 1) гибкости X, 2) транзитивности действия $\mathrm{SAut}(X)$ на X^{reg} и 3) бесконечной транзитивности действия $\mathrm{SAut}(X)$ на X^{reg}. Последнее условие заключается в том, что для любого натурального m и для любых двух упорядоченных наборов $(a_1, \ldots, a_m)$ и $(b_1, \ldots, b_m)$ попарно различных точек существует $\varphi \in \mathrm{SAut}(X)$ такой, что $\varphi(a_j) = b_j$ для всех j.

Ранее была известна только одна серия примеров обобщённо гибких, но не гибких многообразий, построенная в работе [3]. Данная серия примеров состоит из гладких поверхностей Гизатуллина, имеющих в дополнении к $\mathcal{O}$ конечное число неподвижных точек. Соответственно, все эти примеры были гибкими в коразмерности один.

В докладе мы обсудим построение серии многообразий, дающих примеры обобщённо гибких, но не гибких в коразмерности один многообразий в произвольной размерности не менее 4, см. [2]. Также будет доказано, что при переходе от многообразия к его тотальному координатному пространству обобщённая гибкость может не сохраняться, а гибкость в коразмерности один сохраняется. Исследования поддержаны грантом РНФ 25-21-00277.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. **162** (2013), no. 4, 767–823.

[2] S. Gaifullin. Generically flexible affine varieties with invariant divisors, arXiv: `math.AG/2507.14745` (2025).

[3] S. Kovalenko. Transitivity of Automorphism Groups of Gizatullin Surfaces. Int. Math. Res. Not. **2015** (2015), no. 21, 1433–1484.

О периодических компонентах нормализатора тора в алгебраических группах

А.А. Гальт

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

`galt84@gmail.com`

Компонента связности аффинной алгебраической группы называется *периодической*, если все ее элементы имеют конечный порядок. В работе [1] получена характеризация периодических компонент в терминах автоморфизмов с конечным числом неподвижных точек. Полученные результаты были применены к изучению нормализаторов максимальных торов в простых алгебраических группах. А именно, для классических групп и исключительных групп типа G_2 были найдены порядки элементов в периодических компонентах нормализатора тора. Позднее в работе [2] порядки элементов в периодических компонентах нормализатора тора были найдены для всех простых алгебраических групп.

В докладе пойдет речь о некоторых смежных вопросах, связанных с периодическими компонентами. В частности, какую группу порождают периодические элементы и чему равно число неподвижных точек автоморфизма сопряжения периодическим элементом?

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF–2026–0017.

Список литературы

[1] С.Н. Федотов. Аффинные алгебраические группы с периодическими компонентами. Матем. сб. **200** (2009), no. 7, 145–160.

[2] M.C.B. Zaremsky. Representatives of elliptic Weyl group elements in algebraic groups. J. Group Theory **17** (2014), no. 1, 49–71.

О гауссовой теории композиции целочисленных бинарных квадратичных форм

М.Х. Гизатуллин
Самара, Россия
gizmarat@yandex.ru

Доклад основан на моих (пока неопубликованных) дополнениях к [1], то есть к переведённому в 1959 году на русский язык сборнику арифметических работ Гаусса 1879-го года издания. Имеются и переводы с латинского на немецкий, на английский, изданные соответственно в 1889 и 1966. Пусть $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ — линейная группа унимодулярных целочисленных 2×2-матриц, D_0 — ненулевое целое число. Примитивная (точнее, собственно примитивная) бинарная квадратичная форма с детерминантом D_0 — это $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, коэффициенты $a, 2b, c$ — целые числа с единичным общим делителем (и b — целое), $D_0(f) = b^2 - ac$. При действии линейной унимодулярной замены переменных x, y все упомянутые свойства сохраняются. Иногда рассматриваются формы $f(x, y) = ax^2+bxy+cy^2$, то есть допускается и нечётный средний коэффициент b, их дискриминант — это $D_1(f) = b^2-4ac$. Для таких чуть более общих целочисленных форм описание формы F, оказывающейся композицией форм f, f' (кратко, $F = f * f'$), представлено следующим образом:

$$AX^2 + BXY + CY^2 = (ax^2 + bxy + cy^2)(a'u^2 + b'uv + c'v^2),$$

$$X = pxu + p'xv + p''yu + p'''yv, \quad Y = qxu + q'xv + q''yu + q'''yv,$$

причём 2×2-миноры составленной из целых чисел $p, p', p'', p''', q, q', q'', q'''$ матрицы

$$\begin{pmatrix} p & p' & p'' & p''' \\ q & q' & q'' & q''' \end{pmatrix}$$

порождают тот же самый идеал, что и коэффициенты A, B, C формы F.

Отмечу, что далеко не для каждых двух форм f, f' определена композиция, а если и определена, то может оказаться, что результаты F различны (даже не обязательно $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$-эквивалентны!). Для последнего факта, не совсем точная аналогия — извлечение кубического корня из произведения двух комплексных чисел.

После предыдущего пессимистического замечания отмечу, что для двух примитивных форм с одинаковым детерминантом D_0 (как и для двух примитивных форм, имеющих нечётный средний коэффициент и одинаковый дискриминант D_1) композиция всегда определена, результат — форма с таким же дискриминантом. На самом деле, речь идёт о композиции классов $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-эквивалентности, но при этом классы описываются с помощью их канонических представителей. Для некоторых дискриминантов всё настолько однозначно, что таблицы умножения классов представляют собой таблицу умножения для абелевой группы, являющейся прямым произведением циклических групп второго порядка. Точнее, как показал Гаусс, классы положительных примитивных форм, детерминант D_0 которых — взятое со знаком минус удобное число Эйлера (одно из шестидесяти пяти таких) — это упомянутая абелева группа, порядок которой равен одному из чисел 1, 2, 4, 8, 16. Нейтральным элементом в таких группах является класс формы $f_0(x, y) = x^2 - D_0 y^2$ (для форм с нечётной серединой, $f_0 = x^2 + xy + my^2$). Прочих представителей имеется три вида. Это, во-первых, обобщение предыдущей формы, т.е. $mx^2 - ny^2$ $m < n$, $mn = D_0$, во-вторых, формы с двумя совпадающими коэффициентами, точнее, $2bx^2 + 2bxy + cy^2$, $ax^2 + 2bxy + ay^2$.

Если не считать f_0, то среди упомянутых представителей нет так называемых самодупликативных форм, то есть совпадающих со своей самокомпозицией: $f = f * f$. Любопытно, что над полиномиальным кольцом $\mathbb{Z}[a_0, a_1, a_2, a_3]$, где a_0, a_1, a_2, a_3 — независимые переменные, существует естественная самодупликативная форма

$$(a_1^2 - a_0a_2)x^2 + (a_1a_2 - a_0a_3)xy + (a_2^2 - a_1a_3)y^2,$$

которая является нормированным гессианом бинарной кубики $a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3$, и все примитивные самодупликативные бинарные квадратичные формы (со средним коэффициентом произвольной чётности) получаются как гессианы кубик при подходящей целочисленной специализации величин a_0, a_1, a_2, a_3. Добавлю, что каждая бинарная форма нечётной степени имеет квадратичные коварианты, но пока не могу сказать ничего содержательного о композиционных свойствах этих ковариантов.

Отмечу, что наличие форм, удовлетворяющих тождеству $f = f * f$, заставило Гаусса и многих его последователей искать и находить такие эквивалентности $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-классов квадратичных форм, при которых самодупликативные формы становятся эквивалентными нейтральному элементу с тем же дискриминантом, а новые классы эквивалентности образуют группу относительно операции композиции. О других тождествах, инициирующих поиски аналогичных укрупнений эквивалентностей, я не упоминаю. Наиболее популярные классы эквивалентности — так называемые роды (*genera*) форм, причём иногда у разных математиков встречаются существенно разные определения рода. Для конструкции рода и для описания его свойств, Гаусс использует мультипликативные (относительно композиции) характеры форм. Эти характеры могут принимать лишь значения $+1$, -1. Моё объяснение такой ограниченности значений — формулы

$$f_0 = f * f, \quad f = f * f * f.$$

Кстати сказать, вторая формула позволяет построить много непримитивных самодупликативных форм, это $f(\lambda, \mu)f$, где λ, μ — целые числа, $f(\lambda, \mu) \neq 0$.

У меня другой подход к проблеме построения групп из форм. Не надо тасовать $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-классы по коллективам, надо воспользоваться упомянутой выше таблицей композиционного умножения этих классов (с фиксированным дискриминантом) и выбрать подтаблицу, являющуюся таблицей умножения в некоторой группе. Используя свободу выбора, предоставляемую табличными клетками с двумя или тремя элементами. Отмечу, что даже для некоторых самодупликативных форм f имеются три неэквивалентные формы, представляющие значения $f * f$. И что для некоторых дискриминантов таблицы настолько богаты, что поиск групповой подтаблицы приводит к неизоморфным группам. Например, для $D_0 = -365$ положительные примитивные формы позволяют сформировать две неизоморфные группы порядка 20. Одна — произведение двух циклических групп порядков 2 и 10, другая — произведение двух циклических групп порядков 4 и 5.

Список литературы

[1] К.Ф. Гаусс, Труды по теории чисел, Издательство Академии Наук СССР, Москва (1959). Gauss C. F., Disquisitiones Arithmeticae (1879).

Гипотеза Попова–Поммеренинга для групп ранга 3

З.И. Городилова
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
gorodzoja7@gmail.com

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, G — линейная алгебраическая группа над $\mathbb{K}$ и X — аффинное алгебраическое многообразие, на котором задано регулярное действие группы G. Тогда возникает линейное представление группы G в алгебре $\mathbb{K}[X]$ регулярных функций на X, задаваемое формулой $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$ для всех $g \in G$, $f \in \mathbb{K}[X]$, $x \in X$. Проблема конечной порожденности алгебр инвариантов произвольных действий алгебраических групп на аффинных многообразиях называется 14-й проблемой Гильберта. В рамках данной проблемы известна другая задача, в которой для алгебраической подгруппы H в группе G, действующей на аффинном многообразии X, ставится вопрос о том, будет ли алгебра инвариантов $\mathbb{K}[X]^H$ конечно порожденной. В отличие от общей проблемы, тут рассматриваются только такие действия подгруппы H на многообразии X, которые продолжаются до действия всей группы G на том же многообразии.

Алгебраическая подгруппа $H \subset G$ называется *регулярной*, если она нормализуется некоторым максимальным тором группы G.

Гипотеза. (В.Л. Попов, К. Поммеренинг, конец 1970-х). Пусть G — связная редуктивная группа и $H \subset G$ — регулярная подгруппа в G. Тогда для всякого аффинного многообразия X с регулярным действием группы G алгебра инвариантов $\mathbb{K}[X]^H$ конечно порождена.

Согласно принципу переноса (см. [1, теорема 3.9] или [2, Proposition 6.8]) утверждение гипотезы равносильно конечной порожденности алгебры $\mathbb{K}[G]^H$, где H действует на G правыми сдвигами. Алгебра $\mathbb{K}[G]^H$, в свою очередь, изоморфна алгебре регулярных функций на однородном пространстве G/H. Таким образом, ответ на вопрос зависит только от пары (G, H). Проверку данной гипотезы также можно свести к случаю, когда группа G полупроста, а H унипотентна.

Пусть B — борелевская подгруппа в G, которая содержит максимальный тор T и максимальную унипотентную подгруппу U, Δ — система корней группы G относительно тора T, $\Delta^+ \subset \Delta$ — множество положительных корней относительно B. Для проверки гипотезы достаточно рассматривать регулярные унипотентные подгруппы H, которые содержатся в U и нормализуются тором T. Все такие подгруппы параметризуются замкнутыми относительно сложения подмножествами $\Phi \subset \Delta^+$ [2, Lemma 3.3] и порождаются семействами корневых подгрупп $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$.

Гипотеза доказана в следующих частных случаях:

1. G — группа типа $\mathsf{A_n}$ при $n \leq 4$, $\mathsf{B_2}$ или $\mathsf{G_2}$ [3], [4];

2. H — унипотентный радикал параболической подгруппы в G [2];

3. H удовлетворяет условию $|\Delta^+ \backslash \Phi| - 1 \leq \mathrm{rk}(\Delta^+ \backslash \Phi)$ [5].

Основным результатом доклада является следующая

Теорема 1. Гипотеза Попова–Поммеренинга верна для групп типов $\mathsf{B_3}$ и $\mathsf{C_3}$.

Из данной теоремы с учетом случая 1 вытекает

Следствие. Гипотеза Попова-Поммеренинга верна для всех полупростых групп G ранга не выше 3.

Теорема 2. Гипотеза Попова–Поммеренинга верна для групп типа $\mathsf{A_5}$.

Для доказательства теорем 1 и 2 были классифицированы все регулярные унипотентные подгруппы в группах рассматриваемых типов. Справедливость гипотезы для части из них следует из упомянутых выше результатов 1–3, а для оставшихся случаев идея доказательства заключается в следующем. Берется U^- — противоположная к U подгруппа в G. В силу теоремы Хаджиева [6] конечная порожденность алгебры $\mathbb{K}[G/H]$ равносильна конечной порожденности алгебры $\mathbb{K}[G/H]^{U^-}$, где U^- действует на G/H умножениями слева. Интересующая нас алгебра $\mathbb{K}[G/H]^{U^-}$ вкладывается в алгебру инвариантов $\mathbb{K}[\Omega]^{U^- \times H}$, где $\Omega = U^- \cdot T \cdot U \subset G$ — большая клетка, U^- и H действуют на ней умножениями слева и справа соответственно. Для доказательства теорем находятся все функции из алгебры инвариантов на большой клетке, которые продолжаются до регулярных функций на всей алгебре $\mathbb{K}[G]^{U^- \times H}$. Для нахождения таких функций используется алгоритм Кучеренко [7], применявшийся им в похожей ситуации. С его помощью явно строится конечная система порождающих алгебры инвариантов $\mathbb{K}[G/H]^{U^-}$, что завершает доказательство.

Список литературы

[1] Э.Б. Винберг, В.Л. Попов. Теория инвариантов. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1989, 137–309.

[2] F.D. Grosshans. Algebraic homogeneous spaces and invariant theory. Lecture Notes in Mathematics **1673**, Springer, Berlin Heidelberg, 1997.

[3] L. Tan. On the Popov–Pommerening conjecture for groups of type $\mathsf{A_n}$. Proceedings of the American Mathematical Society, **106** (1989), no. 3, 611–616.

[4] L. Tan. On the Popov–Pommerening conjecture for the groups of type G_2. Algebras Groups Geom. **5** (1988), no. 4, 421–432.
[5] F. Knop. Über Hilberts vierzehntes Problem für Varietäten mit Kompliziertheit eins. Math. Z. **213** (1993), no. 1, 33–36.
[6] Дж. Хаджиев. Некоторые вопросы теории векторных инвариантов. Матем. сб. **72(114)** (1967), no. 3, 420–435.
[7] А.И. Кучеренко. Геометрический подход к задаче ветвления. Препринт, 2025.

Порядки элементов расширения конечной простой исключительной группы графовым автоморфизмом

М.А. Гречкосеева
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
grechkoseeva@gmail.com

Доклад основан на совместной работе с А.А. Бутурлакиным.

Пусть G — конечная группа, возникающая следующим образом: $G = C_{\mathbb{G}}(\sigma)$, где $\mathbb{G}$ — односвязная простая алгебраическая группа над алгебраическим замыканием поля простого порядка p и σ — сюръективный эндоморфизм группы $\mathbb{G}$. Тогда, за конечным числом исключений, $G/Z(G)$ — простая группа, и все конечные простые группы лиева типа могут быть получены таким образом. Будем для краткости писать $\mathbb{H}_\sigma$ вместо $C_{\mathbb{H}}(\sigma)$ для любой σ-инвариантной подгруппы или надгруппы $\mathbb{H}$ группы $\mathbb{G}$.

Пусть α — полупростой автоморфизм группы $\mathbb{G}$ (другими словами, α^k — сопряжение полупростым элементом группы $\mathbb{G}$ для некоторого k, взаимно простого с p). По теореме Стейнберга [1, теорема 8.1] централизатор $C_{\mathbb{G}}(\alpha)$ — связная редуктивная группа. В частности, если g — полупростой элемент группы G, то $C_G(g) = (C_{\mathbb{G}}(g))_\sigma$ — множество неподвижных точек эндоморфизма σ в редуктивной подгруппе группы $\mathbb{G}$. Описание централизаторов полупростых элементов группы G, основанное на этом соображении, изложено в работе Р. Картера [3] и, в свою очередь, на основе этого описания завершен подсчет порядков элементов конечных простых групп лиева типа (см. [2]).

