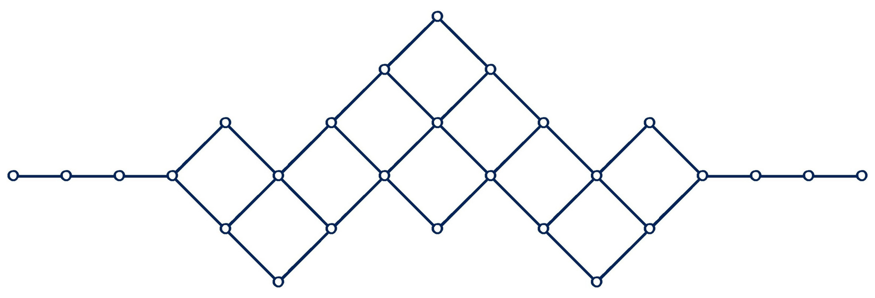
Десятая школа-конференция
"Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов"



Группы 6-транспозиций и связанные с ними алгебры.

Афанасьев Всеволод Альбертович

НГУ, Новосибирск

Основные понятия

Определение. Говорят, что группа G является группой n-транспозиций, если G порождена таким множеством D, что

- $x \in D \implies x^2 = e$
- $D^G = D$ (D - нормальное множество).
- $x, y \in D \implies |xy| \le n$.

Мотивирующий пример: группы перестановок $S_n,\ n > 1$ являются группами 3-транспозиций, при этом знакопеременные группы $A_n,\ n > 1$ являются группами 6-транспозиций.

Еще одним простым классом примеров являются группы диэдра D_{2n}: группы симметрий правильных n-угольников (они порождаются двумя инволюциями, произведение которых имеет порядок n).

Неформально определим Majorana алгебры, впервые рассмотренные в [1]:

1. Это коммутативные алгебры, порожденные осями – идемпотентами, удовлетворяющими некоторым свойствам (например, для оси a относительно оператора ad_a алгебра раскладывается в прямую сумму собственных подпространств, соответствующих $0,\ 1,\ 1/4,\ 1/32$).
2. На них можно задать билинейную форму $(\cdot,\cdot)$, такую, что для любой оси a $(a,a) = 1$ и $(uv, w) = (u, vw)$ для любых элементов алгебры $u,\ v,\ w$.

Данные свойства выполняются в алгебре Грайса, группой автоморфизмов которой является спорадическая группа Монстр $\mathbb{M}$.

Историческая справка

Изучение групп n-транспозиций было начатом Берндом Фишером: им был сделан первый шаг в на данный момент завершенной классификации групп при $n = 3$ [2]. Этот случай является единственным полностью завершенным – для других n известны лишь частичные результаты. При этом известно очень много интересных примеров таких групп, например некоторые конечные специальные унитаные, симплектические и ортогональные группы.

Также самая большая конечная спорадическая простая группа Монстр $\mathbb{M}$ является группой 6-транспозиций, а также Фишером были открыты 3 спорадические группы, носящие его имя.

При этом одной из развиваемых идей в теории групп является взаимодействие с алгебрами, для которых данные группы задают автоморфизмы. Эксплуатация этой связи позволяет как изучать алгебры, используя известную информацию об их симметриях, так и работать с группами, используя некоторые алгебраические конструкции. В частности, группы можно строить как группы автоморфизмов некоторых алгебр.

В работе [3] связь групп 6-транспозиций с довольно интересным классом алгебр выражается в следующем:

Утверждение. любая Majorana алгебра имеет своей группой автоморфизмов группу 6-транспозиций.

(В статье утверждение сформулировано для более широкого класса алгебр).

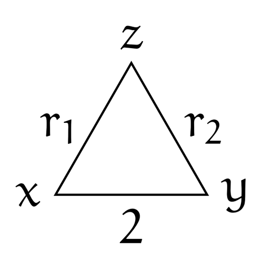
Таким образом резонной задачей является попытаться классифицировать группы 6-транспозиций и построить алгебры, автоморфизмы которых они задают. В нашей работе рассматривается первый нетривиальный случай этой задачи.

Основные результаты

Основным результатом работы является следующее утверждение: Будем рассматривать 3-порожденные группы 6-транспозиций с коммутирующей парой порождающих, то есть гомоморфные образы групп обладающих следующим представлением:

$$G = \{x, y, z | e = x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^2 = (xz)^{r_1} = (yz)^{r_2}\},$$

где $r_1,\ r_2 \le 6$.



Теорема Пусть $(r_1, r_2) \neq (6,6)$. Тогда все 3-порожденные группы 6-транспозиций с коммутирующей парой порождающих конечны и либо являются разрешимыми, либо являются гомоморфными образами одной из следующих групп

Группа	Наименование
G_1	$PGL(2,9)$
G_2	$2 \times ((2^5 : A_5) : 2^2)$
G_3	$(A_5 \times A_5) : 2^2$
G_4	$2 \times (2^{10} : PSL(2,11))$
G_5	$2 \times (3^{10} : PSL(2,11))$
G_6	$2^{10} : A_5$
G_7	$(2.M_{22}) : 2$
G_8	M_{23}

Напомним, что $H : N$ обозначает расщепляемое расширение группы H группой N (то же самое, что полупрямое произведение).

Замечание. разрешимые группы также известны, но опущены для краткости.

Для случая $(6,6)$ также имеются частичные результаты.

Идеи доказательств

Естественно вести рассуждения по значениям $r_1,\ r_2$.

В большом числе случаев оказывается полезной

Идея. найти подгруппы, похожие на группы 3-транспозиций.

В качестве такой подгруппы можно взять $\langle x^G \rangle$ (нормальное замыкание элемента x).

Данная идея позволяет (добавляя доп. соотношения) разобрать некоторые случаи, однако, когда эта идея становится неприменима (например при $r_1 = r_2 = 5$), либо когда изучать эту подгруппу становится слишком сложно мы применяем программы компьютерной алгебры (используя результаты из теории групп для получения определяющих соотношений).

Выводы и дальнейшие направления исследований

Среди полученных на данный момент групп уже достаточно много интересных примеров, что говорит о полезности продолжения классификации, в то же время сложность работы показывает, что текущие методы для этого трудноприменимы. При этом, эти результаты естественно можно потенциально использовать в дальнейшей работе над классификацией, поскольку в группе 6-транспозиций почти всегда можно найти подгруппу с конфигурацией, соответствующей рассматриваемому нами случаю.

В дальнейшем мы планируем завершить классификацию в этом случае, а также построить Majorana алгебры, для которых полученные группы задают автоморфизмы. Стоит отметить, что эта задача также обещает быть достаточно трудновыполнимой ввиду принципов работы текущих методов построения этих алгебр (размерность алгебры не меньше числа элементов в множестве D, которое часто оказывается достаточно большим, порой оно содержит более 1000 элементов.)

Список литературы

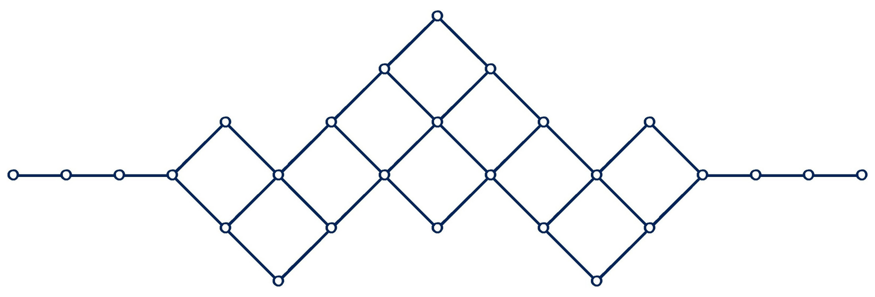
[1] A.A Ivanov, D.V. Pasechnik, Á. Seress, S.Shpectorov, Majorana representations of the symmetric group of degree 4. Journal of Algebra, 2010, vol. 324, pp. 2432–2463.

[2] Fischer, B. Finite groups generated by 3-transpositions. I. Invent Math 13, 232–246 (1971).

[3] J.I. Hall, F. Rehren, S. Shpectorov, Universal axial algebras and a theorem of Sakuma, Journal of Algebra, Volume 421, 2015, Pages 394-424,

Работа поддержана Математическим центром в Академгородке. Участие в школе поддержано грантом Фонда «БАЗИС»

Десятая школа-конференция
"Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов"



Горенштейновы алгебры и единственность аддитивных действий

Бельдиев Иван Сергеевич

НИУ ВШЭ, Москва

Основные понятия

Будем предполагать, что $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики ноль.

Определение 1. Аддитивное действие на алгебраическом многообразии X — это эффективное регулярное действие группы $\mathbb{G}_a^m \cong (\mathbb{K},+)^m$ на X с открытой орбитой. В случае, когда X — гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$, аддитивное действие на X называется индуцированным, если оно продолжается до регулярного действия на $\mathbb{P}^n$.

Мы будем рассматривать локальные конечномерные алгебры над полем $\mathbb{K}$. В работе [1] показано, что для конечномерной алгебры A условие локальности эквивалентно условию $A = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — идеал, состоящий из нильпотентных элементов.

Определение 2. Цоколь локальной алгебры A с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ — это идеал $\mathrm{Soc}A = \{a \in A \mid \mathfrak{m}a = 0\}$. A называется горенштейновой, если $\dim \mathrm{Soc}A = 1$.