Пусть теперь τ — графовый автоморфизм группы $\mathbb{G}$ (т.е. τ — автоморфизм порядка 2 или 3, связанный с нетривиальной симметрией диаграммы Дынкина системы корней группы $\mathbb{G}$). Предположим, что τ перестановочен с σ. Тогда τ индуцирует автоморфизм группы G, который принято обозначать той же буквой, $G \rtimes \langle\tau\rangle = (\mathbb{G} \rtimes \langle\tau\rangle)_\sigma$ и, за конечным числом исключений,

$(G \rtimes \langle\tau\rangle)/Z(G)$ — расширение простой группы $G/Z(G)$ графовым автоморфизмом (и так можно получить все расширения простых групп лиева типа графовыми автоморфизмами).

Наша цель — посчитать порядки элементов группы $(G \rtimes \langle\tau\rangle)/Z(G)$, и в случае, когда τ полупрост, мы используем ту же идею с централизаторами полупростых элементов: если g — полупростой элемент из смежного класса τG, то $C_{G\rtimes\langle\tau\rangle}(g) = (C_{\mathbb{G}\rtimes\langle\tau\rangle}(g))_\sigma$ и $(C_{\mathbb{G}\rtimes\langle\tau\rangle}(g))^\circ = C_{\mathbb{G}}(g)$ — редуктивная подгруппа группы $\mathbb{G}$; строение этих редуктивных групп описано в работе Ф. Диня и Ж. Мишеля [4], и затем мы переходим к конечным группам в духе Картера. Хотя эту идею можно использовать для любых простых групп лиева типа, основной интерес она представляет для исключительных групп, поскольку в случае классических групп группа $(G\rtimes\langle\tau\rangle)/Z(G)$ имеет естественное матричное представление и порядки элементов проще считать в этом представлении. В докладе будет представлено воплощение этой идеи для исключительных групп лиева типа, имеющих графовые автоморфизмы, т.е. для групп $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ и ${}^3D_4(q)$.

Список литературы

[1] R. Steinberg. Endomorphisms of linear algebraic groups. Mem. Amer. Math. Soc. **80**, 1968.
[2] А.А. Бутурлакин. Спектры групп $E_8(q)$. Алгебра и логика **57** (2018), 3–13.
[3] R.W. Carter. Centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **37**, 1978, 491–507.
[4] F. Digne, J. Michel. Quasi-semisimple elements. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **116**, 2018, 1301–1328.

Стабилизаторы однородных локально нильпотентных дифференцирований

П.И. Евдокимова, Д.А. Чунаев
МГУ им. М.В. Ломоносова, НИУ ВШЭ, Москва, Россия
polina.evdokimova@math.msu.ru, dchunaev@hse.ru

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Рассмотрим аффинное алгебраическое многообразие X с алгеброй регулярных функций $B := \mathbb{K}[X]$. Обозначим через $\mathrm{LND}(B)$ множество всех локально нильпотентных дифференцирований (ЛНД) алгебры B, то есть таких дифференцирований $\delta\colon B \to B$, что для любого $f \in B$ найдётся такое натуральное число n, что $\delta^n(f) = 0$.

Существует естественное действие группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(B)$ алгебры B на $\mathrm{LND}(B)$ сопряжениями. Обозначим стабилизатор ЛНД δ при этом действии через $\mathrm{Aut}_\delta(B)$. Ранее изучались стабилизаторы ЛНД на некоторых классах многообразий, например, в [4] были описаны стабилизаторы простых дифференцирований на алгебре многочленов от двух переменных, в [1] изучались стабилизаторы ЛНД на поверхностях Данилевского, а в [3] были найдены стабилизаторы ЛНД на некоторых почти жестких многообразиях.

Рассмотрим естественный гомоморфизм ограничения

$$\Theta\colon \mathrm{Aut}_\delta(B) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Ker}(\delta)).$$

В работе [2] доказано, что $\mathrm{Ker}(\Theta)$ совпадает с группой $\mathcal{U}(\delta)$ — подгруппой в $\mathrm{Aut}(B)$, состоящей из экспонент всех ЛНД, эквивалентных δ. В докладе будет представлен способ описания $\mathrm{Aut}_\delta(B)$, основанный на вычислении $\mathrm{Im}(\Theta)$.

Если для δ нет коммутирующих с ним, но не эквивалентных ему ЛНД, то назовем δ максимальным. Используя технику, аналогичную технике работы [5], можно показать, что все максимальные торы в группе $\mathrm{Aut}_\delta(B)$ сопряжены с помощью экспоненты некоторого ЛНД. Таким образом удается описать $\mathrm{Aut}_\delta(B)$ однородных максимальных ЛНД на торических многообразиях и некоторых триномиальных гиперповерхностях. Также в работе в комбинаторном виде дан критерий максимальности однородного ЛНД на нормальном торическом многообразии и описаны однородные максимальные ЛНД на некоторых триномиальных гиперповерхностях.

Список литературы

[1] R. Baltazar, M. Veloso. On isotropy group of Danielewski surfaces. Commun. Algebra **49** (2021), no. 3, 1006–1016.
[2] N. Dasgupta, S. Gaifullin, A. Lahiri. Isotropy subgroups of locally nilpotent derivations, in preparation.
[3] N. Dasgupta, A. Lahiri. Isotropy subgroups of some almost rigid domains. J. of Pure and Appl. Algebra **227** (2023), article 107250.
[4] L.G. Mendes, I. Pan. On plane polynomial automorphisms commuting with simple derivations. J. Pure Appl. Algebra **221** (2016), no. 4, 875–882.
[5] A. Perepechko, A. Regeta. When is the automorphism group of an affine variety nested? Transform. Groups **28** (2023), 401–412.

Простые алгебры Новикова

В.Н. Желябин[1], А.П. Пожидаев[1], А.С. Захаров[1,2]
[1]Институт математики СО РАН им. Соболева, Новосибирск, Россия
[2]Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия
app@math.nsc.ru (А.П. Пожидаев), antzakh@gmail.com (А.С. Захаров), vicnic@math.nsc.ru (В.Н. Желябин)

Алгебры Новикова появились в работе И.М. Гельфанда и И.Я. Дорфман и в работе А.А. Балинского и С.П. Новикова. Изучением простых алгебр Новикова занимались В.Т. Филиппов, Е.И. Зельманов. Большой прорыв был сделан в работах Дж.М. Осборна и С. Су. В частности, они классифицировали конечномерные алгебры Новикова в характеристике $p > 2$. Как оказалось, эти алгебры получаются с помощью конструкции Гельфанда–Дорфман над алгебрами усеченных полиномов.

Конструкция Гельфанда–Дорфман состоит в следующем. Пусть A — ассоциативная, коммутативная алгебра с дифференцированием d и выделенным элементом λ. Тогда операция

$$a \circ b = ad(b) + \lambda ab$$

задает структуру алгебры Новикова.

В работе [1] был предложен новый подход к изучению алгебр Новикова. А именно, была установлена связь между алгебрами Новикова и алгеброй правых умножений.

Пусть R_a — оператор правого умножения в алгебре Новикова N, то есть $R_a(x) = x \circ a$, и R — подалгебра $\operatorname{End} N$, порожденная элементами вида R_a. Аналогично определяются операторы левых умножений L_a и алгебра L, а также алгебра M, порожденная операторами из R и L. Отображение d_x, определенное правилом $d_x(u) = [L_x, u]$ — дифференцирование алгебры R, где L_x — оператор левого умножения и $[\cdot\,,\cdot]$ — коммутатор в R. Множество таких дифференцирований обозначим D_N.

Теорема 1. Пусть N — неассоциативная конечномерная простая алгебра Новикова над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики. Тогда радикал J алгебры R не равен нулю, R содержит единицу M, R является D_N простой и $R/J \cong F$.

Теорема 2. Пусть N — неассоциативная конечномерная простая алгебра Новикова над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики. Тогда существуют такие элементы $x, y \in N$, что отображение $\varphi\colon N \to R$, определенное правилом $\varphi(z) = d_z(R_y)$, будет изоморфизмом алгебры Новикова N и алгебры Новикова, полученной из алгебры R с помощью конструкции Гельфанда–Дорфман для дифференцирования d_x и элемента R_x.

В частности, был закрыт вопрос в характеристике 2. В работе [2] был доказан аналогичный результат и для произвольных полей.

Развивая идеи этих работ, в [3] удалось показать, что всякая алгебра Новикова допускает на своем носителе структуру алгебры Новикова–Пуассона.

Теорема 3. Пусть $\langle A, \circ\rangle$ — неассоциативная простая алгебра Новикова. Тогда умножение $a \cdot_y b = (a, b, y)$ для некоторого $y \in A$ ассоциативно, $\langle A, \cdot_y, \circ\rangle$ — алгебра Новикова–Пуассона. Если $A \cdot_y A = A$, то $\langle A, \cdot_y\rangle$ — унитальна, дифференциально проста относительно $d = -D_{1,1}$, где $D_{a,b}(x) = ax \circ b - a \circ xb$ и $\langle A, \circ\rangle$ получается конструкцией Гельфанда–Дорфман с помощью d и элемента $1 \circ 1$.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект 25–41–00005).

Список литературы

[1] V.N. Zhelyabin, A.S. Zakharov. On finite-dimensional simple Novikov algebras of characteristic p. Siberian Mathematical Journal **65** (2024), no. 3, 680–687. DOI: 10.1134/S0037446624030169.

[2] A.P. Pozhidaev, V.N. Zhelyabin. On simple and semisimple finite-dimensional Novikov algebras and their automorphisms, Journal of Algebra **689** (2026), 1–26.

[3] A.P. Pozhidaev, A.S. Zakharov, V.N. Zhelyabin. Embedding of Novikov algebras into Novikov–Poisson algebras, Witt doubles, isomorphisms of simple Novikov algebras, in print.

О B-корневых подгруппах на сферических многообразиях, сдвигающих замыкания G-орбит

В.С. Жгун

МФТИ, НИИСИ РАН, НИУ ВШЭ, Москва, Россия

zhgoon@mail.ru

Пусть G — связная редуктивная группа над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики. И пусть X — сферическое G-многообразие, то есть многообразие, для которого борелевская подгруппа B группы G имеет открытую орбиту. В докладе мы обсудим, в каких случаях B-нормализованное

$\mathbb{G}_a$-действие (B-корневая подгруппа) может сдвигать замыкания G-орбит, а также дадим условия того, что данная корневая подгруппа сохраняет замыкание G-орбиты. А именно, мы обсудим следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть X — аффинное сферическое G-многообразие и пусть $\partial X \subset X$ замкнутое G-подмногообразие. Пусть Y — G-орбита, содержащаяся в множестве регулярных точек X^{reg} и не лежащая в ∂X. Тогда для любой минимальной G-орбиты Y', содержащей орбиту Y в своем замыкании и не совпадающей с ней, существует B-корневая подгруппа на X, сохраняющая границу ∂X и соединяющая Y с Y'.*

Теорема 2. *Пусть X — квазиаффинное сферическое G-многообразие и пусть R — B-корневая подгруппа, действующая на X. Пусть $Y \subset X^{\mathrm{reg}}$ такая G-орбита, что все B-инвариантные простые дивизоры на X, не содержащие Y, инвариантны относительно R. Пусть R соединяет Y с некоторой G-орбитой Y', такой что $Y \subset \overline{Y'}$. Тогда $RY = Y \cup Y'$ и Y' является минимальной по включению среди орбит не равных Y, удовлетворяющих $Y \subset \overline{Y'}$.*

Стоит отметить, что обычно в определении сферических многообразий подразумевается нормальность, однако в упомянутых теоремах нормальность не требуется. Также мы обсудим необходимое и достаточное комбинаторное условие, которое нужно наложить на вес B-корневой подгруппы, чтобы она сохраняла замыкание данной G-орбиты.

Доклад основан на совместных работах с Р. С. Авдеевым [2], [3], [4].

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, R. Avdeev. Root subgroups on affine spherical varieties. Selecta Math. (N.S.) **28** (2022), no. 3, article 60.

[2] R.S. Avdeev, V.S. Zhgoon. On the existence of B-root subgroups on affine spherical varieties. Dokl. Math. **105** (2022), no. 2, 51–55.

[3] R. Avdeev, V. Zhgoon. Root subgroups on horospherical varieties, arXiv: `math.AG/2312.03377` (2023).

[4] R. Avdeev, V. Zhgoon. Connecting G-orbits in quasiaffine spherical varieties via B-root subgroups, arXiv: `math.AG/2512.09906`.

О суперпозициях частных дифференцирований Фокса

В.С. Задворнов
Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия
v.zadvornov@g.nsu.ru

В 40-х годах двадцатого века Ральф Фокс [1] ввёл понятие *свободного дифференцирования*. Для ознакомления с теорией дифференцирований Фокса рекомендуем, например, монографии [2] и [3].

Пусть $\mathbb{Z}[F]$ — групповое кольцо свободной группы F над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. *Дифференцированием Фокса* называется любое отображение $D\colon \mathbb{Z}[F] \to \mathbb{Z}[F]$, удовлетворяющее для любых $\nu, \eta \in \mathbb{Z}[F]$ соотношениям

- $D(\nu + \eta) = D(\nu) + D(\eta)$,
- $D(\nu\eta) = D(\nu) \cdot \rho(\eta) + \nu \cdot D(\eta)$,

где $\rho\colon \mathbb{Z}[F] \to \mathbb{Z}$ — гомоморфизм группового кольца, называемый *тривиализацией*, который каждому элементу группового кольца сопоставляет сумму его коэффициентов. Если элементы ν и η из свободной группы, то второе соотношение принимает вид $D(\nu\eta) = D(\nu) + \nu \cdot D(\eta)$.

Если F_r — свободная группа ранга r и $X = \{x_1, \dots, x_r\}$ — её базис, то для каждого $i = \overline{1, r}$ существует единственное дифференцирование D_{x_i} (называемое *частным дифференцированием по переменной* x_i), удовлетворяющее условиям

$$D_{x_i}(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Также для каждого $i = \overline{1, r}$ существует единственное *частное дифференцирование по переменной* x_i^{-1}, обозначаемое $D_{x_i^{-1}}$, для которого $D_{x_i^{-1}}(x_i^{-1}) = 1$, и значение на любом элементе x_j, $j \neq i$, равно нулю.

Для удобства введём обозначение. Если $x_i \in X$, то $\sigma_i(v), v \in F_r$, означает сумму показателей степеней, в которых переменная x_i входит в слово v. Также через $F_r'(i)$ обозначим множество всех слов $v \in F_r$, для которых $\sigma_i(v) = 0$ ($i = \overline{1, r}$). Заметим, что если F_r' — коммутант группы F_r, то $F_r' = \bigcap\limits_{i=1}^{r} F_r'(i)$, т.е. коммутант F_r' состоит из всех слов v, для которых $\sigma_i(v) = 0$ для любого $i = \overline{1, r}$. Через $D_{x_i}^{\varepsilon(\overline{1,m})}, \varepsilon(\overline{1, m}) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m) \in \{\pm 1\}^m$, обозначаем суперпозицию

$$D_{x_i^{\varepsilon_1}} \circ D_{x_i^{\varepsilon_2}} \circ \ldots \circ D_{x_i^{\varepsilon_m}}.$$

Постановка задачи. Пусть задана некоторая суперпозиция $D = D_{x_i}^{\varepsilon(\overline{1,m})}$ частных дифференцирований по x_i и по x_i^{-1}. Требуется описать все слова $v \in F_r$, аннулируемые данной суперпозицией, т.е. для которых $D(v) = 0$.

Следующий результат является ключевым.

Предложение. Пусть $v \in F_r, x_i \in X$, причём $\sigma_i(v) = 0$. Тогда любая суперпозиция $D = D_{x_i}^{\varepsilon(\overline{1,m})}$ частных дифференцирований по x_i или по x_i^{-1}, применённая к слову v, даёт элемент с суммой коэффициентов, равной нулю, т.е. $\rho(D(v)) = 0$.

Нетрудно убедиться, что суперпозиция частных дифференцирований по x_i и по x_i^{-1} не является дифференцированием. Однако, имеет место

Теорема 1. Для любых $x_i \in X$ ограничение произвольной суперпозиции $D = D_{x_i}^{\varepsilon(\overline{1,m})}$ на подгруппу $F_r'(i)$ (а также на коммутант F_r') определяет дифференцирование Фокса группового кольца $\mathbb{Z}[F_r'(i)]$ (соответственно $\mathbb{Z}[F_r']$).

Результат, сформулированный в следующей теореме, отвечает на вопрос в постановке задачи.

Теорема 2. Пусть F_r – свободная группа, x_i – её порождающий и $D = D_{x_i}^{\varepsilon(\overline{1,m})}$ – суперпозиция частных дифференцирований по x_i или по x_i^{-1}. Положим k равным количеству единиц в кортеже $\varepsilon(\overline{1, m-1})$, а l равным количеству минус единиц. Тогда произвольное слово $v \in F_r$, записанное в виде

$$v = g_0 x^{\alpha_1} g_1 \dots x^{\alpha_n} g_n,\ \alpha_i \neq 0,\ g_i \text{ не содержат } x_i,$$

аннулируется суперпозицией D тогда и только тогда, когда выполнена система неравенств

$$\begin{cases} -l \leq \alpha_n \leq k, \\ -l \leq \alpha_n + \alpha_{n-1} \leq k, \\ \qquad \vdots \\ -l \leq \alpha_n + \alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_2 \leq k, \\ -l \leq \alpha_n + \alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_2 + \alpha_1 \leq k. \end{cases}$$

Список литературы

[1] R.H. Fox. Free differential calculus I — Derivation in the free group ring. Ann. Math. **57** (1953), 547–560.