Определение 3. Пусть проективная гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^n$ задана уравнением $f(z_0, z_1, \ldots, z_n) = 0$, где f — однородный многочлен. X называется невырожденной, если не существует линейной замены координат, уменьшающей число переменных в многочлене f.

Историческая справка

В работе [1] были доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Существует, с точностью до естественных эквивалентностей, взаимно-однозначное соответствие между индуцированными аддитивными действиями на гиперповерхностях в $\mathbb{P}^{n-1}$, не содержащихся ни в какой гиперплоскости, и парами (A, U), где A — локальная конечномерная алгебра размерности n с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, $U \subset \mathfrak{m}$ — подпространство коразмерности 1, порождающее алгебру A.

Пары (A, U) из Теоремы 1 называются H-парами.

Теорема 2. Индуцированные аддитивные действия на невырожденных гиперповерхностях степени d в $\mathbb{P}^{n-1}$ взаимно-однозначно оответствуют H-парам (A, U), где A — горенштейнова алгебра размерности n с цоколем $\mathfrak{m}^d$ и U — дополнительная к $\mathrm{Soc}A$ гиперплоскость в $\mathfrak{m}$.

Теорема 3. Пусть $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ — невырожденная гиперповерхность. Тогда существует не более одного индуцированного действия на X с точностью до эквивалентности.

Также в работе [1] высказана естественная гипотеза.

Гипотеза. Пусть $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ — вырожденная гиперповерхность, допускающая индуцированное аддитивное действие. Тогда существует не меньше двух индуцированных аддитивных действий на X с точностью до эквивалентности.

Наконец, в работе [1] показано, что если $X \subset \mathbb{P}^n$ — гиперповерхность степени d, допускающая индуцированное аддитивное действие, то $d \leqslant n$, а также отмечено, что при $n \leqslant 5$ существуют индуцированные аддитивные действия на невырожденных гиперповерхностях в $\mathbb{P}^n$ всех степеней от 2 до n.

Основные результаты

Мы доказываем Гипотезу, что приводит к следующей теореме.

Теорема 4. Пусть $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ — гиперповерхность, допускающая индуцированное аддитивное действие. Тогда такое действие единственно, если и только если X невырождена.

Также мы доказываем следующее предложение.

Предложение. Для любых натуральных n и d таких, что $2 \leqslant d \leqslant n-1$, в проективном пространстве $\mathbb{P}^{n-1}$ существует невырожденная гиперповерхность степени d, допускающая индуцированное аддитивное действие.

Идеи доказательств

Предложение мы доказываем, явно предъявляя соответствующие H-пары. Конструкция несколько отличается в зависимости от чётности числа $n-d$. Для примера укажем, как построить алгебру A при нечётном $n-d$. Если $d = n-2k-1$, то A задаётся образующими $S_1, S_2, \ldots, S_{2k+1}$ и соотношениями:

$$S_iS_j = 0 \text{ для всех } i, j,\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2k+1,$$
$$\text{кроме } (i,j) = (1,2),\ (3,4), \ldots, (2k-1, 2k),\ (2k+1, 2k+1),$$
$$S_1S_2 = S_3S_4 = \ldots = S_{2k-1}S_{2k} = S_{2k+1}^{n-2k-1}.$$

Для доказательства Теоремы 4 мы пользуемся конструкцией редукции, описанной в работе [1]. Конструкция следующая: если (A, U) — H-пара, отвечающая индуцированному аддитивному действию на гиперповерхности $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$, и J — максимальный по включению идеал алгебры A, содержащийся в U, то $(A/J, U/J)$ — H-пара, отвечающая индуцированному аддитивному действию на невырожденной гиперповерхности X_0, лежащей в проективном пространстве меньшей размерности и при подходящем выборе координат имеющей то же уравнение, что и X.
Исходную H-пару (A, U), соответствующую вырожденной гиперповерхности, мы заменяем на (A_0, U_0), получаемую из (A, U) с помощью описанной процедуры редукции; при этом $\dim A_0 < \dim A$. Для доказательства Гипотезы нам теперь нужно найти две неэквивалентные H-пары $(\tilde{A}, \tilde{U})$ и $(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{U}})$, переходящие при редукции в (A_0, U_0) и такие, что $\dim \tilde{A} = \dim \tilde{\tilde{A}} = \dim A$.
Основной шаг — построить две H-пары (A_1, H_1) и (A_2, H_2), переходящие при редукции в (A_0, H_0) и такие, что $\dim A_1 = \dim A_2 = \dim A_0 + 1$. Предположим, что A_0 имеет вид $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_k]/I$, где I — некоторый идеал. H-пару (A_1, U_1) мы строим добавлением новой переменной x_{k+1}, удовлетворяющей соотношениям $x_1x_{k+1} = x_2x_{k+1} = \ldots x_kx_{k+1} = x_{k+1}^2 = 0$, при этом $U_1 = U_0 \oplus \langle x_{k+1} \rangle$. Построение H-пары (A_2, U_2) более сложно, поэтому опишем его в общих чертах: вместо добавления новой переменной мы заменяем идеал I на некоторый идеал $\tilde{I} \subset I$ такой, что $\mathrm{codim}\tilde{I} = \mathrm{codim}I + 1$, и $A_2 = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]/\tilde{I}$.

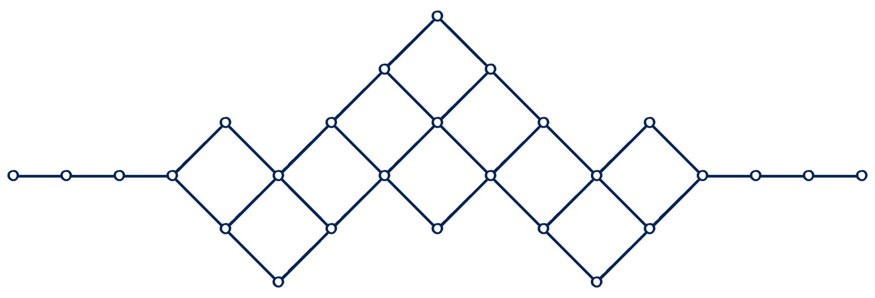
Выводы и дальнейшие направления исследований

Доказанная Гипотеза является хорошим дополнением к результату Теоремы 2.
Уточняя Предложение, естественно ставить вопросы о геометрических свойствах соответствующих гиперповерхностей: например, являются ли они нормальными или линейно нормальными, что можно сказать об их особых точках и т. п.

Список литературы

[1] И. В. Аржанцев, Ю. И. Зайцева, "Эквивариантные пополнения аффинных пространств", УМН, 77:4(466) (2022), 3–90

Работа поддержана грантом №23-21-00472 РНФ



Характеры неприводимых представлений унитреугольной группы глубины 2

Венчаков Михаил Сергеевич

Самарский университет, Самара

Основные понятия

G — конечная группа
$\varphi\colon G \to GL(V)$ — её представление
$\psi\colon G \to \mathbb{C}$ — характер представления φ
$\psi(g) = \operatorname{tr}\varphi(g)$, $g \in G$
$\operatorname{supp}(\psi) = \{g \in G \mid \psi(g) \neq 0\}$ — его носитель
$G = SL_n(\mathbb{F}_q)$
$B \subset G$ — борелевская подгруппа (верхнетреугольная)
$N \subset B$ — её унипотентный радикал
$\mathfrak{n} = \operatorname{Lie} N$, $N \curvearrowright \mathfrak{n}$, $N \curvearrowright \mathfrak{n}^*$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, * \in \mathbb{F}_q \right\}$$

$$\mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\}, \ \mathfrak{n}^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Метод орбит

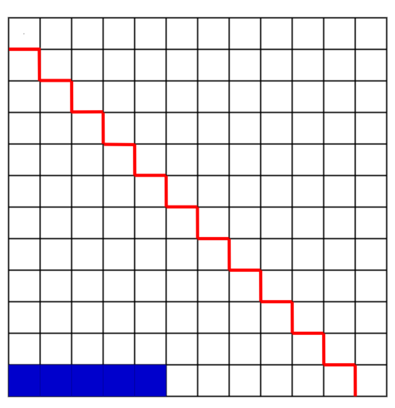
Группа N действует на $\mathfrak{n}^*$ по правилу $g.\lambda = (g\lambda g^{-1})_{\text{low}}$
1962 г., А.А. Кириллов: $\operatorname{Irr} N \leftrightarrow \mathfrak{n}^*/N$
В этом случае, значение характера, соответствующего орбите формы Ω на элементе g группы N равно:

$$\psi_\Omega(g) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \sum_{\mu \in \Omega} \theta(\mu(\ln(g))), \ \theta\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$$

Для $n \leqslant 7$: А.Н. Панов, М.В. Игнатьев в 2007 классифицировали орбиты коприсоединённого действия

Стратификация

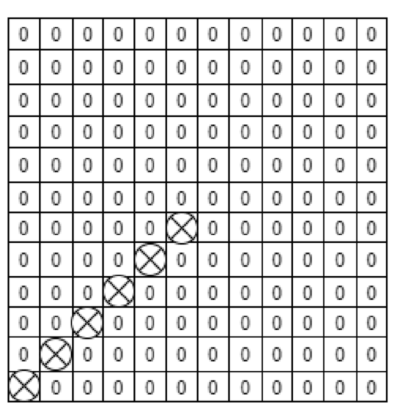
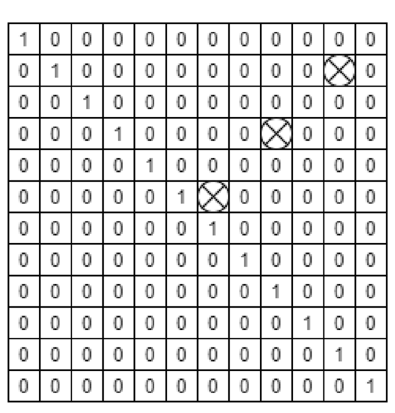
$\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n} \supset \mathfrak{n}_1 \supset \mathfrak{n}_2 \supset \mathfrak{n}_3 \cdots$



Характер глубины k — характер максимальной размерности в $\mathfrak{n}_k$

Регулярные характеры

Регулярные характеры — характеры максимальной размерности

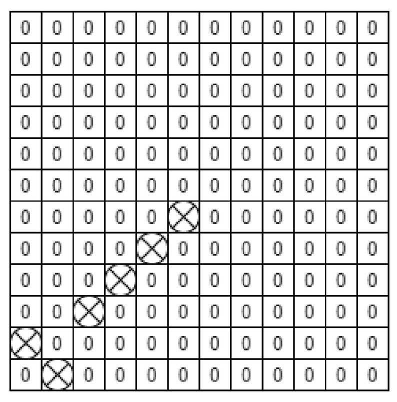
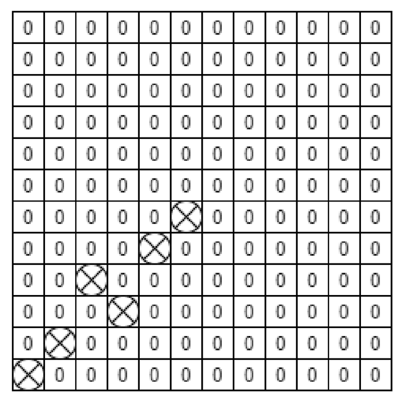



А.А. Кириллов, С.А.М. Andre, 2001

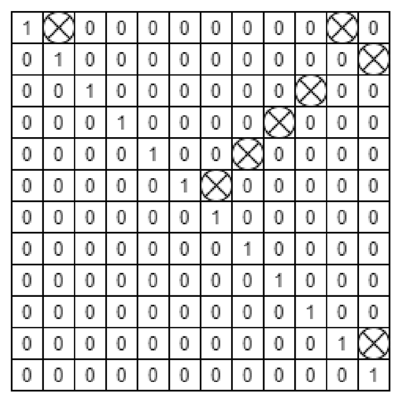
Субрегулярные характеры

Субрегулярные орбиты соответствуют характерам предмаксимальной размерности

Классификация : А.Н. Панов, М.В. Игнатьев, 2007

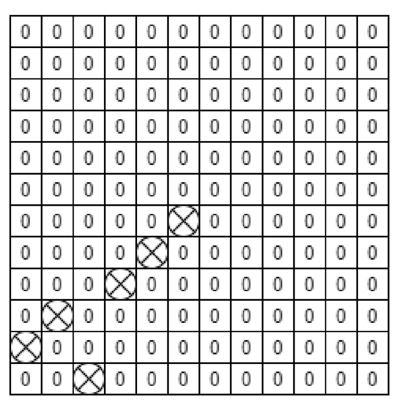
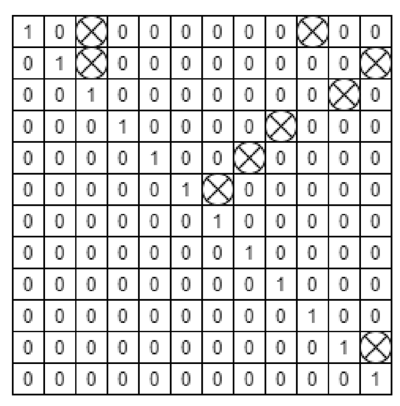
Элементы носителя имеют вид



М.В. Игнатьев, 2007

Характеры глубины 2

Характеры глубины 2 — характеры размерности q^{M-2}

Основная теорема

Теорема.
а) Найден носитель $\operatorname{supp}(\psi) = \underset{D,\xi}{\cup} K_{D,\xi}$.
б) Вычислено значение $\psi(K_{D,\xi}) = q^{m_D} \prod_{(i,j)\in D} \theta(\dots)$.
Где $K_{D,\xi}$ — класс сопряжённости элемента $1 + x_{D,\xi} = \sum\limits_{(i,j)\in D} \xi_{j,i} e_{i,j}$

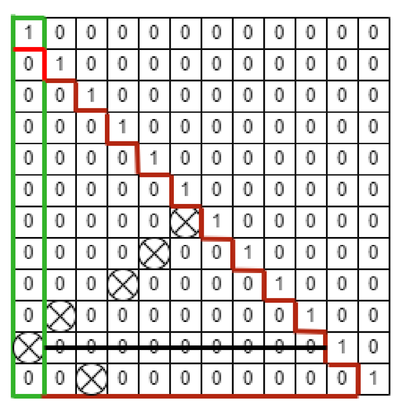
Метод Макки

$$\{\Psi_{k,\psi} = \operatorname{Ind}_{AB^k}^{G} k_0 \psi_0\} = \operatorname{Irr} G$$

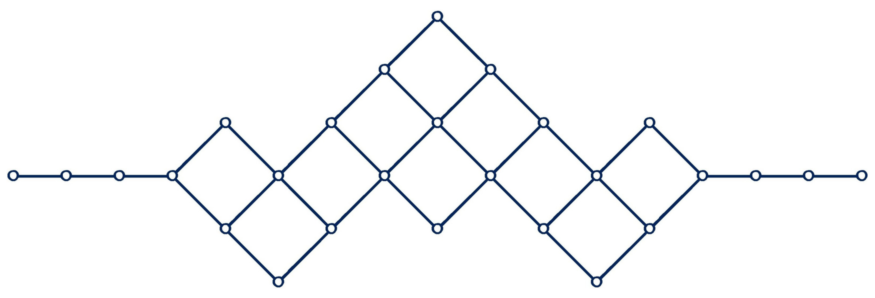
Где $G = A \rtimes B$, $A \lhd G$, $A \cap B = \{e\}$, $G = AB$
A — абелева, $g = g_A g_B$, π_A, $\pi_B\colon G \to A, B$
$k \in \operatorname{Irr} A$, $\psi \in \operatorname{Irr} B^k$
$k_0 = k \circ \pi_A$, $\psi_0 = \psi \circ \pi_B$

Схема доказательства

$k(g) = \Theta(\xi_{n-1,1} g_{1,n-1})$, $\xi_{n-1,1} \neq 0$



Работа поддержана грантом №22-3-5-8-1 фонда "Базис"



Теорема Гурвица, и некоторые ее применения

Елисеев Роман

СПбГУ МКН, Санкт-Петербург

Основные понятия

Речь пойдет о некоторых премененииях теоремы Гурвица о конечности группы автоморфизмов алгебраической кривой рода 2 и выше. Также приведем доказательство теоремы несколько иное, чем в первоисточнике [1] с помощью теории линейных алгебраических групп.

Напомним некоторые понятия:

Алгебраическая кривая это алгебраическое многообразие размерности 1.

Род алгебраической кривой при этом совпадает с топологическим родом.

Граф Кэли есть граф, сопоставляемый группе с выделенной системой образующих, вершинами графа являются элементы группы, и соеденены ребрами в точности те вершины, что получаются домножением на элементы из системы образующих

Также отметим, что под автоморфизмами подразумеваются сохраняющие ориентацию конформные отображения.

Историческая справка

В работе [1] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть X - гладкая связная Риманова поверхность рода $g \geq 2$. Тогда ее группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X) \leq 84(g-1)$

Пусть X - проективная алгебраическая кривая рода g. Имеют место следующие случаи:

1. $g = 0, X \cong \mathbb{P}^1, \mathrm{Aut}(X) \cong \mathrm{PGL}_2(k)$;
2. $g = 1$, X - эллиптическая кривая она является компактной группой Ли, $\mathrm{Aut}(X) \cong X$
3. $g > 1$, группа Aut(X) конечна

Нас интересует последний случай.

Идея доказательства

Группа автоморфизмов кривой с ненулевым каноническим классом - линейная алгебраическая и в случае если она бесконечна она содержит G_m или G_a. Замыкание любой нетривиальной орбиты G_m или G_a является рациональной кривой - противоречие.

Некоторые применения

Определим род графа как минимальный род Римановой поверхности в который граф вкладывается планарно.

Определим род группы G как род соответствующего графа Кэли.

Тогда имеют место следующие утверждения, доказанные в [2]

1. Существует конечное количество групп фиксированного рода $g > 1$
2. Если граф Кэли группы планарно вкладывается в бутылку Клейна, тогда группа имеет граф Кэли, вкладываемый планарно в тор
3. Существует ровно одна группа с родом равным 2. Она имеет порядок 96 и изоморфна следующей группе:
$< x, y, z : x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^2 = (yz)^3 = (xz)^8 = 1, [y, (xz)^4] = 1 >$

Примеры

Интересно при этом, что верхняя оценка на порядок группы достигается, примером тому является квартика Клейна с группой автоморфизмов изоморфной PSL(2, 7).