[2] R.H. Crowell, R.H. Fox. Introduction to knot theory. Springer Verlag, New York, 1963.

[3] V.A. Roman'kov. Essays in algebra and cryptology. Solvable groups. Omsk, Dostoevsky Omsk State Uiversity, 2017.

Гипотеза Айзекса для конечных унипотентных групп

М.В. Игнатьев
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
mihail.ignatev@gmail.com

Пусть U — унипотентная аффинная алгебраическая группа над конечным полем $\mathbb{F}_q$ достаточно большой характеристики, $\mathfrak{n}$ — её алгебра Ли, $\mathfrak{n}^*$ — двойственное к ней пространство. Согласно методу орбит Кириллова [4], орбиты коприсоединённого действия группы U на пространстве $\mathfrak{n}^*$ находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми конечномерными комплексными представлениями группы U.

В 1960 г. Г. Хигман [1] сформулировал гипотезу о количестве коприсоединённых орбит, которая в 2007 г. была усилена И.М. Айзексом [3]. Усиленная версия гипотезы звучит так: количество орбит данной размерности является многочленом от $q-1$ с целыми неотрицательными коэффициентами. К настоящему моменту гипотеза проверена в ряде важных случаев, см. обзор в [2, Section 10].

Недавно мы с М.С. Венчаковым получили классификацию орбит максимальной и предмаксимальной размерности для максимальной унипотентной подгруппы в конечной классической группе типа C_n, а также классификацию орбит максимальной размерности для типов B_n и D_n. Это позволяет доказать гипотезу Айзекса для орбит указанных размерностей. Я расскажу об этих результатах, а также о новых результатах о выполнении гипотезы Айзекса для других классов унипотентных групп.

Список литературы

[1] G. Higman. Enumerating p-groups. I. Inequalities. Proc. London Math. Soc. (3) **10** (1960), 24–30.

[2] M. Ignatev, A. Petukhov. Coadjoint orbits of low dimension for nilradicals of Borel subalgebras in classical types, arXiv: math.RT/2507.20332 (2025).

[3] I.M. Isaacs. Counting characters of upper triangular groups. J. Algebra **315** (2007), 698–719.

[4] A.A. Kirillov. Unitary representations of nilpotent Lie groups. Russian Math. Surveys **17** (1962), 53–110.

Подпространства Бете и чудесная компактификация

А.И. Ильин
МФТИ, Москва, Россия
alex_omsk@211.ru

Мы определяем коммутативные подпространства гамильтонианов Бете в тригонометрической алгебре Ли голономий, аналогично гамильтонианам Годена в рациональной алгебре голономий, определенным Aguirre–Felder–Veselov [1]. Затем мы обсудим основной результат — всевозможные пределы подпространств Бете параметризуются минимальной чудесной компактификацией дополнения тора до набора корневых подторов. Доклад будет следовать препринту [2].

Список литературы

[1] L. Aguirre, G. Felder, A. Veselov. Gaudin subalgebras and wonderful models. Selecta Mathematica (N.S.) **22** (2016), no. 3, 1057–1071.
[2] A. Ilin, L. Rybnikov. Bethe subspaces and wonderful models for toric arrangements, arXiv: math.AG/2512.23478 (2025).

Гибкость орисферических многообразий

В.В. Киктева
НИУ ВШЭ, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
VVKikteva@yandex.ru

Доклад основан на совместной с С.А. Гайфуллиным работе [7].

Далее $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики и $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$ — его аддитивная группа. Алгебраическое многообразие X называется *гибким*, если касательное пространство в каждой его регулярной точке порождено касательными векторами к орбитам регулярных действий группы $\mathbb{G}_a$. Для неприводимого аффинного многообразия X размерности не меньше 2 гибкость эквивалентна транзитивности, а также бесконечной транзитивности действия $\mathrm{SAut}(X)$ на множестве гладких точек, см. [4, Theorem 0.1]. Здесь под $\mathrm{SAut}(X)$ подразумевается *группа специальных автоморфизмов* многообразия X, то есть подгруппа в группе автоморфизмов, порождённая всеми алгебраическими подгруппами, изоморфными аддитивной группе поля $\mathbb{G}_a$.

Многие известные классы многообразий являются гибкими. К примеру, работа [5] содержит три класса гибких многообразий. Первый класс образуют нормальные аффинные конусы над многообразиями флагов, второй — невырожденные нормальные торические многообразия, третий — итерированные надстройки над гибкими аффинными многообразиями. Также некоторые результаты о гибкости получены для векторных расслоений, аффинных конусов над проективными многообразиями, универсальных торсоров, поверхностей Гизатуллина, пространств Калоджеро–Мозера. Подробнее об этом см. в обзоре [6].

Неприводимое многообразие называется *орисферическим*, если оно допускает такое действие связной линейной алгебраической группы G, что стабилизатор точки общего положения содержит максимальную унипотентную подгруппу G. Мы говорим, что орисферическое многообразие имеет *сложность* 0, если действие группы G на X имеет открытую орбиту O. Отметим, что в данном определении мы не требуем нормальности X. Более подробную информацию об орисферических многообразиях можно найти в работе [2]. Далее мы подразумеваем, что орисферические многообразия имеют сложность 0.

Невырожденные нормальные аффинные орисферические многообразия всегда гибкие, см. [8]. Здесь под невырожденностью подразумевается отсутствие обратимых регулярных функций кроме констант. Также в работе [3] доказана гибкость не обязательно нормальных орисферических многообразий с действием полупростой группы. Если мы отказываемся от требования нормальности, появляются примеры не гибких многообразий, критерий гибкости произвольных торических многообразий был найден в [1]. В настоящем докладе мы обсудим критерий гибкости не обязательно нормальных аффинных орисферических многообразий с действием произвольной группы, обобщающий данные результаты.

Доклад подготовлен в ходе проведения исследования в рамках проекта «Международное академическое сотрудничество» НИУ ВШЭ.

Список литературы

[1] И.А. Болдырев, С.А. Гайфуллин. Автоморфизмы ненормальных торических многообразий. Матем. заметки **110** (2021), no. 6, 837–855.

[2] Э.Б. Винберг, В.Л. Попов. Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий. Изв. АН СССР. Сер. матем. **36** (1972), no. 4. 749–764.

[3] А.А. Шафаревич. Гибкость S-многообразий полупростых групп. Матем. сб. **208** (2017), no. 2, 121–148.

[4] I. Arzhantsev, H. Flenner, Sh. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. **162** (2013), no. 4,

767–823.
[5] I. Arzhantsev, M. Zaidenberg, K. Kuyumzhiyan. Flag varieties, toric varieties, and suspensions: three examples of infinite transitivity. Sb. Math. **203** (2012), no. 7–8, 923–949.
[6] I. Arzhantsev. Automorphisms of algebraic varieties and infinite transitivity. St. Petersburg Math. J. **34** (2023), no. 2, 143–178.
[7] S. Gaifullin, V. Kikteva. Flexibility criterion for affine horospherical varieties, arXiv: `math.AG/2511.18219` (2025).
[8] S. Gaifullin, A. Shafarevich. Flexibility of normal affine horospherical varieties. Proc. Amer. Math. Soc. **147** (2019), no. 8, 3317–3330.

Левые идеалы и центры алгебр Новикова

Н.В. Котенков
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
`n.kotenkov@g.nsu.ru`

Алгебра A называется *алгеброй Новикова*, если в ней для любых $x, y, z \in A$ выполнены соотношения

$$(x, y, z) = (y, x, z), \quad (xy)z = (xz)y,$$

где $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$. Алгебры Новикова впервые появились в формальном вариационном исчислении [1].

Алгебра над полем называется **полупервичной**, если для любого её ненулевого идеала I верно $I^2 \neq 0$. Алгебра над полем называется **первичной**, если для любых её ненулевых идеалов I, J верно, что $IJ \neq 0$.

В любой алгебре A можно определить ассоциативный центр $N(A)$ и центр $Z(A)$ следующим образом:

$$N(A) = \{n \in A \mid (n, A, A) = (A, n, A) = (A, A, n) = 0\},$$
$$Z(A) = \{z \in N(A) \mid za = az \ \forall a \in A\}.$$

Известно, что в ассоциативной полупервичной алгебре ассоциативный центр и центр любого идеала наследуются со всей алгебры. Для алгебр Новикова удалось доказать аналогичный результат.

Теорема 1. Пусть A — полупервичная алгебра Новикова и I — идеал алгебры A. Тогда

$$N(I) = N(A) \cap I, \quad Z(I) = Z(A) \cap I.$$

Также известно, что в ассоциативной первичной алгебре любой идеал является первичной алгеброй. Для алгебр Новикова был доказан следующий результат.

Теорема 2. Пусть A — первичная неассоциативная алгебра Новикова, J — её левый идеал. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- $A \cdot J = 0$, то есть $J \subseteq \mathrm{Ann}_r(A)$;
- J является первичной неассоциативной алгеброй Новикова.

Список литературы

[1] И.М. Гельфанд, И.Я. Дорфман. Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры. Функц. анализ и его прил. **13** (1979), no. 4, 13–30.

Базисы ассоциированных модулей Галуа в общих дико разветвленных расширениях и в элементарных абелевых расширениях степени p^2

К.С. Ладный
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
kiriladny@gmail.com

Доклад основан на работе автора [1].

Данная работа посвящена исследованию ассоциированных модулей и порядков Галуа для вполне разветвленных расширений полей дискретного нормирования. Основное внимание уделяется явным вычислениям и построению базисов для этих модулей, в частности в случае элементарных абелевых расширений степени p^2. Авторы вводят и развивают теорию градуированно-независимых множеств и диагональных базисов, которые позволяют явно описывать модули $\mathfrak{A}_i$ и соответствующие ассоциированные порядки. Центральный результат работы

(Часть) теоремы 3.3.2, [1]. Пусть K_i/k, $i = 1, 2$ — вполне разветвленные расширения Галуа локальных полей степени p с различными ненулевыми по модулю p скачками ветвления (без ограничения общности) $h_1 < h_2$, σ_i — соответствующие подъемы образующих групп Галуа, $K = K_1K_2$ — композит этих расширений. Для $0 \le i, j \le p-1$ положим $f_{ij} = (\sigma_1 - 1)^i(\sigma_2 - 1)^j \in k[G]$. Тогда $B = \{f_{ij} :\ 0 \le i, j \le p-1\}$ — градуированный базис K/k.

дает явное описание модулей $\mathfrak{A}_i$ для расширений с группой Галуа $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ и различными по модулю p^2 скачками ветвления.

В работе исследованы свойства введенных конструкций, в том числе их поведение относительно подъема на ручные расширения и связь с классическими ассоциированными порядками. Полученные результаты обобщаются на случай относительных ассоциированных модулей $\mathfrak{A}_i^0 = \mathfrak{A}_i \cap k_0[G]$, где $k_0 \subset k$. В работе используется глубоко исследованный ранее Михаилом Владимировичем Бондарко изоморфизм между $K \otimes_k K$ и $K[G]$, и представлен детальный анализ фильтраций на тензорных квадратах и их связи со структурой модулей Галуа. Результаты представляют интерес для специалистов по теории чисел и арифметической геометрии.

Список литературы

[1] M. Bondarko, K. Ladny, K. Pimenov. Bases of associated Galois modules in general widely ramified extensions and in elementary abelian extensions of degree p^2. Chebyshevskii Sbornik, 2025.

Отображения комплексных и вещественных матриц, сохраняющие пучковое условие для вырожденности

А.М. Максаев, В.В. Промыслов
ФКН НИУ ВШЭ, Москва, Россия
amaksaev@hse.ru, vpromyslov@hse.ru

В 1949 году Дьёдонне [1] доказал, что если $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ — линейная биекция, сохраняющая множество вырожденных матриц, то T имеет стандартный вид на $M_n(\mathbb{F})$, т. е. $T(A) = PAQ$ или $T(A) = PA^TQ$ для всех $A \in M_n(\mathbb{F})$, где P, Q — невырожденные матрицы. Позднее были получены многочисленные обобщения этой теоремы, см. например [2], [3], [4], [5].

Впоследствии, в 2020 году, Костара [6] обобщил результат Дьёдонне для таких отображений φ_1 и φ_2 на алгебре матриц размера $n \times n$ над $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, что по крайней мере одно из отображений φ_1, φ_2 является непрерывным или сюръективным и выполнено условие

$$\det(\lambda A + B) = 0 \iff \det(\lambda\varphi_1(A) + \varphi_2(B)) = 0 \quad \forall A, B \in M_n, \forall \lambda \in \mathbb{F}. \quad (1)$$

Его техника существенно опиралась на топологические свойства поля комплексных чисел. Мы представим аналогичный результат для произвольного алгебраически замкнутого поля $\mathbb{F}$ и любых отображений φ_1, φ_2 (не обязательно непрерывных или сюръективных), удовлетворяющих условию (1). В докладе мы обсудим доказательство результата над любым алгебраически замкнутым полем, основанное на статье [7], а также новые идеи, позволившие обобщить его на поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

Наша техника существенно отличается от техники Костары и состоит в рассмотрении матриц с полным (или простым) спектром, т. е. $n \times n$ матриц, имеющих ровно n различных собственных значений (комплексных или вещественных, в зависимости от постановки задачи). А именно, оказывается, что под действием группы GL_n левыми сдвигами любое конечное множество невырожденных матриц может быть преобразовано в множество, все матрицы которого имеют полный спектр. В докладе мы обсудим этот факт, представляющий независимый интерес, и его связь с исходной задачей.

Список литературы

[1] D.J. Dieudonné. Sur une généralisation du groupe orthogonal á quatre variables. Arch. Math. **1** (1949), 282–287.
[2] P. Botta. Linear maps that preserve singular and nonsingular matrices. Linear Algebra Appl. **20** (1978), 45–49.
[3] A. Fošner, P. Šemrl. Additive Maps on Matrix Algebras Preserving Invertibility or Singularity. Acta Math Sinica **21** (2005), 681–684.
[4] V. Tan, F. Wang. On determinant preserver problems. Linear Algebra Appl. **369** (2003), 311–317.
[5] C. de Seguins Pazzis. The singular linear preservers of non-singular matrices. Linear Algebra Appl. **433** (2010), 483–490.
[6] C. Costara. Nonlinear invertibility preserving maps on matrix algebras. Linear Algebra Appl. **602** (2020), 216–222.
[7] A.E. Guterman, A.M. Maksaev, V.V. Promyslov. Pairs of maps preserving singularity on subsets of matrix algebras. Linear Algebra Appl. **644** (2022), 1–27.

Множества раздела орбит полярных представлений компактных групп Ли

М.В. Мещеряков
НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, Россия
1953mmv@mail.ru

Множества раздела единичного элемента в компактной простой группе Ли, снабженной биинвариантной римановой метрикой, исследовались уже в классических работах Э. Картана по геометрии групп Ли и симметрических пространств [1]. Понятие множества раздела (cut locus) точки было введено

А. Пуанкаре и затем было обобщено на случай подмногообразий римановых многообразий.

Э. Картан свел задачу описания множества раздела к задаче о метрической геометрии альковов диаграмм Штифеля симметрических пространств. В случае решеток полупростых групп Ли задача свелась к анализу метрических свойств областей Вороного их характеристических решеток (см. [2]). Для односвязных компактных групп Ли известно явное описание соответствующих областей Вороного (см. [3]) в терминах систем корней и геометрии орбит групп Вейля. Для неодносвязных групп Ли и римановых симметрических пространств задача о строении множества раздела изучалась в последние десятилетия в ряде работ. Полностью она решена только для эрмитовых симметрических пространств и некоторых других частных классов римановых симметрических пространств, называемых R-пространствами.

Определенные задачи топологического анализа данных привели к постановке вопроса о строении множеств раздела подмногообразий римановых пространств постоянной кривизны. Особый интерес в связи с геометрией орбит линейных действий компактных групп Ли G на вещественном векторном пространстве представляет выяснение строения их множеств раздела по отношению к G-инвариантным евклидовым метрикам. В модельном примере присоединенного представления полупростой компактной группы оказывается, например, что множество раздела орбит общего положения совпадает с множеством нерегулярных элементов алгебры Ли группы.

Наши основные результаты, обобщая это наблюдение, описывают строение множеств раздела орбит представлений изотропии римановых симметрических пространств. Ответ дается в терминах их систем корней и геометрии орбит групп Вейля. Найдена стратификация множества раздела вещественными полуалгебраическими множествами. Кроме того, получено описание разложения Вороного пространства представления на области Вороного точек, принадлежащих орбите.

Сформулируем это более точным образом. Пусть (G, K) — риманова симметрическая пара. Обозначим через W группу Вейля компактного симметрического пространства G/K и через $\mathcal{A}$ его подпространство Картана. Пусть, далее, $\mathfrak{G} = k + m$ — разложение Картана алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы G. Ограничение присоединенного представления группы G на подгруппу изотропии K при её действии на пространстве m есть представление изотропии пространства G/K.

Наконец, если N — подмногообразие евклидова пространства R^n, то область (ячейка) Вороного $Vor_N(y)$ состоит из всех тех точек u пространства

R^n, что точка $y \in N$ есть ближайшая к u точка по сравнению с другими точками $x \in N$.

Теорема 1. Ячейка Вороного $Vor_{O_\lambda}(\lambda)$ орбиты O_λ представления изотропии полупростого риманова симметрического пространства есть орбита нормального конуса вершины λ многогранника $convW\lambda$ в одном из подпространств Картана, содержащих λ, при действии на него стабилизатора K_λ в группе K точки λ орбиты.

Теорема 2. a) Множество раздела $Cut(O_\lambda)$ орбиты O_λ в пространстве представления изотропии m есть объединение орбит тех точек подпространства Картана $\mathcal{A}$ при действии группы K на m, которые принадлежат границе нормального конуса в вершине λ выпуклой оболочки $convW\lambda$ орбиты $W\lambda$.

b) Разбиение границы нормального конуса вершины λ на грани меньшей размерности порождает соответствующую стратификацию полуалгебраического множества $Cut(O_\lambda)$ на полуалгебраические страты, которые суть орбиты указанных граней нормального конуса при действии на них группы K.

Сформулированные выше результаты непосредственно связаны с работой [4], где было явно вычислено расстояние между орбитами и их множествами раздела для рассмотренных здесь представлений изотропии. Отметим, что теоремы 1 и 2 являются в некотором смысле аналогами известной в матричном анализе теоремы Эккарта–Юнга [5].

Список литературы

[1] Э. Картан. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М.: Изд-во иностранной литературы, 1949.

[2] С. Хелгасон. Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства, Факториал, М.: Факториал, 2005.

[3] Дж. Конвей, Н. Слоен. Упаковки шаров, решетки и группы. М.: Мир, 1990.

[4] М.В. Мещеряков. Критические радиусы орбит представлений изотропии римановых симметрических пространств, Алгебра и анализ **36** (2024), no. 6, 112–121.

[5] Р. Хорн, Ч. Джонсон. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

Инвариантные комплексные структуры и когомологии нильмногообразий

Д.В. Миллионщиков
МГУ им. М.В. Ломоносова,
РГУНГ (НИУ) имени И.М. Губкина, Москва, Россия
dmitry.millionschikov@math.msu.ru

Мы рассматриваем левоинвариантные комплексные структуры на вещественных нильпотентных группах Ли или, что то же самое, интегрируемые комплексные структуры на вещественных нильпотентных алгебрах Ли. Левоинвариантная комплексная структура на односвязной нильпотентной группе Ли G определит также левоинвариантную комплексную структуру и на нильмногообразии G/Γ, если группа Ли G содержит кокомпактную решетку Γ. В качестве основного инструмента для классификации вещественных нильпотентных алгебр Ли (нильмногообразий), допускающих интегрируемую (левоинвариантную) комплексную структуру, предлагается специализированная минимальная модель $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}^J$ нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (нильмногообразия G/Γ) с комплексной структурой J [2], [3].

Известно, что комплекс де Рама нильмногообразия $\Lambda^*(G/\Gamma)$ можно отождествить с подкомплексом $\Lambda^*_\Gamma(G) \subset \Lambda^*(G)$ левоинвариантных дифференциальных форм на группе Ли G по отношению к действию решетки Γ. В свою очередь в $\Lambda^*_\Gamma(G)$ можно выделить подкомплекс $\Lambda^*_G(G)$ форм, инвариантных относительно левого действия всей группы Ли G. Комплекс $\Lambda^*_G(G)$ естественно изоморфен коцепному комплексу $\Lambda^*(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Классическая теорема Номидзу утверждает, что включение $\psi : \Lambda^*(\mathfrak{g}) \to \Lambda^*(G/\Gamma)$ индуцирует кольцевой изоморфизм в когомологиях $\psi^* : H^*(\mathfrak{g}) \to H^*(G/\Gamma, \mathbb{R})$. В работе [1] был сформулирован вопрос (гипотеза) о существовании канонического изоморфизма в духе теоремы Номидзу

$$H^{p,q}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, J) \cong H^{p,q}(G/\Gamma, \bar{\partial}), \tag{1}$$

где $H^{p,q}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, J)$ — когомологии Дольбо комплексификации $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с интегрируемой комплексной структурой J, а $H^{p,q}(G/\Gamma, \bar{\partial})$ — когомологии Дольбо нильмногообразия G/Γ с левоинвариантной комплексной структурой J. Мы обсудим современное состояние дел в этом вопросе.

Доклад основан на работах автора [2], [3].

Список литературы

[1] L.A. Cordero, M. Fernandez, A. Gray, L. Ugarte. Compact nilmanifolds with nilpotent complex structures: Dolbeault cohomology. Trans. Amer. Math. Soc.

352 (2000), no. 2, 5405–5433.
[2] Д.В. Миллионщиков. Минимальная модель нильмногообразия и пространство модулей комплексных структур. Труды МИАН **325** (2024), 201–231.
[3] Д.В. Миллионщиков. Узкие алгебры Ли и интегрируемые комплексные структуры. Труды МИАН **329** (2025), 165–189.

Ограничение представлений $GL(n)$ на $GL(n-1)$ и дифференциально-разностные операторы

Ю.А. Неретин
ВШМ МФТИ, Москва, Россия
hepetuh@yandex.ru

Доклад основан на работе автора [1].

Рассматривается конечномерное неприводимое (голоморфное) представление группы $GL(n,\mathbb{C})$. Оно, как известно, реализуется в некотором пространстве многочленов на пространстве T_n строго верхнетреугольных (унипотентных) матриц (это карта на флаговом многообразии). Мы раскладываем на неприводимые ограничение этого представления на меньшую группу $GL(n-1)$, реализуем ограничение в пространстве функций на $T_{n-1}\times\mathbb{Z}^{n-1}$ и пишем явно формулы для действия полной алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n)$ дифференциально-разностными операторами (порядок дифференцирований по комплексным переменным — $n-2$, разностные операторы действуют по решетке, носитель функций по решетке — конечная область).

Это частный случай такого общего (по-видимому, верного) тезиса. Пусть ограничение (вообще говоря бесконечномерного) унитарного представления классической группы Ли G на подгруппу H допускает явное разложение на неприводимые представления (с идентификацией скалярных произведений). Тогда операторы алгебры Ли большей группы в этом разложении могут быть написаны в явном виде как дифференциально-разностные операторы.

Список литературы

[1] Yu.A. Neretin. Restriction of representations of $GL(n+1,\mathbb{C})$ to $GL(n,\mathbb{C})$ and action of the Lie overalgebra. Algebras and Representation Theory **21**(2018), 1087–1117.

Аффинные моноиды с активной группой обратимых элементов

Е.Д. Нистюк (Преснова)
НИУ ВШЭ
ekaterina.presnova@gmail.com

Пусть X — нормальное неприводимое аффинное алгебраическое многообразие, и пусть дан морфизм

$$X \times X \to X,\ (x, y) \mapsto x * y.$$

Тогда X называется алгебраическим моноидом, если для всех $x, y, z \in X$ выполнено $x*(y*z) = (x*y)*z$ и найдется такая точка $1 \in X$, что $x*1 = 1*x = x$. Группа обратимых элементов G алгебраического моноида X является алгебраической группой и открыта по Зарисскому в X.

Нас интересует случай, когда $G = U \rightthreetimes T$, где T — тор, U — унипотентная группа, полупрямое произведение задается гомоморфизмом $\psi\colon T \to \operatorname{Aut} U$. Полупрямое произведение $G = U \rightthreetimes T$ называется активным, если

$$\dim T + \dim \operatorname{Im} \psi = \dim G.$$

Понятие активного полупрямого произведения было введено в работе [1]; показано, что любой аффинный моноид с активной группой обратимых элементов является аффинным торическим многообразием.

В совместной работе [2] с Ю. Зайцевой мы описали все активные моноиды. Более точно, любой активный моноид строится по конусу σ соответствующего торического многообразия, k-мерной регулярной грани $\tau \subset \sigma$ и некоторому набору корней Демазюра конуса σ. Доклад подготовлен в ходе проведения исследования в рамках проекта «Международное академическое сотрудничество» НИУ ВШЭ.

Список литературы

[1] Yu. Zaitseva. Affine monoids of corank one. Results in Mathematics **79** (2024), no. 7, article 249.
[2] E. Presnova, Yu. Zaitseva. Affine monoids with active group of invertible elements, in preparation.

Инварианты максимальных унипотентных подгрупп

А.Н. Панов
Самарский национальный исследовательский университет имени С.П. Королева, Самара, Россия
apanov@list.ru

Пусть $Q = (V, A)$ — колчан, где V — множество вершин и A — множество ребер. Каждое ребро $\alpha \in A$ имеет начало (source) $s(\alpha)$ и вершину (target) $t(\alpha)$. Сопоставим каждой вершине v натуральное число n_v. Пусть K поле. Каждому ребру α сопоставим линейное пространство $\mathcal{H}_\alpha$ матриц размера $n_{t(\alpha)} \times n_{s(\alpha)}$. Для каждой вершины $v \in V$ определена группа $\mathrm{GL}_v = \mathrm{GL}(n_v)$ с элементами в поле K и ее унитреугольная подгруппа $U_v = \mathrm{UT}(n_v)$, состоящая из всех верхнетреугольных $(n_v \times n_v)$-матриц с единицами на диагонали. Рассмотрим прямое произведение $G = \mathrm{GL}_Q = \prod_{v\in V} \mathrm{GL}_v$, его подгруппу $U = U_Q = \prod_{v\in V} U_v$ и линейное пространство

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_Q = \oplus_{\alpha\in A}\mathcal{H}_\alpha.$$

Группа G действует в пространстве $\mathcal{H}$ по формуле

$$g.h = (g_{t(\alpha)} X_\alpha g_{s(\alpha)}^{-1})_{\alpha\in A}, \quad g = (g_v) \in G, \quad h = (X_\alpha) \in \mathcal{H}.$$

Ставится задача построения сечения для представления группы U в пространстве $\mathcal{H}$ и нахождения системы свободных образующих элементов в поле U-инвариантов $K(\mathcal{H})^U$.

Зафиксируем линейный порядок на множестве ребер A. В докладе будет представлен алгоритм построения сечения представления U в $\mathcal{H}$ и системы свободных образующих элементов в поле U-инвариантов $K(\mathcal{H})^U$.

Доклад основан на работе [3]. Ранее поставленные задачи были решены для случая присоединенного действия на системе матриц (см. [1]) и для случая равноразмерного представления (см. [2]).

Список литературы

[1] A.N. Panov. Fields of U-invariants of matrix tuples. Electronic Journal of Linear Algebra **39** (2023), 117–123.

[2] A.N. Panov. Equidimensional quiver representations and their U-invariants. Journal of Algebraic Combinatorics **61** (2025), article 22.

[3] A.N. Panov. Fields of U-invariants of quiver representations. Linear and Multilinear Algebra, сдана в печать.

Мотивы Чжоу некоторых многообразий Мукаи

В.А. Петров, Д.А. Ривин
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
victorapetrov@gmail.com

Доклад основан на дипломной работе Д.А. Ривина.

Среди многообразий Фано отдельный интерес представляют многообразия с небольшими размерностями когомологий. Мы рассматриваем случай трехмерных многообразий V_5 и V_{22}, которые имеют такие же когомологии, как проективное пространство, и четырехмерное многообразие рода 10, которое имеет такие же когомологии, как четырехмерная квадрика. Поскольку эти многообразия могут иметь деформации, мы фиксируем такое многообразие, которое имеет наибольшую возможную группу автоморфизмов, а именно, PGL_2 для случая V_5 и V_{22} [2] и $GL_2 \rtimes \mathbb{Z}/2$ для случая четырехмерного многообразия, которое в таком случае еще называется многообразием Мукаи–Умемуры [3]. Многообразие Мукаи–Умемуры можно реализовать также как гиперплоское сечение проективного однородного многообразия G_2/P_2 (тогда как G_2/P_1 изоморфно пятимерной квадрике). Из наличия $\mathbb{G}_m$-действия стандартной техникой Бьялыницки–Бируля несложно доказать, что мотив Чжоу этих многообразий раскладывается в сумму мотивов Лефшеца.

Мы рассматриваем скрученные формы этих многообразий над произвольным полем характеристики 0. Их можно еще описать как некоторые гладкие компактификации подходящего PGL_2-торсора (в случае V_5 и V_{22}) или U_2-торсора для случая многообразия Мукаи–Умемуры (где U_2 обозначает унитарную группу).

Основные результаты следующие:

Теорема. Мотив Чжоу скрученной формы V_5 или V_{22} раскладывается в сумму сдвинутых мотивов коники.

Теорема. Мотив Чжоу скрученной формы многообразия Мукаи-Умемуры изоморфен мотиву Чжоу некоторой 5-мерной квадрики.

Заметим, что Бонне доказал изоморфизм мотивов скрученных форм многообразий G_2/P_1 и G_2/P_2. Наш результат говорит, что мотивный изоморфизм имеет место и для их гладких гиперплоских сечений.

Список литературы

[1] J.-P. Bonnet. A motivic isomorphism between two projective homogeneous varieties under the action of a group of type G_2. Doc. Math. **8** (2003), 247–277.

[2] A. Kuznetsov, Yu. Prokhorov. Prime Fano threefolds of genus 12 with a $\mathbb{G}_m$-action and their automorphisms. Épijournal de Géometrié Algébrique **2** (2018), article 3.
[3] Yu. Prokhorov, M. Zaidenberg. Fano–Mukai fourfolds of genus 10 and their automorphism groups. European J. Math. **8** (2022), 561–572.

Свойство счётной отделимости для ассоциативных и других алгебр

А.В. Петухов
ИППИ РАН, Москва, Россия
alex-2@yandex.ru

Для ассоциативной алгебры A с простым модулем M с тривиальными эндоморфизмами и тривиальным аннулятором я проверил свойство счётной отделимости, т.е. доказал, что существует список ненулевых элементов $a_1, a_2, \ldots$ алгебры A такой, что каждый двусторонний идеал алгебры A содержит по крайней мере один такой a_i. Основываясь на этом результате, было проверено свойство счётной отделимости для свободной ассоциативной алгебры с конечным или счётным множеством образующих над любым полем. Свойство счётной отделимости изучалось ранее в работах Диксмье и других, но только в контексте нётеровых алгебр (а свободная ассоциативная алгебра очень далека от того, чтобы быть нётеровой).

Аналог основной теоремы имеет место и для дифференциальных (в частности, пуассоновых) алгебр. Я постараюсь наглядно объяснить, в чём заключается счётная отделимость на примерах разных дифференциальных и пуассоновых алгебр, симметрических алгебр различных бесконечномерных алгебр Ли.

Устойчивость тождеств алгебр и преобразования скобочных структур

А.В. Попов
Ульяновск, Россия
klever176@rambler.ru

Пусть A — не обязательно ассоциативная алгебра над полем $\mathbb{F}$ нулевой характеристики. Обозначим через $P_n(A)$ пространство полилинейных тождеств степени n алгебры A, т.е. множество некоммутативных неассоциативных однородных многочленов $f(x_1, \ldots, x_n)$ степени n, линейных по каждой переменной, таких, что $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ для любых $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Обозначим через L_v и R_v операторы умножения на v слева и справа, и определим оператор M_v^r, $r \in \mathbb{Z}_2$, положив $M_v^0 = L_v$ и $M_v^1 = R_v$. Тогда любой моном $u \in P_n$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ может быть записан как $u = x_i M_{v_1}^{r_1} \cdots M_{v_k}^{r_k}$, где $k < n$.

Определим линейные операторы $\pi_i \colon P_n \mapsto P_n$, положив

$$\pi_i \cdot u = x_i M_{v_k}^{r_k+1} \cdots M_{v_1}^{r_1+1}.$$

Если любое полилинейное тождество алгебры A под действием любого оператора π_i преобразуется снова в тождество алгебры A, то говорят, что идеал тождеств алгебры A устойчив.

Теорема 1. Если на алгебре A определена невырожденная, ассоциативная, симметричная билинейная форма, то идеал тождеств алгебры A устойчив.

Обозначим через Π_n группу, порожденную операторами π_i, $i = 1..n$, действующими на пространстве P_n.