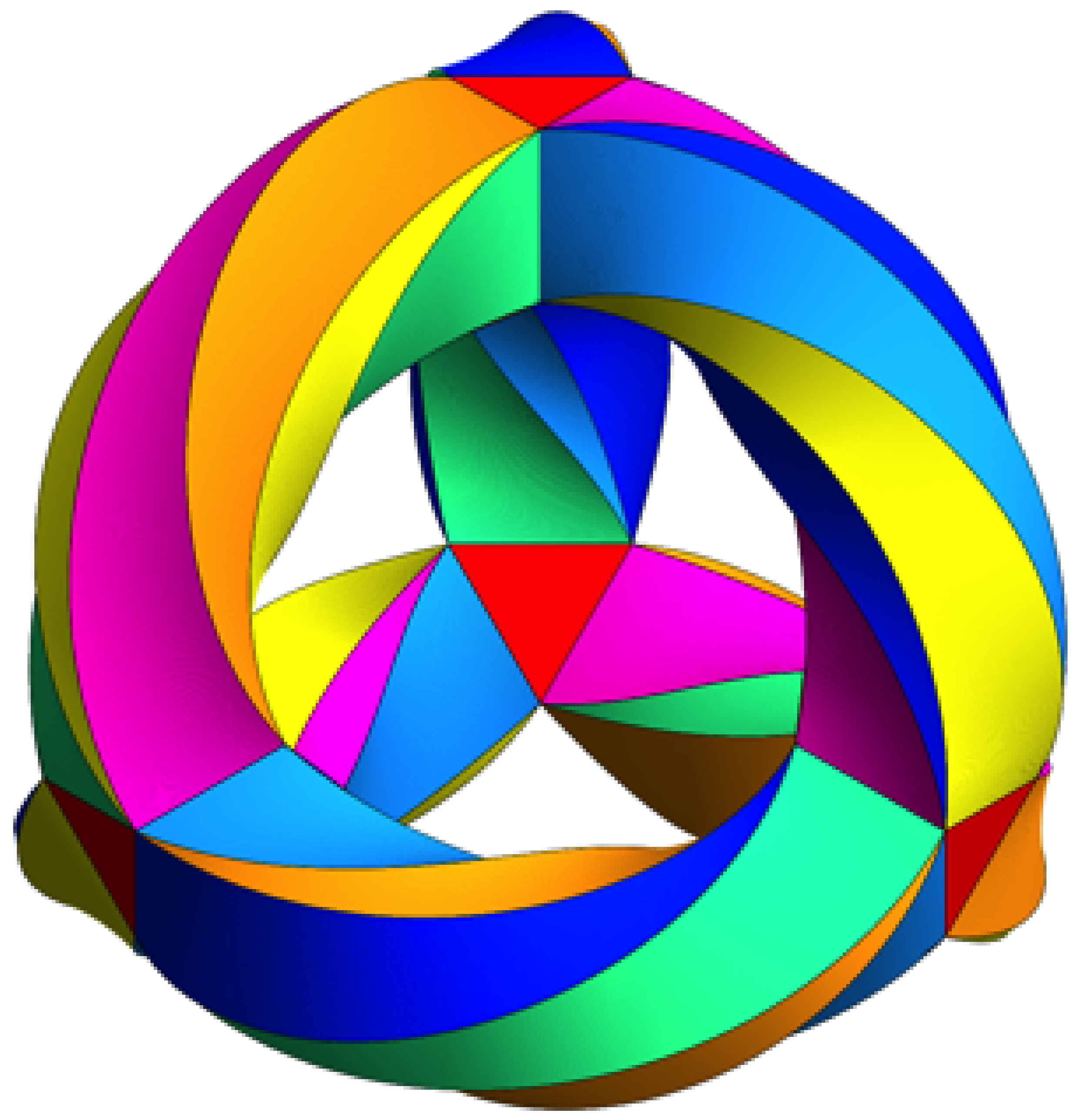


Рис. 1: Квартика Клейна

Группа	Род	Количество поверхностей
PSL $(2, 7)$	3	1
PSL $(2, 8)$	7	1
PSL(2,13)	14	3
PSL(2,27)	118	1
PSL(2,29)	146	3
PSL(2,41)	411	3
PSL(2,43)	474	3
J1	2091	7
PSL(2,71)	2131	3
PSL(2,83)	3404	3
PSL(2,97)	5433	3
J2	7201	5
PSL(2,113)	8589	3

Примеры достижения верхней оценки

Список литературы

[1] Hurwitz, A. Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich. Math. Ann. 41, 403–442 (1892). https://doi.org/10.1007/BF01443420

[2] Topological Graph Theory. Front Cover. Jonathan L. Gross, Thomas W. Tucker, Brad G. Osgood. Wiley, 305, 316 (1987)

Десятая школа-конференция
"Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов"

Обобщение теоремы ABC

Киктева Вероника Владимировна

Высшая школа экономики,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Основные понятия

Определения. Дифференцирование алгебры B над полем $\mathbb{K}$ – это линейное отображение $D\colon B \to B$, удовлетворяющее тождеству Лейбница.
Дифференцирование называется локально нильпотентным (обозначение: LND), если для каждого $b \in B$ существует такое натуральное число n, что $D^n(b) = 0$.
В этом случае D порождает на B степенную функцию:

$$\deg_D(b) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid D^{n+1}(b) = 0\}$$

для ненулевого $b \in B$ и $\deg_D(0) = -\infty$.
Ядро локально нильпотентного дифференцирования факториально замкнуто ([1], Principle 1).
Утверждение 1 ([1], Principle 11 (d)). Дано $D \in \mathrm{LND}(B)$ и $A = \mathrm{Ker}\, D$. Пусть $t \in B$ – локальный слайс для D [Такой элемент, что $D^2(t) = 0$, но $D(t) \neq 0$.] Тогда $B_{Dt} = A_{Dt}[t]$, где $B_{Dt} = \{ab^{-1} \in \mathrm{Quot}\, B \mid a \in B,\ b \in \{(Dt)^i\}_{i \geq 0}\}$, аналогично для A.
Если q – многочлен от одной переменной, то $n_0(q)$ будет означать количество различных корней q.
Существенную роль в доказательствах результатов играет следующая теорема:
Утверждение 2 ([2], Theorem 1.3). Пусть $n \geq 3$ и $f_1, \ldots, f_n$ – такие многочлены над $\mathbb{C}$, что $f_1 + \ldots + f_n = 0$, и среди них есть хотя бы один непостоянный многочлен. Пусть для любых $1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq n$

$$f_{i_1} + \ldots + f_{i_s} = 0 \Longrightarrow \text{НОД}(f_{i_1}, \ldots, f_{i_s}) = 1.$$

Тогда

$$\max_{1 \leq k \leq n} \deg(f_k) \leq (n-2)(n_0(f_1) + \ldots + n_0(f_n) - 1).$$

Основные результаты

Пусть B – аффинная $\mathbb{C}$-область целостности, ненулевое $D \in \mathrm{LND}(B)$.
Числа $m, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Даны ненулевые элементы $a_1, \ldots, a_m \in \mathrm{Ker}\, D$, натуральные $k_{11}, \ldots, k_{1n_1}, \ldots, k_{m1}, \ldots, k_{mn_m}$ и $b_{11}, \ldots, b_{1n_1}, \ldots, b_{m1}, \ldots, b_{mn_m} \in B$.
Пусть

$$f_1 := a_1 b_{11}^{k_{11}} \ldots b_{1n_1}^{k_{1n_1}},\ \ldots,\ f_m := a_m b_{m1}^{k_{m1}} \ldots b_{mn_m}^{k_{mn_m}} \in B.$$

Теорема 1. Пусть $f_1 + \ldots + f_m = 0$, для любого натурального $s < m$ для любых $1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq m$, верно $f_{i_1} + \ldots + f_{i_s} \neq 0$ и $\text{НОД}(f_1, \ldots, f_m) = 1$. Выполняется

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{k_{ij}} \leq \frac{1}{m-2}.$$

Тогда $b_{ij} \in \mathrm{Ker}\, D$ для $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n_i$.

Теорема 2. Пусть для любого натурального $s \leq m$ для любых $1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq m$, выполняется $f_{i_1} + \ldots + f_{i_s} \neq 0$. При этом

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{k_{ij}} \leq \frac{1}{m-1}$$

и $f_1 + \ldots + f_m \in \mathrm{Ker}\, D$.
Тогда $b_{ij} \in \mathrm{Ker}\, D$ для $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n_i$.