Теорема 2. Имеет место изоморфизм $\Pi_n \cong S_{n+1}$. Кроме того, Π_n содержит в качестве подгруппы группу S_n, действующую на P_n переименованием переменных:

$$\sigma \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right).$$

Последняя теорема показывает, что перестановки $\sigma \in S_n$ можно рассматривать как элементы группы Π_n. Определим операторы $\bar{\pi}_k$, $k = 1..n$, положив $\bar{\pi}_k = (1\,2\,\ldots\,n)^{n-k}\,(1\,2\,\ldots\,k)\,\pi_k$.

Утверждение 3. Тождественное преобразование и операторы $\bar{\pi}_k$, $k = 1..n$, образуют подгруппу в Π_n, изоморфную $\mathbb{Z}_{n+1}$.

Обозначим через T_n множество мономов из P_n таких, что после “стирания” в них скобок получается слово $x_1 \cdots x_n$. Как оказывается, действие операторов $\bar{\pi}_k$ может быть ограничено на множество T_n, т.е. операторы $\bar{\pi}_k$ не меняют порядок переменных в мономах из T_n, а преобразуют только расстановку скобок.

Как известно, множества T_n являются одним из многочисленных примеров множеств, мощности которых образуют последовательность чисел Каталана. Более точно, $|T_n| = C_{n-1}$. В частности, существует естественная биекция ϕ между мономами из T_n и триангуляциями правильных $(n+1)$-угольников, —

другим примером комбинаторных структур, подсчитываемых числами Каталана. Оказывается, что операторы $\phi^{-1}\bar{\pi}_k\phi$ являются операторами поворота $(n+1)$-угольника.

Список литературы

[1] А.В. Попов. Устойчивые многообразия неассоциативных алгебр. Алгебра и логика, в печати.

Локальная версия теоремы Мацумуры–Монского, неравенство Чулкова и морсификации инвариантов[1]

И.А. Проскурнин

МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

dazai131@yahoo.com

Теорема Мацумуры–Монского, доказанная в статье [1], утверждает, что гладкая комплексная проективная гиперповерхность степени выше второй не может иметь бесконечной группы автоморфизмов (за исключением особого случая кривой четвёртой степени). Её локальной версией является утверждение из работы [2], известное в теории особенностей как гипотеза Казаряна.

Теорема. Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток аналитической функции, имеющий нулевую 2-струю, инвариантный относительно действия компактной группы Ли G. Если f имеет изолированную критическую точку в начале координат, то G конечна.

Известно несколько доказательств гипотезы Казаряна. Элементарное доказательство, основанное на анализе геометрии многогранника Ньютона инвариантного ростка, было дано В. А. Васильевым в работе [2], доказательство Мацумуры и Монского из [1] может быть довольно легко адаптировано под аналитические ростки, но, вероятно, наибольший интерес представляет доказательство С.П. Чулкова [4]. Чулков выводит гипотезу Казаряна из следующего неравенства.

Теорема. Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток аналитической функции с изолированной критической точкой в начале координат, имеющий нулевую 2-струю. Если f инвариантен относительно нетривального действия группы $\mathbb{Z}_p$, p — простое, то кратность критической точки f не менее $p-1$.

[1] Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00124.

Гипотеза Казаряна легко выводится из этого утверждения, поскольку компактная группа Ли содержит циклические подгруппы любого порядка, а критическая точка бесконечной кратности не изолирована. Интерес представляют обобщения неравенства Чулкова, но доказательство самого Чулкова, основанное на рассмотрении действия группы $\mathbb{Z}_p$ на гомологиях множества уровня f, не может быть обобщено на группы составного порядка.

В докладе планируется обсудить обобщение неравенства Чулкова на случай произвольных абелевых групп и связь этой задачи с теорией инвариантных морсификаций, построенной Робертсом и Уоллом (см. [5], [6]).

Список литературы

[1] H. Matsumura, P. Monsky. On the automorphisms of hypersurfaces. J. Math. Kyoto Univ. **3** (1963), no. 3, 347–361.
[2] М.Э. Казарян. Характеристические классы лагранжевых и лежандровых особенностей. УМН **50** (1995), no. 4, 45–70.
[3] В.А. Васильев. Об одной задаче М.Э. Казаряна. Функц. анализ и его прил. **33** (1999), no. 3, 73–75.
[4] С.П. Чулков. О числе Милнора эквивариантной особенности. Мат. заметки, **71** (2002), no. 6, 950–953.
[5] M. Roberts. Equivariant Milnor numbers and invariant Morse approximations. J. L. M. S. **s2-31** (1985), no. 3, 487–500.
[6] C.T.C. Wall. A note on symmetry of singularities. Bulletin of the London Mathematical Society **12** (1980), no. 3, 169–175.

Однородные локально нильпотентные дифференцирования триномиальных алгебр

К.А. Рассолов
МГУ им. М.В. Ломоносова, НИУ ВШЭ, Москва, Россия
kirill.rassolov@math.msu.ru

Триномиальные алгебры представляют собой факторалгебры алгебр многочленов по идеалам, порожденным набором триномов, с некоторыми техническими условиями. Триномиальные алгебры являются кольцами Кокса многообразий с действием тора сложности 1 и сами допускают такое действие. Мы описали все локально нильпотентные дифференцирования триномиальной алгебры, однородные относительно действия тора (максимального с тем условием, что все переменные однородны). В геометрических терминах эти ЛНД соответствуют $\mathbb{T}$-нормализуемым $\mathbb{G}_a$-действиям на спектре триномиальной алгебры. Из наших результатов, в частности, следует критерий полужесткости триномиальной алгебры.

Доклад основан на совместной работе с Т. Красиковым. Работа поддержана грантом РНФ 25–11–00302.

Инварианты алгебр Ли в задаче моделирования лицевой мимики

А.А. Рашевский

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

rashevskiy_a_a@sc.vsu.ru

Работа посвящена прикладным аспектам аналитического подхода к моделированию лицевой мимики, основанного на использовании инвариантов алгебр Ли. В рамках подхода мимические изменения задаются действиями подгрупп некоторых групп Ли преобразований плоскости или пространства. Основное внимание уделяется двумерной постановке и плоским изображениям модельных лиц. Обсуждения дополняются экспериментами с простыми трёхмерными моделями лица, где аналогичные преобразования задают согласованные деформации 3D-сетки [3].

Современные методы моделирования мимики условно делятся на несколько классов. К геометрическим и параметрическим относят модели активной формы (ASM) и активного внешнего вида (AAM), а также методы деформации изображений (морфинг, тонкие пластинчатые сплайны и др.), описывающие лицо через координаты лендмарков и/или текстурные признаки. Эти подходы обеспечивают компактную параметризацию, но ограничены линейностью, чувствительны к условиям съёмки и дают параметры без чёткой связи с отдельными мимическими движениями.

Наиболее активно развиваются нейросетевые подходы, использующие сверточные сети и генеративные модели (прежде всего GAN) для синтеза реалистичных выражений лица по одной или нескольким исходным фотографиям, переноса мимики с донора на реципиента и анимации статичных изображений [4]. При этом для GAN-подходов особенно характерны три принципиальных недостатка: низкая интерпретируемость латентного пространства и внутренних представлений, высокая вычислительная сложность обучения и применения моделей, а также сильная зависимость от больших размеченных выборок высокого качества. Эти свойства затрудняют точный контроль над отдельными мимическими компонентами и усложняют связывание нейросетевых моделей с аналитическими или биомеханическими описаниями мимики.

Предлагаемый подход трактует изображение лица как плоскую конфигурацию ключевых областей и кривых (контур лица, глаза, рот и т.п.) на плоскости, а мимические деформации — как действие подгрупп некоторой группы Ли на эту конфигурацию [2]. В двумерной постановке это приводит к классу аналитически заданных отображений плоскости, в которых параметры имеют прозрачный геометрико-мимический смысл и непосредственно связаны с элементами алгебры Ли.

В качестве примера рассмотрим алгебру g_5, которая является единственной неразрешимой неразложимой 5-мерной алгеброй. В каноническом базисе $e_1, \dots, e_5$ она задаётся следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} &[e_1, e_2] = 2e_1, \quad [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = 2e_3, \\ &[e_1, e_4] = e_5, \quad [e_2, e_4] = e_4, \quad [e_2, e_5] = -e_5, \quad [e_3, e_5] = e_4. \end{aligned}$$

Подалгебра $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ изоморфна $\mathfrak{sl}_2$, а на $\mathrm{span}(e_4, e_5)$ задаётся её двумерное неприводимое представление [1]. Полиномиальный инвариант действия g_5 на $\mathbb{C}^3$ используется для построения параметрических семейств преобразований плоской модели лица и дальнейшего обобщения на 3D-случай. В двумерной проекции этот инвариант приводит, например, к дробно-линейному отображению

$$w(t, z_1) = \frac{z_1}{1 + tz_1}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

определяющему семейство деформаций плоского лица. Известным свойством этого отображения является сохранение класса обобщённых окружностей, что позволяет обеспечивать геометрическую согласованность модели (глаза остаются «глазами», рот — «ртом») и управляемость деформаций через параметр t.

Показано, что выбор положения модельного лица в плоскости существенно влияет на допустимые диапазоны параметра. Это приводит к естественным ограничениям параметров, аналогичным физически допустимым диапазонам мышечных сокращений в биомеханических моделях.

Выводятся простые аналитические формулы, интерпретируемые как базовые мимические движения (поднятие и опускание уголков рта, сжатие и растяжение овала лица и т.п.). Для каждого такого движения параметр деформации связан с однопараметрической подгруппой в соответствующей алгебре Ли.

Полученные примеры демонстрируют визуально правдоподобные изменения выражений лиц при сохранении их узнаваемости, тогда как для многих нейросетевых моделей реалистичность и узнаваемость преобразованных лиц не всегда являются синонимами.

Список литературы
[1] В.В. Крутских, А.В. Лобода. Применение системного анализа и компьютерных алгоритмов при изучении орбит 7-мерных алгебр Ли. Математическая физика и компьютерное моделирование **27** (2024), no. 3, 38–59, DOI: `10.15688/mpcm.jvolsu.2024.3.4`.
[2] В.В. Крутских. Применение алгебраических инвариантов для моделирования лицевой мимики. Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии, no. 3, 2025, 51–62,
DOI: `10.17308/sait/1995-5499/2025/3/51-62`.
[3] Z. Ding, X. Zhang, Z. Xia, L. Jebe, Z. Tu, X. Zhang. DiffusionRig: learning personalized priors for facial appearance editing. Proc. IEEE/CVF Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2023, 12736–12746, DOI: `10.48550/arXiv.2304.06711`, см. также arXiv: `2304.06711`.
[4] Z. Geng, C. Cao, S. Tulyakov. 3D Guided Fine-Grained Face Manipulation. arXiv: `cs.CV: 1902.08900` (2019).

О поиске относительно максимальных подгрупп в конечных группах

Д.О. Ревин
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
`revin@math.nsc.ru`

Пусть $\mathfrak{X}$ — фиксированный класс конечных групп со свойствами, напоминающими свойства разрешимых групп, а именно:

- если $H \leqslant G$ и $G \in \mathfrak{X}$, то $H \in \mathfrak{X}$;
- если $H \trianglelefteq G$ и $G \in \mathfrak{X}$, то $G/H \in \mathfrak{X}$;
- если $H \trianglelefteq G$ и $H, G/H \in \mathfrak{X}$, то $G \in \mathfrak{X}$.

В докладе будет обсуждаться следующая естественная проблема.

Проблема. Дана конечная группа. Найти ее максимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы.

Будут обсуждаться связанные с данной проблемой трудности, а также основанные на идеях Х. Виланда [1], [2] возможные способы их преодоления.

Частным случаем отмеченной проблемы служит задача нахождения (максимальных) разрешимых подгрупп в симметрической группе, идущая от классических работ Галуа и Жордана [3], [4], [5] и окончательное решение которой получено совсем недавно [6].

Список литературы

[1] H. Wielandt. Zusammengesetzte Gruppen: Hölder Programm heute. Finite groups (Santa Cruz Conf., 1979), Proc. Symp. Pure Math. **37**, AMS, Providence, RI, 1980, 161–173.

[2] H. Wielandt. Zusammengesetzte Gruppen endlicher Ordnung. Vorles. Univ. Tübingen, 1963/64. In: Helmut Wielandt: Mathematical Works **1**, de Gruyter, Berlin, 1994, 607–655.

[3] E. Galois. Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux. J. Math. Pures Appl. (Liouville) **11** (1846), 417–433.

[4] C.M. Jordan. Commentaire sur le Mémoire de Galois. Comptes rendus **60** (1865), 770–774.

[5] C.M. Jordan. Traité des substitutions et des équations algébriques. Gauthier–Villars, Paris, 1870.

[6] M. Korhonen. Maximal solvable subgroups of finite classical groups. Springer Sham, 2024.

О локально конечных группах, содержащих прямые произведения обобщенных полудиэдральных групп

В.С. Сенашов

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

`Vasily.Senashov@yandex.ru`

Группа $G = \langle d, i \mid d^{2^n} = i^2 = 1, d^i = d^{2^{n-1}-1}, n \geqslant 3\rangle$ называется полудиэдральной группой [1]. Группу $G = \langle r, s \mid r^{8n} = s^2 = 1, srs = r^{4n-1}, n \geqslant 1\rangle$ будем называть обобщенной полудиэдральной группой. В случае когда n степень двойки G в точности полудиэдральная группа. Таким образом, обобщенная полудиэдральная группа не обязательно 2-группа. Будем называть группу G обобщенным локально конечным полудиэдром, если она является объединением бесконечной возрастающей цепочки обобщенных полудиэдров G_i:

$$G_1 < \ldots < G_i < \ldots,$$

$$G = \cup_{i=1}^{\infty} G_i.$$

В данной работе получен следующий результат.

Теорема 1. Пусть d — фиксированное натуральное число, G — локально конечная группа, насыщенная группами из множества

$$\mathfrak{M} = \{R_1^{(n)} \times \cdots \times R_d^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\},$$

$R_i^{(n)}$ — обобщенные полудиэдры. Тогда

$$G = A_1 \times \dots \times A_d,$$

где A_i — обобщенные локально конечные полудиэдры.

Работа поддержана РНФ, проект 24–41–10004.

Список литературы

[1] Д. Горенстейн. Конечные простые группы. М.: Мир, 1985.

Формулы для характеров неприводимых представлений супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(m, n)$

А.Н. Сергеев

Саратовский государственный университет, Саратов, Россия

sergeevan@info.sgu.ru

В докладе приводятся формулы для характеров неприводимых конечномерных представлений общей линейной супералгебры $\mathfrak{gl}(m, n)$. Пусть $K(\mathfrak{gl}(m, n))$ — кольцо Гротендика конечномерных представлений. Доказывается формула для разложения неприводимого характера в виде бесконечной суммы характеров модулей Каца. Доказывается также комбинаторная формула для коэффициентов разложения неприводимых характеров по характерам Эйлера. Как следствие дается новое доказательство формулы для суперразмерности неприводимого модуля и формулы ограничения на подалгебру. Основной технический инструмент — это весовые диаграммы и кэп диаграммы, введенные Дж. Брандоном и К. Строппел.

Список литературы

[1] Yu. Su, R.B. Zhang. Character and dimension formulae for general linear superalgebra. Adv. Math. **211** (2007), no. 1, 1–33.

[2] J. Brundan, C. Stroppel. Highest weight categories arising from Khovanov's diagram algebra IV: the general linear supergroup. J. Eur. Math. Soc. **14** (2012), 373–419.

[3] A.N. Sergeev. Combinatorics of irreducible characters for Lie superalgebra $\mathfrak{gl}(m, n)$, arXiv: `math.RT:2401.12534` (2024).

Операторы Роты–Бакстера на компактных простых группах и алгебрах Ли

С.В. Скресанов
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
skresan@math.nsc.ru

Операторы Роты–Бакстера на алгебрах (в том числе алгебрах Ли) находят обширные применения в комбинаторике, теории вероятностей и при изучении уравнений математической физики. Го, Ли и Шенг в 2021 г. предложили аналог оператора Роты–Бакстера для групп Ли, причём дифференциал такого оператора будет оператором Роты–Бакстера на соответствующей алгебре Ли.

В докладе будет рассказано о полученном докладчиком полном описании операторов Роты–Бакстера на компактных простых группах и алгебрах Ли.

Полиэдральная реализация K-теории торических и флаговых многообразий

Е.Ю. Смирнов
НИУ ВШЭ, НМУ, Москва, Россия,
GTIIT, Шаньтоу, Китай
evgeny.smirnov@gmail.com

В работе А.В. Пухликова и А.Г. Хованского [3] было предложено описание кольца когомологий торического многообразия X как фактора кольца дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами по аннулятору многочлена объема многогранника моментов многообразия X. Эта конструкция была обобщена К. Кавехом [1], который заметил, что кольцо когомологий многообразия полных флагов может быть получено в результате применения аналогичной конструкции ко многограннику Гельфанда–Цетлина. Впоследствии это описание было использовано в совместной работе докладчика с В.А. Кириченко и В.А. Тимориным [2], в которой была предложена реализация исчисления Шуберта на многообразиях полных флагов при помощи пересечения определенных наборов граней многогранников Гельфанда–Цетлина.

Доклад будет посвящен обобщению этих результатов на случай K-теории гладких торических многообразий и обобщенных флаговых многообразий G/B. При этом для K-теории вместо алгебры дифференциальных операторов нужно рассматривать алгебру, порожденную операторами сдвига на решетке, и факторизовать ее по аннулятору многочлена Эрхарта многогранника. Я собираюсь подробно остановиться на случае многообразия флагов $\mathrm{GL}(n)/B$ и разобрать алгоритм для вычисления произведений классов структурных пучков многообразий Шуберта (или, в комбинаторных терминах, произведений многочленов Гротендика): для этого мы предъявим в кольце многогранника Гельфанда–Цетлина элементы, отвечающие классам структурных пучков многообразий Шуберта, и опишем их произведения в терминах граней многогранников Гельфанда–Цетлина. Кроме того, я расскажу, как получить аналогичное описание T-инвариантной K-теории гладких торических многообразий и многообразий полных флагов типа A и как мог бы выглядеть гипотетический ответ в случае редуктивных групп других типов.

Доклад основан на совместной работе с Л.В. Мониным [4], [5].

Список литературы

[1] K. Kaveh. Note on cohomology rings of spherical varieties and volume polynomial. J. Lie Theory **21** (2011), no. 2, 263–283.

[2] V. Kirichenko, E. Smirnov, V. Timorin. Schubert calculus and Gelfand–Zetlin polytopes. Russian Mathematical Surveys **67** (2012), no. 4, 685.

[3] A. Khovanskii, A. Pukhlikov. Finitely additive measures of virtual polyhedra. Algebra i Analiz **4** (1992), no. 2, 161–185.

[4] L. Monin, E. Smirnov. Polyhedral models for K-theory of toric and flag varieties. Sém. Lothar. de Combinatoire **89B** (2023), article 76 (Proceedings of FPSAC2023).

[5] L. Monin, E. Smirnov. Polyhedral models for K-theory of toric and flag varieties, in preparation, 2026.

Конечные подгруппы групп автоморфизмов нетривиальных поверхностей Севери–Брауэра

А.К. Сонина

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

sasha-sonina@mail.ru

Многообразия Севери–Брауэра над полем k являются скрученными формами проективного пространства: после перехода к алгебраическому замыканию они становятся изоморфными $\mathbb{P}^{n-1}$. Естественно изучать их группы автоморфизмов и, в частности, классифицировать конечные подгруппы в $\mathrm{Aut}(X)$ для нетривиальных многообразий X.

Напомним, что многообразия Севери–Брауэра над k биективно соответствуют центральным простым алгебрам A над k. Более того, эта биекция сохраняет группы автоморфизмов. По теореме Нетер–Сколема любой автоморфизм центральной простой алгебры над k внутренний, поэтому $\mathrm{Aut}(X) \cong A^*/k^*$, где A — центральная простая k-алгебра, соответствующая X. Таким образом, общий вопрос о том, какие конечные группы могут действовать на многообразие Севери–Брауэра, не является содержательным без дополнительных ограничений: любая конечная группа G вложена в $\mathrm{PGL}_{|G|}(D)$ для любой центральной алгебры с делением D над k, т.е. действует на многообразии Севери–Брауэра, соответствующем алгебре $\mathrm{Mat}_{|G|}(D)$. Таким образом, правильный вопрос звучит так: «Какие конечные подгруппы могут действовать на многообразиях Севери–Брауэра, соответствующих центральным алгебрам с делением над k?». Такие многообразия называются минимальными многообразиями Севери–Брауэра.

По теореме Веддерберна для любой центральной простой алгебры над k существуют целое положительное число r и центральная алгебра с делением D над k такие, что $A \simeq M_r(D)$, поэтому в случае, когда $\deg(A) = p$ (где p — простое) либо $A \simeq M_p(k)$, и тогда соответствующее многообразие Севери–Брауэра тривиально, либо A является алгеброй с делением, а соответствующее ей многообразие является минимальным. Именно этот случай и будет рассмотрен в докладе.

Основным результатом доклада является описание возможных конечных подгрупп в $\mathrm{Aut}(X)$, где X — минимальное нетривиальное многообразие Севери–Брауэра, в случае, когда $\dim(X) + 1 \neq \mathrm{char}(k)$. Кроме того, будут построены серии экстремальных примеров: многообразия, на которые действует максимальное семейство конечных групп.

Доклад основан на недавних препринтах Анны Савельевой [1] и докладчика [2].

Список литературы

[1] A. Savelyeva. Finite subgroups of automorphism groups of Severi–Brauer varieties, arXiv: `math.AG/2503.20514` (2025).

[2] A. Sonina. Finite subgroups of automorphism groups of Severi–Brauer varieties of prime degree, arXiv: `math.AG/2508.03916v2` (2025).

О поднятиях элементов группы Вейля

А.М. Старолетов
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
staroletov@math.nsc.ru

Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем. Рассмотрим максимальный тор T в G и его нормализатор $N = N_G(T)$. Тогда $W = N/T$ — группа Вейля группы G. Ж. Титс построил канонический конечный прообраз группы W в N и анонсировал решение вопроса, когда расширение группы W с помощью T расщепляется, и, более общо, поиск минимальных добавлений для W в N [1]. Позднее вопрос расщепления в случае простых групп был решен независимо различными авторами (см. обзорную работу [3]). Также отметим, что в работе [2] описаны прообразы группы W, которые удовлетворяют соотношениям кос.

В ряде работ изучался смежный вопрос — если элемент $w \in W$ имеет порядок d, то есть ли у него прообраз (поднятие) в N такого же порядка (см. обзорную работу [3])? В частности, если вся группа W имеет изоморфное поднятие в N, то понятно, что и все элементы имеют требуемые поднятия. Аналогичные вопросы естественным образом возникают для конечных групп лиева типа.

В докладе будут обсуждаться новые результаты о возможных порядках поднятий элементов группы Вейля в ее нормализатор, а также минимальные порядки поднятий самой группы Вейля.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF–2026–0017.

Список литературы

[1] J. Tits. Normalisateurs de tores I. Groupes de Coxeter Étendus. J. Algebra **4** (1966), 96–116.

[2] А.А. Гальт. Строение нормализаторов максимальных торов в группах лиева типа. Матем. тр. **27** (2024), no. 2, 62–98.

Точные неприводимые представления для локально нильпотентных алгебр Ли

М.А. Сурков
Самарский университет, Самара, Россия
surkovmatveya@yandex.ru

Определение. Локально нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{n}$ — это прямой предел $\mathfrak{n} = \varinjlim \mathfrak{n}_i$, где $\mathfrak{n}_1 \subset \mathfrak{n}_2 \subset \ldots \mathfrak{n}_k \subset \ldots$ — вложенные друг в друга конечномерные нильпотентные алгебры Ли.

Мы будем рассматривать так называемые ниль-подалгебры Ли–Дынкина, которые являются максимальными нильпотентными подалгебрами в алгебрах $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{C})$. Каждая такая подалгебра соответствует линейному порядку на $\mathbb{N}$, который определяется расщепляющей подалгеброй Картана.

Пусть $\lambda \in \mathfrak{n}^*$. Для любых $x, y \in \mathfrak{n}$ положим

$$\beta_\lambda(x, y) := \lambda([x, y]).$$

Определение. Поляризация $\mathfrak{p}$ алгебры Ли $\mathfrak{n}$ для формы λ — это максимальное изотропное подпространство относительно билинейной формы β_λ, которое является подалгеброй.

Рассмотрим одномерное представление $\lambda|_\mathfrak{p} \colon \mathfrak{p} \to \mathfrak{gl}(V) = \mathbb{C}$, $x \mapsto \lambda(x)$. Индуцируем с него представление универсальной обёртывающей алгебры всей алгебры Ли $\mathfrak{n}$:

$$M(\lambda) = ind(V, \mathfrak{n}) = \mathrm{U}(\mathfrak{n}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{p})} V.$$

Для произвольного λ неизвестно, существует ли поляризация $\mathfrak{p}$, и если существует, будет ли представление $M(\lambda)$ неприводимо. Согласно [1], в конечномерном случае $\mathfrak{p}$ существует, $M(\lambda)$ неприводимо, и аннулятор $M(\lambda)$ в $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$ не зависит от выбора $\mathfrak{p}$.

Выберем $\lambda \in \mathfrak{n}^*$. В работе [2] по форме λ строится примитивный идеал $J(\lambda)$ в $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$. Примитивный идеал строится по индукции за бесконечное число шагов, и нет явной конструкции для построения неприводимого представления $M(\lambda)$ такого, что $\mathrm{Ann}_{\mathrm{U}(\mathfrak{n})} M(\lambda) = J(\lambda)$. Также в работе [2] доказано, что $J(\lambda) = \{0\}$ тогда и только тогда, когда λ — так называемая регулярная форма.

Рассмотрим линейный порядок $\succ$ на $\mathbb{N}$, соответствующий выбранной алгебре Ли $\mathfrak{n}$. Выберем регулярную форму $\lambda \in \mathfrak{n}^*$.

Случай 1. В $\mathbb{N}$ есть минимальный и максимальный элементы согласно порядку $\succ$. Тогда нулевой идеал не примитивен. Действительно, пусть a —

минимальный элемент в $\mathbb{N}$, b — максимальный. Тогда $[e_{a,b}, e_{i,j}] = 0$ для любых $i, j \in \mathbb{N}$. Элемент $e_{a,b}$ лежит в центре $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$, значит, центр $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$ ненулевой. Из этого следует, что точное представление построить невозможно.

Случай 2. Существует $x \in \mathbb{N}$ и бесконечные подмножества $I_1, I_2 \subset \mathbb{N}$ такие, что $I_2 \succ x \succ I_1$ и $I_1 \cup \{x\} \cup I_2 = \mathbb{N}$.

Теорема. Подалгебра $\mathfrak{p} = \langle e_{i,j}, i \in I_1, j \in \{x\} \cup I_2 \rangle$ является поляризацией $\mathfrak{n}$ для формы λ, и представление $M(\lambda)$ неприводимо.

Случай 3. Для любого элемента $\mathbb{N}$ множество элементов больше его или множество элементов меньше его (согласно $\succ$) конечно. В этом случае $\succ$ эквивалентен стандартному порядку на $\mathbb{N}$. Этот случай реализуется для $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{C})$. Рассмотрим стандартный базис в $\mathfrak{n}$ из матричных единиц $\{e_{i,j}, i < j\}$. Пусть $n < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ — натуральные числа. Рассмотрим матрицу, в которой на месте (i, j) стоит $\lambda_{i,j} := \lambda(e_{i,j})$. Обозначим за $M^n_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\lambda)$ минор этой матрицы, составленный из строк с номерами $1, 2, \ldots, n$ и столбцов с номерами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. В этом случае регулярность λ означает, что любой такой минор отличен от нуля.

Пусть $i < j$ — натуральные числа. Обозначим через $e^\circ_{i,j}(\lambda)$ следующий элемент алгебры Ли:

$$e^\circ_{i,j} = \sum_{k=1}^{i} (-1)^{i+k} M^{i-1}_{j,j+1,\ldots,j+k-2,j+k,\ldots,j+i-1}(\lambda) e_{i,k}.$$

Элемент $e^\circ_{i,j}(\lambda)$ можно понимать просто как разложение по последней строке минора $M^i_{j,j+1,\ldots,j+i-1}(\lambda)$, в котором последнюю строчку $\lambda_{i,j}, \lambda_{i,j+1}, \ldots, \lambda_{i,j+i-1}$ заменили на $e_{i,j}, e_{i,j+1}, \ldots, e_{i,j+i-1}$.

Теорема. Подалгебра $\mathfrak{p} = \langle e^\circ_{i,j}(\lambda), i < j \rangle$ является поляризацией $\mathfrak{n}$ для формы λ, и представление $M(\lambda)$ неприводимо.

Список литературы

[1] Ж. Диксмье. Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир, 1978.

[2] M. Ignatyev, A. Petukhov. The orbit method for locally nilpotent infinite-dimensional Lie algebras. J. Algebra. **585** (2021), 501–557.

О центроидах групп

А.В. Трейер
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия
alexander.treyer@gmail.com

В работе [1] А. Мясников и С. Лютиков ввели понятие центроида группы. Фактически, они доказали, что множество всех отображений группы в себя, которые являются нормальными (то есть устойчивыми к сопряжениям в группе) и к тому же являются квазиэндоморфизмами (то есть такими отображениями ϕ, для которых верно $[x, y] = 1 \to \phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$) по сути есть ассоциативное кольцо с единицей.

С одной стороны, центроид — это максимальное кольцо скаляров, действующее точно на группе; с другой стороны, это обобщение понятия кольца эндоморфизмов абелевых групп на некоммутативные группы. В той же статье авторы описали структуру центроида для CSA-групп, а также свободных нильпотентных и унитреугольных групп над произвольным биномиальным кольцом. С помощью последнего результата удалось доказать жесткость свободных нильпотентных групп, а также групп унитреугольных матриц (см. также [2]).

Одним из основных мотивов к началу изучения центроидов групп стала теория экспоненциальных MR-групп. Здесь операция возведения в целую степень элементов группы расширяется до возведения в степень, являющуюся элементом некоторого кольца, удовлетворяющего заданному набору аксиом. Одним из примеров таких групп является делимое пополнение нильпотентных групп по Мальцеву, а также пополнение нильпотентных групп по Ф. Холлу.

В докладе будут представлены результаты докладчика, И.М. Бучинского и А.Е. Чеснокова о центроидах групп. Более точно, нами были описаны центроиды CT-групп (класс CT — это расширение класса CSA-групп), метабелевых групп Баумслага–Солитера, свободных метабелевых групп и сплетений групп. Также была доказана жесткость (см. [2]) для большого класса двуступенно нильпотентных R-групп по Ф. Холлу.

Список литературы

[1] S. Lioutikov, A. Myasnikov. Centroids of groups. J. Group Theory **3** (2000), 177–197.

[2] F. Grunewald, D. Segal. Reflections on the classification of torsion-free nilpotent groups. In: Group Theory: essays for Philip Hall, 1984, 121–158.

Термодинамические группы симметрий и Kerr/CFT-соответствие в струнно-инспирированных чёрных дырах

У Цзинсюй, Ши Цзе, П.И. Пронин, Ван Вэньцзэ
Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
wuxj@my.msu.ru

Доклад основан на тезисах и развивает геометрико-групповой язык, в котором термодинамика чёрных дыр рассматривается как инвариантная структура на фазовом пространстве, а равновесие — как выделенное подмногообразие. Пусть термодинамическое фазовое пространство имеет координаты $Z^A = (\Phi, E^a, I_a)$, где Φ — потенциал, E^a — экстенсивные, I_a — сопряжённые интенсивные переменные. Контактная форма Гиббса [1]

$$\Theta = d\Phi - I_a\, dE^a, \qquad \Theta \wedge (d\Theta)^n \neq 0,$$

задаёт контактную структуру $[\Theta]$. Равновесное множество $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}$ фиксируется вложением $\varphi : \mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{T}$ и условием [2]

$$\varphi^*(\Theta) = 0 \iff d\Phi = I_a\, dE^a, \qquad I_a = \frac{\partial \Phi}{\partial E^a}.$$

Для Kerr-подобных чёрных дыр (включая деформации, возникающие в эффективных «stringy» моделях) первый закон записывается как

$$dM = T\, dS + \Omega\, dJ + \Phi_A\, dQ_A,$$

и в энергетическом представлении $\Phi \equiv M$, $E^a = (S, J, Q_A)$, $I_a = (T, \Omega, \Phi_A)$ контактная форма принимает вид

$$\Theta = dM - T\, dS - \Omega\, dJ - \Phi_A\, dQ_A,$$

а равновесная термодинамика задаётся уравнением состояния $M = M(S, J, Q_A)$ и стандартными соотношениями для (T, Ω, Φ_A) как производных по (S, J, Q_A). При наличии размерностной (Smarr-подобной) гомогенности возникает инвариант согласованных масштабирований

$$I_{\text{Smarr}} = \alpha M - \beta\, TS - \gamma\, \Omega J - \delta\, \Phi_A Q_A,$$

где коэффициенты задаются физическими размерностями в выбранной модели.

Далее вводится термодинамическая группа симметрий как группа контактных преобразований

$$G_{\text{th}} := \left\{ F \in \mathrm{Diff}(\mathcal{T}) \;\middle|\; F^*\Theta = \Omega_F\, \Theta,\ \Omega_F \neq 0 \right\},$$

и выделяется подгруппа $G_{\rm th}^{(0)} \subset G_{\rm th}$, сохраняющая функциональную форму уравнения состояния в фиксированном классе универсальности. Преобразования Лежандра являются элементами $G_{\rm th}$ и реализуют смену потенциала при сохранении класса $[\Theta]$; на уровне алгебры Ли это выражается условием $\mathcal{L}_X\Theta = f_X\Theta$ для инфинитезимального генератора X. Если действие $G_{\rm th}^{(0)}$ на равновесном многообразии транзитивно, то пространство состояний организуется как однородное пространство

$$\mathcal{E} \simeq G_{\rm th}^{(0)}/H,$$

где H — стабилизатор типичной точки (референтного состояния); такая форма удобна для классификации ветвей решений через орбиты и инварианты действия.