Идеи доказательств

Пусть $A = \mathrm{Ker}\, D$, и $t \in B$ – локальный слайс для D (он существует, так как D локально нильпотентно и не является тождественно равным нулю). Тогда из утверждения 1 следует, что можно осуществить вложение $B \subset K[t] = K^{[1]}$, где $K = \overline{\mathrm{Quot}\, A}$, а степень элементов B как многочленов по t совпадает со степенью, индуцированной локально нильпотентным дифференцированием D: $\deg_t = \deg_D =: \deg$. В частности, те элементы из B, что являются константами как многочлены от t, лежат в ядре D, верно и обратное.
Без ограничения общности можно принять

$$\deg(f_1) \geq \ldots \geq \deg(f_m),$$

и тогда для любых $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n_i$:

$$\deg(b_{ij}) = \frac{k_{ij}\deg(b_{ij})}{k_{ij}} \leq \frac{\sum_{l=1}^{n_i} k_{il}\deg(b_{il})}{k_{ij}} = \frac{\deg(f_i)}{k_{ij}} \leq \frac{\deg(f_1)}{k_{ij}}.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть существует i: $1 \leq i \leq m$ такое, что выполняется $\deg(f_i) > 0$. Следовательно, $\deg(f_1) > 0$.
Никакая подсумма из s элементов, где $s < m$, не обнуляется, а для $f_1 + \ldots + f_m = 0$ выполняется $\text{НОД}(f_1, \ldots, f_m) = 1$. Таким образом, выполняются условия утверждения 2, откуда следует:

$$\deg(f_1) \leq (m-2)(n_0(f_1) + \ldots + n_0(f_m) - 1) \leq$$

$$\leq (m-2)\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} n_0(b_{ij}) - 1\right) \leq (m-2)\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \deg(b_{ij}) - 1\right) \leq$$

$$\leq (m-2)\left(\deg(f_1)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{1}{k_{ij}} - 1\right).$$

Значит,

$$\deg(f_1)\left(\frac{1}{m-2} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{1}{k_{ij}}\right) \leq -1 < 0,$$

что приводит к противоречию. Значит, этот случай был невозможен, и все f_i являются константами, т.е. элементами поля K и лежат в ядре дифференцирования D. Пользуясь фактом о факториальной замкнутости ядра, можно заключить, что и элементы b_{ij} тоже лежат в ядре D и являются элементами поля K.
Доказательство теоремы 2. Обозначив $f_{m+1} := -f_1 - \ldots - f_m$, можно заметить, что $f_{m+1} \in K^{\times}$ и $\deg(f_{m+1}) = n_0(f_{m+1}) = 0$. Пусть не все f_i – константы. Тогда выполняются условия утверждения 2 для $f_1 + \ldots + f_m + f_{m+1} = 0$:

$$\deg(f_1) \leq (m-1)(n_0(f_1) + \ldots + n_0(f_m) + n_0(f_{m+1}) - 1) \leq$$

$$\leq (m-1)\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} n_0(b_{ij}) - 1\right) \leq (m-1)\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \deg(b_{ij}) - 1\right) \leq$$

$$\leq (m-1)\left(\deg(f_1)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{1}{k_{ij}} - 1\right).$$

Таким образом,

$$\deg(f_1)\left(\frac{1}{m-1} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{1}{k_{ij}}\right) \leq -1 < 0,$$

что приводит к противоречию. Значит, этот случай был невозможен, и все f_i являются константами, т.е. элементами поля K и лежат в ядре дифференцирования D. Следовательно, и элементы b_{ij} – тоже.

Выводы

Теорема 1 является обобщением следующего утверждения:
Теорема ABC [1]. Пусть B – $\mathbb{K}$-область целостности, где $\mathbb{K}$ – поле нулевой характеристики. Если попарно взаимно простые $x, y, z \in B$ удовлетворяют равенству $x^a + y^b + z^c = 0$ для $a, b, c \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ таких, что $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} \leq 1$, то для любого $D \in \mathrm{LND}(B)$ верно $\mathbb{K}[x, y, z] \subseteq \mathrm{Ker}\, D$.

Теорема 2 позволяет в частном случае ответить на следующий вопрос:
Вопрос ([1], Question 11.9). Пусть B – аффинная $\mathbb{C}$-область целостности, дан многочлен $p \in \mathbb{C}^{[m]},\ m \geq 2$ такой, что для любого ненулевого $\delta \in \mathrm{LND}(\mathbb{C}^{[m]}),\ \delta(p) \neq 0$. Пусть для некоторых алгебраически независимых $a_1, \ldots, a_m \in B$ и ненулевого $D \in \mathrm{LND}(B)$ верно $D(p(a_1, \ldots, a_m)) = 0$. Верно ли, что $D(a_i) = 0\ \forall i = 1, \ldots, m$?

Список литературы

[1] G. Freudenburg, Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol. 136 (Springer, Berlin, 2017).

[2] Michiel de Bondt, Another generalization of Mason's ABC-theorem. Preprint, 2018

Параболические подгруппы высоты 1 в $GL(n)$

Никитина Алина Владимировна

Самарский университет, Самара

Основные понятия

В этой работе в качестве основного поля рассматривается поле K нулевой характеристики. Рассмотрим параболическую подгруппу P в $Gl(n)$, которая является прямым произведением подгруппы Леви L и унипотентного радикала U, и соответствующую ей подалгебру Ли $\mathfrak{p}$, которая представляет из себя прямую сумму нильрадикала $\mathfrak{u}$ и блочно-диагональной подалгебры ℓ.

Следуя работе [1], введём следующие определения. Пусть Δ — система корней, Δ^+ — система положительных корней, E_α — корневые векторы. Обозначим за $\Delta_\mathfrak{u}^+ = \{\alpha \in \Delta \mid E_\alpha \in \mathfrak{u}\}$. Аналогично определяется Δ_ℓ^+. Множество $S \subset \Delta_\mathfrak{u}^+$ назовём базой, если S — расстановка ладей, то есть для любых двух $\xi, \xi' \in S$ выполняется $\xi' - \xi \notin \Delta^+$, и для любого корня $\gamma \in \Delta_\mathfrak{u}^+$ найдётся $\xi \in S$ такой, что $\gamma - \xi \in \Delta_\ell^+$.

Пару элементов ξ, ξ', где $\xi, \xi' \in S$, назовём допустимой, если $\exists\ \alpha_q \in \Delta_\ell^+$ такой, что ξ, α_q, ξ' образуют цепочку. Множество допустимых пар обозначим за Q. Множество корней вида $\{\alpha_q + \xi'\}$ обозначим через Φ.

Будем рассматривать формальную матрицу $X = (x_{ij})$, где $x_{ij} = 0$ при $(i,j) \notin \Delta_\mathfrak{u}^+$. Каждому корню $\gamma = (p,t) \in \Delta^+$ поставим в соответствие множество

$$S(\gamma) = \{\xi = (i,j) \in S \mid i > p, j < t\}.$$

Рассмотрим $M_\gamma(X)$ — минор матрицы X с системой строк $\mathrm{row}(S(\gamma) \cup \{\gamma\})$ и столбцов $\mathrm{col}(S(\gamma) \cup \{\gamma\})$. Для всех $q = (\xi, \xi') \in Q$ можно построить многочлен

$$L_q(X) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_q} M_{\xi + \alpha_1}(X) M_{\alpha_2 + \xi'}(X), \qquad (1)$$

$\alpha_q \in \Delta_\ell^+$ — корень, соответствующий q, а $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta_\mathfrak{u}^+ \cup \{0\}$. Пусть h_p — элемент подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ такой, что $h_p(\alpha) = 0$ для любого простого $\alpha \in \Delta_\ell^+$ и $h_p(\alpha) = 1$ для любого простого $\alpha \notin \Delta_\ell^+$.

Определение. Высотой параболической подгруппы назовём $\max\{\xi(h_p) \mid \xi \in S\}$.

Из определения следует, что подгруппа имеет высоту 1 тогда и только тогда, когда $\xi(h_p) = 1$ для любых $\xi \in S$.

Пусть $n_1, \ldots, n_s$ — размеры блоков параболической подгруппы P в порядке их следования по диагонали. И пусть $I_1, \ldots, I_s$ — разбиение отрезка $[1,n]$ на отрезки, соответствующие размерам блоков.

Утверждение. Параболическая подгруппа P имеет высоту 1 $\Leftrightarrow n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_s$, или $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_s$, или $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_{s_0} \geqslant n_{s_0+1} \geqslant \ldots \geqslant n_s$ для некоторого s_0.

Рассмотрим следующий многочлен:

$$F_{k,j}(X) = \sum_{J \subset I_k,\ |J| = j} M^J_{R_k^-}(X) M_J^{R_k^+}(X). \qquad (2)$$

Здесь R_k^- — отрезок длины j, содержащийся в I_{k-1} и примыкающий к его концу, а R_k^+ — отрезок длины j, содержащийся в I_{k+1} и примыкающий к его началу, а $2 \leqslant k \leqslant s-1$.

Пусть $Y = (y_{ij})$ — такая матрица, что
1) $y_{ij} \neq 0$, если $\xi = (i,j) \in S$;
2) y_{ij} — любой, если $\gamma = (i,j) \in \Phi$;
3) $y_{ij} = 0$ в остальных случаях.
Множество таких матриц Y обозначим $\mathcal{Y}$.

Рассмотрим открытое в $\mathfrak{u}$ подмножество

$$\Omega = \{X \in \mathfrak{u} \mid M_\xi(X) \neq 0, F_{k,j}(X) \neq 0,\ \forall \xi \in S, \forall k \in [2, s-1]\}.$$

Основные результаты

Теорема. Пусть P — параболическая подгруппа высоты 1. Тогда
1) Для всякого $X \in \Omega$ найдётся $g \in N$ такой, что $Ad_\xi X = Y \in \mathcal{Y}$. Более того, матрица Y определяется по X однозначно.
2) $K(\mathfrak{u})^N$ свободно порождается элементами $\{M_\xi\} \cup \{L_q\},\ \xi \in S, q \in Q$.

Утверждение пункта 1 теоремы является новым результатом. Утверждение пункта 2 было доказано в работах [2] и [3].

Пример

Пусть $n = 10,\ n_1 = 2,\ n_2 = 4,\ n_3 = 2$.