Экстремальный предел выделяет страты, на которых часть термодинамических мод становится «нулевой», а near-horizon динамика получает расширенную симметрию. Для Kerr (без зарядов) экстремальность задаётся условиями

$$T_H = 0, \qquad J = M^2, \qquad S \neq 0,$$

что определяет подмногообразие $\mathcal{E}_{\rm ext} \subset \mathcal{E}$; групповая интерпретация состоит в увеличении стабилизатора $H_{\rm ext} \supsetneq H$. Связь с Kerr/CFT заключается в том, что near-horizon (экстремальная) геометрия допускает асимптотическую алгебру Вирасоро, а энтропия воспроизводится формулой Карди

$$S_{\rm CFT} = \frac{\pi^2}{3}\big(c_LT_L + c_RT_R\big), \text{ в экстремальном режиме обычно } S_{\rm CFT} = \frac{\pi^2}{3}c_LT_L,$$

где параметры $(c_{L,R}, T_{L,R})$ выражаются через инвариантные комбинации макропараметров и согласуются с ограничениями экстремальности и Smarr-структурой. Методологически подход согласуется с геометрико-групповой линией работ П. И. Пронина по локальным симметриям и квантовым эффектам в кривых фонах [3].

Список литературы

[1] P.I. Pronin, M.F. Shatov. Higher-derivative quantum gravity in general parametrization and general gauge conditions. Moscow Univ. Phys. Bull. **79** (2024), 1–9.

[2] M. Guica, T. Hartman, W. Song, A. Strominger. The Kerr/CFT correspondence. Phys. Rev. D **80** (2009), article 124008.

[3] G. Compère. The Kerr/CFT correspondence and its extensions: a comprehensive review. Living Rev. Relativ. **20** (2017), article 1.

Новое бесконечное семейство накрытий полных графов, допускающих полутранзитивное действие простой группы Судзуки

Л.Ю. Циовкина
ИММ УрО РАН, УрФУ, Уральский математический центр, Екатеринбург, Россия
l.tsiovkina@gmail.com

Конечный неориентированный простой граф Γ называется накрытием графа K_n (т.е. полного графа на n вершинах), если множество вершин графа Γ допускает разбиение на n коклик (называемых фибрами накрытия) одинакового размера $r \geq 2$, такое что объединение любых двух различных фибр индуцирует совершенное паросочетание. Легко показать, что такое накрытие является антиподальным диаметра 3 тогда и только тогда, когда любые две несмежные вершины из различных фибр имеют ненулевое число общих соседей. Изучение антиподальных накрытий диаметра 3 представляет особый интерес из-за их важных приложений в теории кодирования (например, в задачах поиска новых примеров 1-совершенных кодов в графах) и комбинаторике (например, в задачах построения равноугольных множеств прямых). До сих пор значительное внимание уделялось классификации антиподальных накрытий диаметра 3, обладающих дополнительными свойствами реберной транзитивности и дистанционной регулярности (см. обзор в [1]). В докладе мы опускаем второе требование и исследуем класс реберно-транзитивных антиподальных накрытий диаметра 3 в общем случае. Каждая реберно-транзитивная группа G автоморфизмов антиподального накрытия диаметра 3 индуцирует 2-однородную группу подстановок G^{Σ} на множестве Σ его фибр, которая ввиду теорем Кантора и Бернсайда является либо аффинной, либо почти простой. В случае почти простой группы G^{Σ} классификация накрытий со свойством дистанционной регулярности была завершена в работе автора [2], в которой также был найден ряд новых конструкций накрытий диаметра 3, не являющихся дистанционно-регулярными и обладающих арк-транзитивной простой группой G. Однако до настоящего времени не было известно ни одной конструкции антиподальных накрытий диаметра 3, допускающих *полутранзитивную* (т.е. реберно-, но не арк-транзитивную) простую группу автоморфизмов. Мы покажем, что такие накрытия действительно существуют. А именно, мы представим конструкцию нового бесконечного семейства антиподальных накрытий диаметра 3, допускающих полутранзитивную группу автоморфизмов, изоморфную простой группе Судзуки $Sz(q)$,

$q \geq 8$. Как следствие, мы получим новое бесконечное семейство реберно-транзитивных графов, допускающих разбиение множества вершин на совершенные 1-коды.

Теорема. Пусть $G = Sz(q)$ — это простая группа Судзуки, где $q > 4$, S — это произвольная силовская 2-подгруппа в G (подгруппа порядка q^2), S_1 — это подгруппа в S индекса 2 и $M := N_G(S)$ — нормализатор группы S в G. Зафиксируем произвольно некоторые инволюцию g из $G - M$ и элемент y порядка 4 из $S - S_1$ такие что $|yg| = 4$. Пусть $D = S_1(yg)S_1 \cup S_1(yg)^{-1}S_1$ и $\Gamma := \Gamma(G, S_1, D)$ — это граф на множестве правых смежных классов группы G по подгруппе S_1, в котором

$$S_1x \text{ смежна с } S_1z \iff xz^{-1} \in D.$$

Тогда Γ — это G-полутранзитивное антиподальное $2(q-1)$-накрытие графа K_{q^2+1} и $d(\Gamma) = 3$ при любом выборе подгрупп S, S_1 и элементов y, g, удовлетворяющих заданным выше условиям. Его полная группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\Gamma) \leq Z_2 \times \mathrm{Aut}(Sz(q))$ арк-транзитивна.

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках проекта развития регионального научно-образовательного математического центра «Уральский математический центр» (соглашение 075–02–2025–1719/1).

Список литературы

[1] L.Yu. Tsiovkina. On vertex-transitive distance-regular covers of complete graphs with an extremal smallest eigenvalue, arXiv: `math.CO/2412.11962` (2024).
[2] L.Yu. Tsiovkina. Covers of complete graphs and related association schemes. J. Comb. Theory Ser. A. **191** (2022), article 105646.

Прямоугольные многогранники и их связь с различными математическими сюжетами

Д.А. Цыганков
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
`Dimamadrid@yandex.ru`

Пусть P — прямоугольный многогранник конечного объёма в пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^n$. Некоторые вершины такого многогранника могут лежать на абсолюте $\partial\mathbb{L}^n$.

Конструкция [1] по правильной раскраске $\Lambda : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}_2^k$ набора гиперграней $\mathcal{F}$ многогранника P позволяет построить гиперболическое многообразие $N(P, \Lambda)$. Само многообразие представляет из себя склейку из 2^k копий P.

В случае, если P не имеет вершин на абсолюте, $N(P,\Lambda)$ гомеоморфно факторпространству вещественного момент-угол многообразия $\mathcal{R}_P$, которое изучается в торической топологии [2], [3].

В случае, если $\dim P = 3$, все вершины лежат на абсолюте, а раскраска $\Lambda : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}_2^2$ шахматная (в 2 цвета e_1, e_2), многообразие $N(P,\Lambda)$ диффеоморфно $S^3\backslash L$, где L — некоторое зацепление [4]. Из некоторых многогранников P, у которых не все вершины лежат на абсолюте, можно по-прежнему построить $S^3\backslash L$.

В размерности 4 имеются аналогичные результаты. Например, из некоторых прямоугольных многогранников можно склеить многообразия, которые являются $S^4\backslash T_5$, $\mathbb{R}P^4\backslash T_5$, где T_5 — 5 зацепленных двумерных торов. Однако в размерности 4 таких примеров ограниченное количество.

Многообразия $N(P,\Lambda)$, начиная с размерности 3 определяются, с точностью до изометрии своими фундаментальными группами (согласно жёсткости Мостова). По этой причине интересно изучать объёмы таких многообразий, а значит и объёмы многогранников P.

Планируется рассказать, какими могут быть объёмы многогранников P. Например, здесь появляется постоянная Каталана; π^n, где $n = 1, 2, 3, 4$; $\zeta(3)$; некоторые другие константы, связанные с открытыми задачами из теории чисел. Однако до сих пор не все прямоугольные многогранники классифицированы, как и не посчитаны все объёмы известных прямоугольных многогранников.

Список литературы

[1] А.Ю. Веснин. Трёхмерные гиперболические многообразия типа Лёбелля. Сиб. матем. журн . **28** (1987), no. 5, 50–53.

[2] M.W. Davis, T. Januszkiewicz. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions. Duke Math. J. **62** (1991), no. 2, 417–451.

[3] В.М. Бухштабер, Н.Ю. Ероховец, М. Масуда, Т.Е. Панов, С. Пак. Когомологическая жёсткость многообразий, задаваемых трёхмерными многогранниками. Успехи мат. наук **72** (2017), no. 2, 434.

[4] N. Erokhovets. On hyperbolic links associated to eulerian cycles on ideal right-angled hyperbolic 3-polytopes, arxiv: `math.GT/2512.03017` (2025).

[5] D. Ivansic, J.G. Ratcliffe, S.T. Tschantz. Complements of tori and Klein bottles in the 4-sphere that have hyperbolic structure. Algebraic & Geometric Topology **5** (2005), 999–1026.

Гибкость сферических многообразий

Шафаревич А.А.
МГУ им. М.В. Ломоносова, НИУ ВШЭ, Москва, Россия
shafarevich.a@gmail.com

Гладкая точка x алгебраического многообразия называется гибкой, если касательное пространство T_xX порождается касательными векторами к орбитам $\mathbb{G}_a$-действий, проходящими через точку x. Многообразие X называется гибким, если все его гладкие точки гибкие. Обозначим через $\mathrm{SAut}(X)$ подгруппу в $\mathrm{Aut}(X)$, порожденную всеми $\mathbb{G}_a$-подгруппами. В работе [1] было доказано, что аффинное многообразие X является гибким тогда и только тогда, когда группа $\mathrm{SAut}(X)$ действует транзитивно на множестве гладких точек X. Более того, в этом случае группа $\mathrm{SAut}(X)$ действует на множестве гладких точек m-транзитивно для любого m.

Известно, что обратимые регулярные функции являются инвариантами относительно всех $\mathbb{G}_a$-действий. Поэтому необходимым условием гибкости является отсутствие непостоянных обратимых регулярных функций. В [2] была высказана гипотеза, что аффинные сферические многообразия являются гибкими тогда и только тогда, когда на них нет непостоянных обратимых регулярных функций.

В своем докладе я расскажу, почему эта гипотеза верна. Более того, я покажу, что для произвольного аффинного сферического многообразия группа $\mathrm{Aut}(X)$ действует транзитивно на множестве гладких точек. Доклад будет основан на препринте [3], подготовленным в ходе проведения исследования в рамках проекта «Международное академическое сотрудничество» НИУ ВШЭ.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. **162** (2013), no. 4, 767–823.

[2] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Infinite transitivity on affine varieties. In: Birational geometry, rational curves, and arithmetic, Simons Symp., Springer, Cham, 2013, 1–13.

[3] A. Shafarevich. Flexibility of affine spherical varieties, arXiv: 2512.07031.

О наследовании π-теоремы Силова подгруппами классических групп

В.Д. Шепелев
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
v.shepelev@g.nsu.ru

Пусть π — множество простых чисел. Конечная группа называется *π-группой*, если все простые делители её порядка принадлежат π. Группа G удовлетворяет *π-теореме Силова* ($G \in D_\pi$), если её максимальные π-подгруппы сопряжены, и *сильной π-теореме Силова* ($G \in W_\pi$), если всякая подгруппа G удовлетворяет π-теореме Силова.

Виланд [1, вопрос (h)] предложил классифицировать простые группы $G \in W_\pi$. Спорадические и знакопеременные группы из W_π классифицированы Н.Ч. Манзаевой [2], группы лиева типа ранга 1 — докладчиком [3].

Если G — группа, то $G \in W_\pi$ если и только если $G \in D_\pi$ и $M \in W_\pi$ для любой максимальной подгруппы M. Согласно теореме Ашбахера максимальные подгруппы классических групп либо принадлежат одному из восьми «геометрических» классов, либо являются почти простыми. Подгруппы первого типа хорошо известны [4], подгруппы второго типа — не всегда. Неабелевы композиционные факторы подгрупп Ашбахера — знакопеременные или классические группы.

Определение. Если G — знакопеременная группа или классическая группа лиева типа ранга 1, то $G \in \tilde{W}_\pi$, если $G \in W_\pi$. Если G — классическая группа ранга > 1, то $G \in \tilde{W}_\pi$, если $G \in D_\pi$, и $S \in \tilde{W}_\pi$ для всякого неабелева композиционного фактора S любого элемента класса Ашбахера.

Решая проблему Виланда, естественно попытаться перечислить классические группы из $\tilde{W}_\pi$. Но возникает вопрос о корректности: определяется ли принадлежность $\tilde{W}_\pi$ только типом изоморфизма группы? Известны изоморфизмы между группами лиева типа, а также изоморфизмы со знакопеременными группами (например, $U_4(2) \cong S_4(3)$, $L_4(2) \cong A_8$). Представители классов Ашбахера при этом зависят от того, в каком качестве мы рассматриваем ту или иную группу.

Теорема. *Для любого множества π принадлежность $\tilde{W}_\pi$ классической группы G определяется только типом изоморфизма группы G.*

В дальнейшем планируется найти арифметический критерий справедливости свойства $\tilde{W}_\pi$ для всех простых классических групп лиева типа.

Работа выполнена за счёт гранта Российского научного фонда 24–21–00163.

Список литературы
[1] H. Wielandt. Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute. In: Finite groups, Santa Cruz Conf. 1979, Proc. Symp. Pure Math. **37** (1980), 161–173.
[2] Н.Ч. Манзаева. Решение проблемы Виланда для спорадических групп. Сиб. электрон. матем. изв. **9** (2012), 294–305.
[3] В.Д. Шепелев. Сильная π–теорема Силова для простых групп лиева типа ранга 1. Сиб. матем. журн. **66** (2025), no. 4, 755–771.
[4] P. Kleidman, M. Liebeck. The subgroup structure of the finite classical groups. London Math. Soc. Lecture Notes **129**, Cambridge University Press, 1990.

О группах с N-критическим графом в локально конечных группах

А.А. Шлепкин, В.И. Мурашко
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия,
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
shlyopkin@gmail.com

Пусть $\Re$ — множество групп. Будем говорить, что группа G *насыщена* группами из $\Re$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\Re$ [1]. N*-критическим* графом $\Gamma_{Nc}(G)$ группы G называется ориентированный граф, для которого $V(\Gamma_{Nc}(G)) = \pi(G)$, и (p,q) является ребром $\Gamma_{Nc}(G)$, если в G найдется (p,q)-подгруппа Шмидта [2].

Теорема 1. Пусть G — локально конечная группа, $\pi(G) = \{2, p_1, \cdots, p_d\}$ и G насыщена группами из множества

$$\mathfrak{M} = \{H_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

где H_i — конечная группа, обладающая N-критическим графом $\Gamma_{Nc}(H_i)$ с множеством вершин

$$V(\Gamma_{Nc}(H_i)) = \pi(G)$$

и множеством ребер

$$\{(p_j, 2) \mid p_j \in \pi(G),\ 1 \leqslant j \leqslant d\}.$$

Тогда G обладает нормальной $2'$-холловой подгруппой

$$A = A_1 \times \cdots \times A_j \times \cdots \times A_d,$$

где A_j — силовская p_j—подгруппа группы.

Работа поддержана РНФ проект № 24–41–10004 и БРФФИ проект № Ф23РНФМ–63.

Список литературы
[1] А.К. Шлепкин. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами. Матем. тр. ИМ СО РАН **1** (1998), no. 1, 129–138.
[2] А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко. Арифметические графы и классы конечных групп. Сибирск. матем. журн. **60** (2019), no. 1, 71–81.

Гомоморфизмы между обобщёнными бимодулями Ботта–Самельсона

В.В. Щиголев
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Россия
shchigolev_vladimir@yahoo.com

Пусть (W,S) — система Кокстера. Обозначим через T подмножество W, состоящее из всех элементов wsw^{-1}, где $w\in W$ и $s\in S$. Элементы множества T называются *отражениями* системы (W,S), а элементы множества S *простыми* отражениями.