В этом случае $I_1 = [1,2]$, $I_2 = [3,6]$, $I_3 = [7,8]$. База S состоит из корней $(1,3), (2,4), (5,8), (6,7)$. Множество Q состоит из допустимых пар $((1,4),(6,7)), ((1,4),(5,8)), ((2,3),(6,7)), ((2,3),(5,8))$. Тогда Φ содержит корни $\{(3,7),(3,8),(4,7),(4,8)\}$. Обозначив знаком $\otimes$ элементы из S и знаком $\times$ элементы из Φ, получаем следующую схему.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1				$\otimes$				
2			$\otimes$					
3							$\times$	$\times$
4							$\times$	$\times$
5								$\otimes$
6							$\otimes$	
7								
8								

В этом примере

$F_{2,1}(X) = x_{23}x_{37} + x_{24}x_{47} + x_{25}x_{57} + x_{26}x_{67}$,

$F_{2,2}(X) = \sum_{3 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant 6} M_{12}^{j_1 j_2} M^{78}_{j_1, j_2} = M_{12}^{34}M_{34}^{78} + M_{12}^{35}M_{35}^{78} + M_{12}^{36}M_{36}^{78} + M_{12}^{45}M_{45}^{78} + M_{12}^{46}M_{46}^{78} + M_{12}^{56}M_{56}^{78}$.

Список литературы

[1] А. Н. Панов, В. В. Севостьянова, "Регулярные N–орбиты в нильрадикале параболической подалгебры", Вестник СамГУ — Естественнонаучная серия. 2007. №7(57); arXiv:1203.2754.

[2] В. В. Севостьянова, "Алгебра инвариантов присоединенного действия унитреугольной группы в нильрадикале параболической подалгебры", Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер., 2010, № 2(76), 72–83; arXiv:1203.4899.

[3] В. В. Севостьянова, "Поле инвариантов присоединённого действия унитреугольной группы в нильрадикале параболической подалгебры", Вопросы теории представлений алгебр и групп. 19, Зап. научн. сем. ПОМИ, 375, ПОМИ, СПб., 2010, 167–194; J. Math. Sci. (N. Y.), 171:3 (2010), 400–415; arXiv:1203.3000.

Работа поддержана грантом № 22-3-5-5-1 фонда "Базис"

Десятая школа-конференция
"Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов"

Многочлены Ласку и подразбиение многогранника Гельфанда-Цетлина

Преснова Екатерина Денисовна

НИУ ВШЭ, Москва

Многочлены Ласку

Оператор $\pi_i^{(\beta)}$, действующий на кольце многочленов $\mathbb{Z}[\beta][x_1, x_2, \ldots]$, определяется следующим образом:

$$\pi_i^{(\beta)}(f) = \frac{x_i f + \beta x_i x_{i+1} f - s_i(x_i f + \beta x_i x_{i+1} f)}{x_i - x_{i+1}} \tag{1}$$

Пусть α — бесконечная последовательность неотрицательных целых чисел, где число положительных элементов конечно, а α_i — i-е вхождение. С помощью операторов $\pi_i^{(\beta)}$ можно получить многочлены Ласку

$$\mathcal{L}_\alpha^{(\beta)} = \begin{cases} x^\alpha & \text{если } \alpha \text{ - разбиение (т.е. } \alpha_i \geq \alpha_{i+1}) \\ \pi_i^{(\beta)}(\mathcal{L}_{s_i\alpha}^{(\beta)}) & \text{иначе} \end{cases}$$

Многочлены k_α "Key polynomials", они же характеры Демазюра, тесно связаны с многочленами Ласку:

$$\mathcal{L}_\alpha^{(0)} = k_\alpha \tag{2}$$

Многогранник Гельфанда-Цетлина

Пусть λ — последовательность строго возрастающих целых чисел $\lambda = (\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n)$. Многогранник Гельфанда-Цетлина $GZ(\lambda)$, соответствующий λ, задается в пространстве $\mathbb{R}^d$ с помощью следующих неравенств:

$$\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_3 & & \ldots & & \lambda_n \\ & x_{11} & & x_{12} & & \ldots & & x_{1n-1} & \\ & & x_{21} & & \ldots & & x_{2n-2} & & \\ & & & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ & & & & x_{n-11} & & & & \end{array}$$

где в любом треугольнике $\begin{smallmatrix} a & & b \\ & c & \end{smallmatrix}$ числа a, b, c удолетворяют неравентствам $a \leq c \leq b$

В работе [1] описан способ сопоставить некоторым граням $GZ(\lambda)$ перестановку, а также проекция $\pi : GZ(\lambda) \to Wt(\lambda)$ многогранника Гельфанда-Цетлина в весовой многогранник представления GL_n со старшим весом λ.

Характер некоторого подмножества $S \subset \mathbb{R}^d$ определяется как формальная сумма экспонент $e^{\pi(z)}$ по всем целым точкам множества S

$$ch(S) = \sum_{z \in S \cap \mathbb{Z}^d} e^{\pi(z)}. \tag{3}$$

Теорема 1. Характеры Демазюра равны характерам соответствующего объединения набора граней многогранника Гельфанда-Цетлина

$$k_{u(\lambda)} = chD_\lambda^u = ch(\bigcup_{w(F)=u} F). \tag{4}$$

Формулировка задачи

В работе [1] описано соответствие целых точек многогранника Гельфанда-Цетлина мономам соответствующего характера Демазюра. Основной целью нашей работы является комбинаторное описание многочленов Ласку в терминах подразбиений многогранника Гельфанда-Цетлина, где мономы при β^i будут соответствовать клеткам размерности i

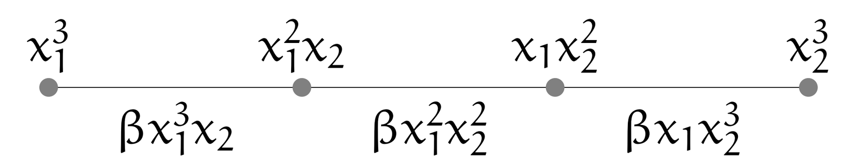
Примеры

Пример 1.

Рассмотрим $\lambda = (0, 3)$. Тогда соответствующий многогранник Гельфанда-Цетлина будет отрезком.

Многочлен Ласку равен $\mathcal{L}_{(0,3)}^{(\beta)} = x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3 + \beta x_1^3x_2 + \beta x_1^2x_2^2 + \beta x_1x_2^3$.

Получаем соответствие:



Пример 2.

Теперь рассмотрим $\lambda = (0, 1, 3)$. Многогранник в размерности 3 изображен на рис.1.

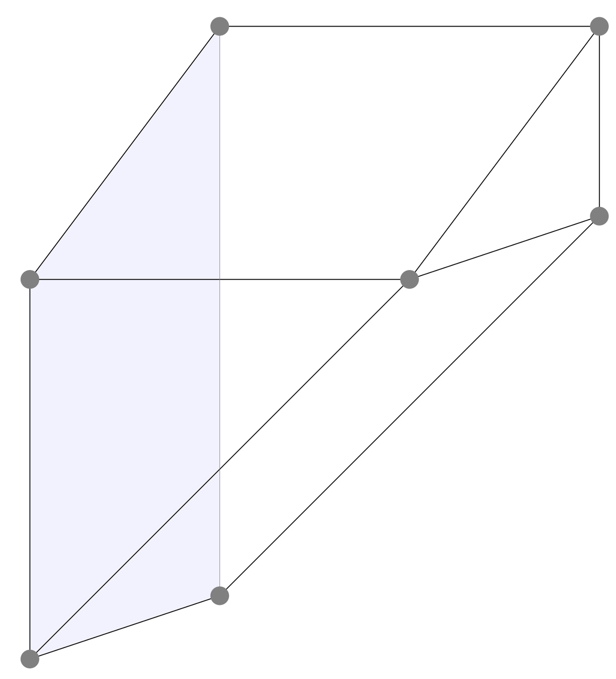


рис.1

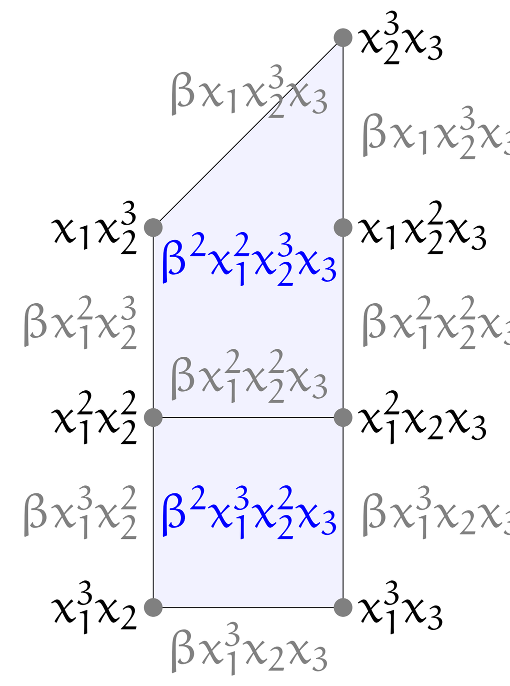


рис.2

На рис.2 отображено соответствие многочлена Ласку выделенной грани многогранника.

$\mathcal{L}_{(0,3,1)}^{(\beta)} = x_1^3x_2 + x_1^3x_3 + x_1^2x_2^2 + x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^3 + x_1x_2^2x_3 + x_2^3x_3 + \beta x_1^3x_2^2 + 2\beta x_1^3x_2x_3 + \beta x_1^2x_2^3 + 2\beta x_1^2x_2^2x_3 + 2\beta x_1x_2^3x_3 + \beta^2x_1^3x_2^2x_3 + \beta^2x_1^2x_2^3x_3$

Основные результаты и дальнейшие направления исследований

1) На данный момент задача полностью решена для малых размерностей, т.е. для $n = 2, 3$.

2) Есть гипотеза, на какие именно «куски» необходимо разрезать многогранники в случае произвольного n.

Список литературы

[1] V. A. Kirichenko, E. Yu. Smirnov, and V. A. Timorin, Schubert calculus and Gelfand-Zetlin polytopes, Uspekhi Mat. Nauk 67 (2012), no. 4(406), 89–128. MR 3013846

[2] Tianyi Yu, "Set-valued tableaux rule for Lascoux polynomials"arXiv:2110.00164

Работа поддержана грантом Junior Leader фонда «Базис»

Десятая школа-конференция
"Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов"

L_p-аппроксимации для параболических дифференциальных уравнений

Постерный доклад

Смирнова Анна Сергеевна

НИУ ВШЭ, Нижний Новгород

Аннотация

В работе рассматривается задача Коши для параболического уравнения (типа диффузии) в римановом многообразии M ограниченной геометрии. Данная работа посвящена выводу формулы, которая содержит в качестве параметров коэффициенты уравнения и начальное условие и дает (для каждого натурального числа n, времени $t > 0$, точки $x \in M$) функции $u_n(t, x)$, аппроксимирующие решение $u(t, x)$ задачи Коши в L_p-норме: $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{L_p(M)} = 0$. Эту работу можно рассматривать как следующий логический шаг после [1], где такого рода формулы были опубликованы впервые, но в пространстве непрерывных функций, обращающихся в нуль на бесконечности. В данной работе мы обобщаем область применимости формул на пространство L_p: решения принадлежат $L_p(M)$, а аппроксимации сходятся в $L_p(M)$. Представленный метод аппроксимации основан на теореме Чернова [2], [3].

Основные понятия

Определение. Символом $\gamma_{x,A_j} \colon \mathbb{R}^+ \to M$ обозначим интегральную кривую векторного поля A_j, начинающуюся в момент времени 0 в точке $x \in M$, а именно решение начальной задачи

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\gamma_{x,A_j}(t) = A_j(\gamma_{x,A_j}(t)), \\ \gamma_{x,A_j}(0) = x. \end{cases} \tag{1}$$

Замечание. Пусть (M, g) – гладкое риманово многообразие ограниченной геометрии размерности d. Предположим, что у нас есть число $r = 1, 2, 3, \ldots$ и $r + 1$ гладкие и C^2-ограниченные векторные поля A_j на M, где $j = 0, 1, 2, \ldots, r$. Также мы имеем ограниченное измеримое скалярное поле $c \colon M \to \mathbb{R}$. Рассмотрим следующую задачу Коши для эволюционного уравнения

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = Lu(t, x), \;\; x \in M, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \tag{2}$$

где L – дифференциальный оператор второго порядка, определяемый следующим образом

$$(Lf)(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}(A_jA_jf)(x) + A_0f(x) + c(x)f(x). \tag{3}$$

Мы приведем формулу, которая выражает решение (2) через $A_0, A_1, \ldots, A_r, c, u_0$, и эта формула будет включать интегральные кривые векторных полей A_j . Поэтому разумно предположить, что известны и интегральные кривые.

Основные результаты

Теорема. Пусть $c \colon M \to \mathbb{R}$ измеримо и ограничено. Предположим, что у нас есть число $r = 1, 2, 3, \ldots$ и $r + 1$ гладкие и C^2-ограниченные векторные поля A_j на M, $j = 0, 1, \ldots, r$, и для всех j имеем $divA_j(\alpha_s^*(x)) = 0$. Определим для всех $f \in L_p(M, \mathbb{R}) \overset{denote}{=} L_p(M)$, $x \in M$ и $t \geq 0$:

$$(S(t)f)(x) = \frac{1}{4r}\sum_{j=1}^{r}\left(f\left(\gamma_{x,A_j}(\sqrt{2rt})\right) + f\left(\gamma_{x,-A_j}(\sqrt{2rt})\right)\right) + \\ + \frac{1}{2}f(\gamma_{x,A_0}(2t)) + tc(x)f(x), \tag{4}$$

где $\gamma_{x,A_j} \colon \mathbb{R}^+ \to M$ обозначает интегральную кривую (определенную в (1)) векторного поля A_j, начиная с момента времени 0 в точке $x \in M$. Мы также предполагаем, что оператор L порождает C_0-полугруппу $(e^{tL})_{t\geq 0}$.

Тогда по норме $\|f\| = \left(\int\limits_M |f(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p}$ в $L_p(M)$ выполняется следующее:

1. Для всех $t \geq 0$ имеем $\|S(t)\| \leq 1 + t\sup\limits_{x\in M}|c(x)|$.
2. $S(t)$ касается по Чернову L.
3. Решение задачи Коши (2) с оператором L, определенным в (3), определяется выражением

$$u(t, x) = (e^{tL}u_0)(x) = \left(\lim_{n\to+\infty} S\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0\right)(x), \tag{5}$$

где предел существует в $L_p(M)$, а равенство выполняется почти для всех $x \in M$.

Выводы и дальнейшие направления исследований

Используя теорему Чернова, средства дифференциальной геометрии и общую теорию C_0-полугрупп, мы нашли решение задачи Коши для параболического уравнения второго порядка на многообразии, не предполагая, что многообразие компактно, но предполагая, что оно имеет ограниченную геометрию. Мы использовали функцию Чернова, предложенную в [1], поэтому наши аппроксимации Чернова совпадают с приведенными в [1]. Однако решения, их приближения и сходимость в [1] рассматривались в пространстве непрерывных функций, обращающихся в нуль на бесконечности, между тем выше мы доказали, что такая же ситуация имеет место, если решения, их приближения и сходимость рассматриваются в L_p.

Это позволяет рассматривать решения в более общем смысле (например, начальное условие и решение могут быть разрывными). Также мы разработали несколько лемм, которые могут быть полезны при изучении подобных уравнений в L_p-пространстве на некомпактных многообразиях.

Список литературы

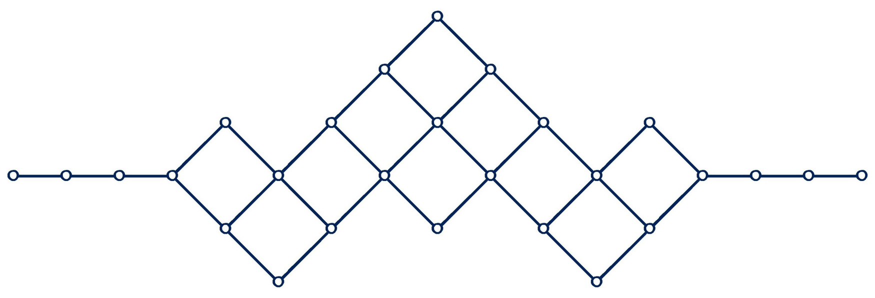
[1] S. Mazzucchi, V. Moretti, I. Remizov, O. Smolyanov. Feynman type formulas for Feller semigroups in Riemannian manifolds. — arXiv.org

[2] Paul R. Chernoff. Note on product formulas for operator semigroups// J. Functional Analysis 2 (1968), 238-242.

[3] Ya.A. Butko. The method of Chernoff approximation. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Volume 325. – Springer, Cham, 2020, p. 19–4

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101

Десятая школа-конференция
"Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов"



О некоторых группах и алгебрах Ли в алгебрах Клиффорда

Филимошина Екатерина Романовна
НИУ ВШЭ, Москва, Россия

Аннотация

Работа основана на [1, 2, 3, 4]. Мы вводим и изучаем пять семейств групп Ли специального типа в алгебрах Клиффорда. Эти группы Ли сохраняют некоторые фундаментальные подпространства алгебр Клиффорда при присоединённом и скрученном присоединённом действиях. В случае малых размерностей эти группы связаны с группами Гейзенберга и группами обратимых верхнетреугольных матриц. Спинорные группы и группы Липшица являются подгруппами этих групп Ли в случае произвольных размерности и сигнатуры. Изучаются алгебры Ли, соответствующие пяти рассматриваемым семействам групп Ли. Данные группы и алгебры Ли могут быть интересны для приложений в физике, инженерии, компьютерных науках.