Рассмотрим конечномерное представление $\rho\colon W\to \mathrm{GL}(V)$ над полем характеристики, отличной от 2. Удобно представить, что W действует на V по правилу $w\cdot v=\rho(w)(v)$. Мы предполагаем, что это представление точное и что в нём каждое отражение $t\in T$ действует как отражение на V. Это значит, что существует вектор $\alpha_t\in V$ и ковектор $\alpha_t^\vee\in V^*$ такие, что $\alpha_t^\vee(\alpha_t)=2$ и

$$\forall v\in V:\ t\cdot v=v-\alpha_t^\vee(v)\alpha_t.$$

В этом случае, α_t и $\alpha_t^\vee$ называются *корнем* и *кокорнем* отражения t. Заметим, что выполнение этого свойства достаточно потребовать только для простых отражений. Кроме того, мы потребуем выполнение следующего *GKM-условия* (названного по мотивам статьи М. Горески, Р. Коттвица, Р. Макферсона [1]):

$$t\neq t'\Rightarrow \alpha_t \text{ и } \alpha_{t'} \text{ непропорциональны.}$$

Это условие выполняется, например, для геометрического представления группы W.

Пусть R — симметрическая алгебра пространства V. Эта алгебра градуирована так, что $R^2 = V$. Действие W на V продолжается до однородного действия на R. Для каждого $t \in T$ рассмотрим кольцо инвариантов $R^t = \{r \in R \mid t \cdot r = r\}$ и для последовательности $\underline{t} = (t_1, \dots, t_n)$ элементов из T (отражений) рассмотрим градуированный R-R-бимодуль:

$$R(\underline{t}) = R \otimes_{R^{t_1}} R \otimes_{R^{t_2}} \cdots \otimes_{R^{t_n}} R.$$

Мы назовём его *обобщённым бимодулем Ботта–Самельсона*. Прилагательное «обобщённый» в этом случае подчёркивает тот факт, что элементы последовательности $\underline{t}$ могут быть любыми отражениями из T. Таким образом, *бимодули Ботта–Самельсона* соответствуют случаю, когда $\underline{t}$ — последовательность элементов из S.

Теорема (Щиголев). Для любых последовательностей отражений $\underline{t}$ и $\underline{t}'$ пространство градуированных гомоморфизмов $\mathrm{Hom}^\bullet_{R\otimes R}(R(\underline{t}), R(\underline{t}'))$ является рефлексивным как левым, так и правым R-модулем.

Здесь уместно провести аналогию с обычными бимодулями Ботта–Самельсона. Согласно результату В. Зёргеля [3], пространство $\mathrm{Hom}^\bullet_{R\otimes R}(R(\underline{t}), R(\underline{t}'))$ является свободным правым и левым R-модулем в случае, когда $\underline{t}$ и $\underline{t}'$ — последовательности простых отражений. Градуированный ранг этого модуля даётся *Hom-формулой Зёргеля* [3, Theorem 5.15]. Более того, свободный базис такого модуля был построен Н. Либединским [2]. Для обобщённых бимодулей Ботта–Самельсона ситуация радикально отличается, как показывает следующий результат.

Теорема (Щиголев). Для любой группы Кокстера, содержащей подсистему типа A_n, где $n \geq 3$, существует последовательность отражений $\underline{t}$ длины $2n+1$ такая, что пространство $\mathrm{Hom}^\bullet_{R\otimes R}(R, R(\underline{t}))$ не свободно ни как левый, ни как правый R-модуль. Проективная размерность этого модуля равна 1, в то время как проективная размерность двойственного модуля равна $n-2$.

Список литературы

[1] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson. Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem. Invent. Math. **131** (1997), 25–83.

[2] N. Libedinsky. Sur la catégorie des bimodules de Soergel. J. Algebra **320** (2008), 2675–2694.

[3] W. Soergel. Kazhdan-Lusztig-Polynome und unzerlegbare Bimoduln über Polynomringen. J. Inst. Math. Jussieu **6** (2007), no. 3, 501–525.

Super-symmetric pairs and Satake diagrams
D. Algethami†, A. Mudrov♯, V. Stukopin♯
† Department of Mathematics, College of Science, University of Bisha, Bisha, Saudi Arabia, Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia
daaa3@leicester.ac.uk, mudrov.ai@mipt.ru, stukopin.va@mipt.ru

The report is based on the work [1] and also contains new results. We introduce quantum super-spherical pairs as coideal subalgebras in general linear and ortho-symplectic quantum supergroups for symmetric grading. These subalgebras play a role of isotropy subgroups for matrices solving the $\mathbf{Z}_2$-graded reflection equation. They generalize quantum (pseudo)-symmetric pairs of Letzter–Kolb–Regelskis–Vlaar. Similar results, based on methods different from ours, were obtained in the work [2].

We also list classical super-spherical pairs (counterpart of i-quantum super-groups) in general linear and orthosymplectic Lie superalgebras for arbitrary grading which are quantizable as coideal subalgebras in standard quantum super-groups. We consider all polarizations, describe the Satake-type diagrams and prove that the corresponding subalgebras are non-trivial (do not exhaust all of $\mathfrak{g}$).

References

[1] D. Algethami, A. Mudrov, V. Stukopin. Quantum super-spherical pairs. J. Algebra **674** (2025), 276–313.

[2] Y. Shen, W. Wang. Quantum supersymmetric pairs of basic types. Comm. Math. Phys. **406** (2025), article 187, see also arXiv: `math.QA:2408.02874`.

Semisimple postLie algebras
V.Yu. Gubarev
Sobolev Institute of Mathematics, Omsk, Russia
wsewolod89@gmail.com

PostLie algebras were defined by B. Vallette in 2007 [4]. A postLie algebra is a linear space endowed with two bilinear products $\{,\}$ and $\cdot$ such that $\{,\}$ is Lie one and the following identities hold:

$$\begin{gathered}[x,y]\cdot z = x\cdot(y\cdot z) - y\cdot(x\cdot z),\\ x\cdot\{y,z\} = \{x\cdot y,z\} + \{y,x\cdot z\},\end{gathered} \tag{1}$$

where $[x,y] = x \cdot y - y \cdot x + \{x,y\}$.

PostLie algebras are connected with Yang–Baxter equation, operad theory, topology, braces.

Given a postLie algebra L, denote by $\mathfrak{n}$ and $\mathfrak{g}$ the Lie algebra $(L, \{,\})$ and $(L, [,])$ respectively. It is known [3] that given a Lie algebra $\langle L, \{,\}\rangle$ with an Rota–Baxter operator R of weight 1, we have that $(L, \{,\}, \cdot)$ is a postLie algebra, where $x \cdot y = \{R(x), y\}$.

Below, we consider only finite-dimensional objects defined over $\mathbb{C}$.

Theorem 1. [1] Let $(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})$ be a pair of Lie algebras, where $\mathfrak{g}$ is semisimple and $\mathfrak{n}$ is arbitrary. Suppose that $(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})$ admits a post-Lie algebra structure. Then $\mathfrak{n} \cong \mathfrak{g}$.

Theorem 1 implies, in particular, that given semisimple Lie algebras $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{n}$ which are connected in some postLie algebra, we derive that $\mathfrak{n} \cong \mathfrak{g}$ and all such postLie algebras come from Rota–Baxter operators of weight 1. Our goal is to describe all such postLie algebras, or equivalently, all corresponding Rota–Baxter operators, in the case where $\mathfrak{n} = L_1 \oplus \ldots \oplus L_m$, $L_i \cong L$, and L is a simple Lie algebra.

Theorem 2. Let L be a simple finite-dimensional complex Lie algebra and $\mathfrak{n} \cong L^m$. Suppose that R is a Rota–Baxter operator of weight 1 on $\mathfrak{n}$ such that $\mathfrak{g}$ is semisimple. Then up to conjugation with an automorphism of $\mathfrak{n}$, the R considered as an operator acting on $\mathbb{C}^m \otimes L$ has the form $R = P \otimes \mathrm{id}$, where P is a Rota–Baxter operator of weight 1 on the commutative algebra $\mathbb{C}^m$.

Theorem 2 describes all mentioned above structures, since all Rota–Baxter operators of weight 1 on the sum of fields are classified, see [2].

The research is supported by Russian Science Foundation (project 25–41–00005).

References

[1] D. Burde, K. Dekimpe, M. Monadjem. Rigidity results for Lie algebras admitting a post-Lie algebra structure. Int. J. Algebra Comput. **32** (2022), no. 8, 2022, 1495–1511.

[2] V. Gubarev. Rota–Baxter operators on a sum of fields. J. Algebra Appl. **19** (2020), no. 6, article 2050118.

[3] X. Ni, C. Bai, L. Guo. Nonabelian generalized Lax pairs, the classical Yang–Baxter equation and PostLie algebras. Comm. Math. Phys. **297** (2010), 553–596.

[4] B. Vallette. Homology of generalized partition posets. J. Pure Appl. Algebra **208** (2007), no. 2, 699–725.

New counterexamples to the Zariski Cancellation Problem in positive characteristic

A. Pal
HSE University, Faculty of Computer Science, Moscow, Russia
palananya1995@gmail.com

This talk is based on a joint work with Parnashree Ghosh [1].

In this talk, we define a new infinite family of counterexamples to the Zariski Cancellation Problem over a field of positive characteristic (in higher dimensions) and show that they are pairwise non-isomorphic and also non-isomorphic to the existing family of counterexamples, demonstrated by Neena Gupta in [2].

References

[1] P. Ghosh, A. Pal. A new family of counterexamples to the Zariski Cancellation Problem in positive characteristic. Proc. Amer. Math. Soc., to appear, see also arXiv: `math. AG/2404.13803` (2024).

[2] N. Gupta. On Zariski's Cancellation Problem in positive characteristic. Adv. Math. **264** (2014), 296–307.

Local and 2-local $\frac{1}{2}$-derivations on finite-dimensional Lie algebras

B.B. Yusupov
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan
baxtiyor_yusupov_93@mail.ru

The notion of δ-derivations was introduced by V.Filippov for Lie algebras in [3], [4]. The space of δ-derivations includes usual derivations ($\delta = 1$), anti-derivations ($\delta = -1$) and elements from the centroid. In [4] it was proved that prime Lie algebras, as a rule, do not have nonzero δ-derivations (provided $\delta \neq 1, -1, 0, \frac{1}{2}$), and all $\frac{1}{2}$-derivations of an arbitrary prime Lie algebra A over the field $\mathbb{F}$ of characteristic $p \neq 2, 3$ with a non-degenerate symmetric invariant bilinear form were described. It was proved that if A is a central simple Lie algebra over a field of characteristic $p \neq 2, 3$ with a non-degenerate symmetric invariant bilinear form, then any $\frac{1}{2}$-derivation φ has the form $\varphi(x) = \lambda x$ for some $\lambda \in \mathbb{F}$.

In [5], δ-derivations were investigated for prime alternative and non-Lie Malcev algebras over the ring of operators $\mathbb{F}$, and it was proved that alternative and non-Lie Malcev algebras with certain restrictions of $\mathbb{F}$ have no non-trivial δ-derivation.

Nowadays, local and 2-local operators have become popular for some non-associative algebras such as the Lie, Jordan, and Leibniz algebras. The notions of local derivations were introduced in 1990 by Kadison [7] and Larson, Sourour [8]. Later in 1997, Šemrl introduced the notions of 2-local derivations and 2-local automorphisms of algebras [9].

Investigation of local derivations on Lie algebras was initiated in [1] by Sh. Ayupov and K. Kudaybergenov. They proved that every local derivation on semisimple Lie algebras is a derivation and gave examples of nilpotent finite-dimensional Lie algebras with local derivations that are not derivations. In [2], local derivations of solvable Lie algebras are investigated, and it is shown that in the class of solvable Lie algebras there exist algebras that admit local derivations that are not derivations and also algebras for which every local derivation is a derivation.

Definition 1. Let $(\mathfrak{L}, [-,-])$ be an algebra with a multiplication $[-,-]$. A linear map φ is called a δ-derivation if it satisfies

$$\varphi[x,y] = \delta\big([\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)]\big),$$

where δ is from the ground field $\mathbb{F}$.

Note that 1-derivation is a usual derivation and (-1)-derivation is called an anti-derivation. If φ_1 and φ_2 are δ_1 and δ_2-derivations, respectively, then their commutator $[\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_1\varphi_2 - \varphi_2\varphi_1$ is a $\delta_1\delta_2$-derivation. The set of all δ-derivations, for the fixed δ, we denote by $\mathrm{Der}_\delta(\mathfrak{L})$. For the Lie algebras, the notion of anti-derivations coincides with the notion of reverse derivations, which was studied by Herstein in [6]. Note that the main example of $\frac{1}{2}$-derivations is the multiplication by an element from the ground field, i.e., $\varphi(x) = \lambda x$ for all $x \in \mathfrak{L}$. Such kind of $\frac{1}{2}$-derivations are called trivial $\frac{1}{2}$-derivations.

Definition 2. A linear map Δ is called a local δ-derivation, if for any $x \in \mathfrak{L}$, there exists a δ-derivation $\varphi_x \colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ (depending on x) such that $\Delta(x) = \varphi_x(x)$. The set of all local δ-derivations on $\mathfrak{L}$ we denote by $\mathrm{LocDer}_\delta(\mathfrak{L})$.

Definition 3. A map $\nabla \colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ (not necessary linear) is called a 2-local δ-derivation, if for any $x, y \in \mathfrak{L}$, there exists a δ-derivation $\varphi_{x,y} \in \mathrm{Der}_\delta(\mathfrak{L})$ such that

$$\nabla(x) = \varphi_{x,y}(x), \quad \nabla(y) = \varphi_{x,y}(y).$$

It should be noted that 2-local δ-derivation is not necessarily linear, but for any $x \in \mathfrak{L}$ and for any scalar λ, we have

$$\nabla(\lambda x) = \varphi_{x,\lambda x}(\lambda x) = \lambda\varphi_{x,\lambda x}(x) = \lambda\nabla(x).$$

In this work, we focus on investigating local and 2-local $\frac{1}{2}$-derivations. Since any $\frac{1}{2}$-derivation is a local and 2-local $\frac{1}{2}$-derivations, we are interested in local and 2-local $\frac{1}{2}$-derivation, which is not a $\frac{1}{2}$-derivation. Such local (resp. 2-local) $\frac{1}{2}$-derivations we call non-trivial local (resp. 2-local) $\frac{1}{2}$-derivations.

The following theorem is the main result of this note.

Theorem 1. Let $\mathfrak{L}$ be an algebra, whose all $\frac{1}{2}$-derivation are trivial. Then any local and 2-local $\frac{1}{2}$-derivation of $\mathfrak{L}$ is trivial.

Corollary 1. Any local and 2-local $\frac{1}{2}$-derivation of the following algebras is a $\frac{1}{2}$-derivation:

- finite-dimensional semisimple Lie algebras;
- finite-dimensional semisimple Jordan algebras;
- finite-dimensional semisimple Malcev algebras;
- finite-dimensional semisimple structurable algebras;
- finite-dimensional semisimple alternative algebras;
- finite-dimensional semisimple n-Lie algebras;
- The Lie algebra $\mathcal{W}(a,b)$ for $b \neq -1$, with basis $\{L_i, I_j\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ and the multiplication
$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}, \quad [L_m, I_n] = -(n+a+bm)I_{m+n}.$$
- The Virasoro algebra **Vir** with basis $\{C, L_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ and the multiplication
$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}C.$$
- The Block Lie algebra $B(q)$ for $q \notin \mathbb{Z}$ with basis $\{L_{m,i}\}_{m,i\in\mathbb{Z}}$ and multiplication
$$[L_{m,i}, L_{n,j}] = (n(i+q) - m(j+q))L_{m+n,i+j}.$$
- Galilean type algebras $\mathfrak{gal}(d)$, $\mathfrak{G}$ and $\widetilde{\mathfrak{g}}^{(\ell)}$.

References

[1] Sh. Ayupov, K. Kudaybergenov. Local derivations on finite-dimensional Lie algebras. Linear Algebra and its Applications **493** (2016), 381–398.
[2] Sh. Ayupov, A. Khudoyberdiyev. Local derivations on solvable Lie algebras. Linear and Multilinear Algebra **69** (2021), no. 7, 1286–1301.
[3] V. Filippov. On δ-derivations of Lie algebras. Siberian Mathematical Journal **39** (1998), no. 6, 1218–1230.
[4] V. Filippov. δ-Derivations of prime Lie algebras. Siberian Mathematical Journal **40** (1999), no. 1, 174–184.

[5] V. Filippov. On δ-derivations of prime alternative and Malcev algebras. Algebra and Logic **39** (2000), no. 5, 354–358.
[6] I. Herstein. Jordan derivations of prime rings. Proceedings of the American Mathematical Society **8** (1957), 1104–1110.
[7] R. Kadison. Local derivations. Journal of Algebra **130** (1990), 494–509.
[8] D. Larson, A. Sourour. Local derivations and local automorphisms of $B(X)$. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **51** (1990), 187–194.
[9] P. Šemrl. Local automorphisms and derivations on $B(H)$. Proceedings of the American Mathematical Society **125** (1997), 2677–2680.

Содержание

Для заметок

Для заметок

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка в пакете LaTeX, макет М.В. Игнатьев

Тираж 110 экз.

Отпечатано в типографии Принтономика
Адрес: г. Москва, пр-д Серебрякова, д. 14, стр. 12