Об алгебрах Клиффорда

В данной работе мы рассматриваем вырожденные и невырожденные алгебры Клиффорда [5, 6, 7, 8] (геометрические алгебры) $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}_{p,q,r}$, $p+q+r=n\geq 1$, произвольной сигнатуры над полем $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Будем опускать верхний индекс $\mathbb{F}$ и использовать обозначение $\mathcal{C}\ell_{p,q,r}:=\mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}_{p,q,r}$ при одновременном рассмотрении случаев $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ и $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. В частности, рассматриваем случай алгебр Грассмана $\Lambda_n := \mathcal{C}\ell_{0,0,n}$ (внешних алгебр). Генераторы $\mathcal{C}\ell_{p,q,r}$ обозначаются как e_a, $a=1,\ldots,n$, и удовлетворяют

$$e_a e_b + e_b e_a = 2\eta_{ab}e, \qquad a,b=1,\ldots,n, \tag{1}$$

где $\eta=(\eta_{ab})$ – диагональная матрица с p штук 1, q штук -1 и r штук 0 на диагонали в случае $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ и $p+q$ штук 1 и r штук 0 на диагонали в случае $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. Подпространства $\mathcal{C}\ell^{k}_{p,q,r}$ рангов $k=0,1,\ldots,n$ состоят из линейных комбинаций базисных элементов $e_{a_1}\cdots e_{a_k}$, $a_1<\cdots<a_k$. Алгебра Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{p,q,r}$ является $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгеброй и представляет собой прямую сумму чётного $\mathcal{C}\ell^{(0)}_{p,q,r}$ и нечётного $\mathcal{C}\ell^{(1)}_{p,q,r}$ подпространств:

$$\mathcal{C}\ell^{(k)}_{p,q,r}=\bigoplus_{j=k \bmod 2}\mathcal{C}\ell^{j}_{p,q,r}, \qquad \mathcal{C}\ell^{(k)}_{p,q,r}\mathcal{C}\ell^{(l)}_{p,q,r}\subseteq\mathcal{C}\ell^{(k+l) \bmod 2}_{p,q,r}, \qquad k,l=0,1. \tag{2}$$

Центр $\mathcal{C}\ell_{p,q,r}$ обозначается как $\mathrm{Z}_{p,q,r}$ и равен $\Lambda^{(0)}_r\oplus\mathcal{C}\ell^{n}_{p,q,r}$ в случае нечётного n и $\Lambda^{(0)}_r$ в случае чётного n. Вырожденная алгебра $\mathcal{C}\ell_{p,q,r}$, $r\neq 0$, содержит ненулевой радикал Якобсона $\mathrm{rad}\,\mathcal{C}\ell_{p,q,r}$. Пусть A,B,C – упорядоченные мультииндексы ненулевой длины и $e_A=e_{a_1}\cdots e_{a_k}$ с $\{a_1,\ldots,a_k\}\subseteq\{1,\ldots,p\}$, $e_B=e_{b_1}\cdots e_{b_l}$ с $\{b_1,\ldots,b_l\}\subseteq\{p+1,\ldots,p+q\}$, $e_C=e_{c_1}\cdots e_{c_m}$ с $\{c_1,\ldots,c_m\}\subseteq\{p+q+1,\ldots,n\}$. Произвольный элемент $y\in\mathrm{rad}\,\mathcal{C}\ell_{p,q,r}$ имеет вид:

$$y=\sum \nu_C e_C+\sum_{A,C}\nu_{AC}e_Ae_C+\sum_{B,C}\nu_{BC}e_Be_C+\sum_{A,B,C}\nu_{ABC}e_Ae_Be_C, \tag{3}$$

где $\nu_C,\nu_{AC},\nu_{BC},\nu_{ABC}\in\mathbb{F}$.

Семейства групп Ли $\mathrm{P}^{\pm}_{p,q,r}$, $\mathrm{P}_{p,q,r}$, $\mathrm{P}^{\pm\Lambda}_{p,q,r}$, $\mathrm{P}^{\Lambda}_{p,q,r}$ и $\mathrm{P}^{\pm\mathrm{rad}}_{p,q,r}$

Рассмотрим следующие пять семейств групп Ли в алгебрах Клиффорда:

$$\mathbf{P}^{\pm}_{p,q,r}:=\mathcal{C}\ell^{(0)}_{p,q,r}\cup\mathcal{C}\ell^{(1)}_{p,q,r}, \tag{4}$$

$$\mathbf{P}_{p,q,r}:=\mathbf{P}^{\pm}_{p,q,r}\mathrm{Z}^{\times}_{p,q,r}, \tag{5}$$

$$\mathbf{P}^{\pm\Lambda}_{p,q,r}:=\mathbf{P}^{\pm}_{p,q,r}\Lambda^{\times}_r, \tag{6}$$

$$\mathbf{P}^{\Lambda}_{p,q,r}:=\mathbf{P}^{\pm}_{p,q,r}\mathrm{Z}^{\times}_{p,q,r}\Lambda^{\times}_r=\mathbf{P}_{p,q,r}\Lambda^{\times}_r=\mathbf{P}^{\pm\Lambda}_{p,q,r}\mathrm{Z}^{\times}_{p,q,r}, \tag{7}$$

$$\mathbf{P}^{\pm\mathrm{rad}}_{p,q,r}:=\mathbf{P}^{\pm}_{p,q,r}(\mathcal{C}\ell^{0}_{p,q,r}\oplus\mathrm{rad}\,\mathcal{C}\ell_{p,q,r})^{\times}, \tag{8}$$

где через $^{\times}$ обозначено взятие подмножества обратимых элементов множества.

Примеры. Алгебра Грассмана $\Lambda_2=\mathcal{C}\ell_{0,0,2}$ может быть встроена в $\mathcal{C}\ell_{2,2,0}\cong\mathrm{Mat}(4,\mathbb{F})$:

$$\mathrm{P}^{\pm}_{0,0,2}=\mathrm{P}_{0,0,2}=\mathrm{P}^{\pm\mathrm{rad}}_{0,0,2}=\Lambda^{\times}_2\cong\{\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3\\ 0 & x_0 & 0 & -x_2\\ 0 & 0 & x_0 & x_1\\ 0 & 0 & 0 & x_0\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}(4,\mathbb{F})\}, \tag{9}$$

$$\mathrm{P}^{\pm}_{0,0,2}=\mathrm{P}_{0,0,2}=\Lambda^{(0)\times}_2\cong\{\begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 & x_3\\ 0 & x_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & x_0\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}(4,\mathbb{F})\}. \tag{10}$$

Эти матричные группы являются подгруппами группы верхнетреугольных матриц $\mathrm{UT}(4,\mathbb{F})$ и тесно связаны с группой Гейзенберга $\mathrm{Heis}(4,\mathbb{F})$.

Группы, сохраняющие фиксированные подпространства при ad и $\check{\mathrm{ad}}$. Присоединённое и скрученное присоединённое [9] действия $\mathrm{ad},\check{\mathrm{ad}}:\mathcal{C}\ell^{\times}_{p,q,r}\to\mathrm{Aut}\,\mathcal{C}\ell_{p,q,r}$ действуют как $T\mapsto\mathrm{ad}_T(U)=TUT^{-1}$, $T\mapsto\check{\mathrm{ad}}_T=\hat{T}UT^{-1}$, $U\in\mathcal{C}\ell_{p,q,r}$. Действие $\check{\mathrm{ad}}$ осуществляет двулистное накрытие ортогональных групп соответствующими спинорными группами в случае произвольной размерности и сигнатуры.

Обозначим как $\Gamma^{(0)}$, $\Gamma^{(1)}$, Γ^{0}, Γ^{n}, Γ^{0n} и $\check{\Gamma}^{(0)}$, $\check{\Gamma}^{(1)}$, $\check{\Gamma}^{0}$, $\check{\Gamma}^{n}$, $\check{\Gamma}^{0n}$ группы элементов $\mathcal{C}\ell^{\times}_{p,q,r}$, сохраняющие при ad и $\check{\mathrm{ad}}$ соответственно чётное $\mathcal{C}\ell^{(0)}_{p,q,r}$ и нечётное $\mathcal{C}\ell^{(1)}_{p,q,r}$ подпространства, подпространства $\mathcal{C}\ell^{0}_{p,q,r}$ и $\mathcal{C}\ell^{n}_{p,q,r}$ рангов 0 и n и их прямую сумму $\mathcal{C}\ell^{0n}_{p,q,r}$ соответственно. Так, например:

$$\Gamma^{(0)}=\{T\in\mathcal{C}\ell^{\times}_{p,q,r}: T\mathcal{C}\ell^{(0)}_{p,q,r}T^{-1}\subseteq\mathcal{C}\ell^{(0)}_{p,q,r}\}, \quad \check{\Gamma}^{(1)}=\{T\in\mathcal{C}\ell^{\times}_{p,q,r}: \hat{T}\mathcal{C}\ell^{(1)}_{p,q,r}T^{-1}\subseteq\mathcal{C}\ell^{(1)}_{p,q,r}\}.$$

Теорема. В случае произвольной размерности и сигнатуры $\mathcal{C}\ell_{p,q,r}$ мы имеем

$$\mathbf{P}_{p,q,r}=\Gamma^{(1)}\subseteq\mathbf{P}^{\Lambda}_{p,q,r}=\Gamma^{(0)}, \qquad \mathbf{P}^{\pm}_{p,q,r}=\check{\Gamma}^{(0)}\subseteq\mathbf{P}^{\pm\Lambda}_{p,q,r}=\check{\Gamma}^{(1)}, \tag{11}$$

причём $\Gamma^{(1)}=\Gamma^{(0)}$, $\check{\Gamma}^{(0)}=\check{\Gamma}^{(1)}$ при $r=0$ и $\Gamma^{(1)}\subsetneq\Gamma^{(0)}$, $\check{\Gamma}^{(0)}\subsetneq\check{\Gamma}^{(1)}$ при $r\neq 0$. Также

$$\mathbf{P}^{\pm}_{p,q,r}=\check{\Gamma}^{0}, \qquad \mathbf{P}_{p,q,r}=\check{\Gamma}^{0n}, \qquad \mathbf{P}^{\pm\mathrm{rad}}_{p,q,r}=\begin{cases}\check{\Gamma}^{n}, & n \text{ – нечётное},\\ \Gamma^{0n}=\Gamma^{n}, & n \text{ – чётное},\end{cases} \tag{12}$$

и $\Gamma^{0n}=\Gamma^{n}=\Gamma^{0}=\mathcal{C}\ell^{\times}_{p,q,r}$ при нечётном n и $\check{\Gamma}^{n}=\Gamma^{0}=\mathcal{C}\ell^{\times}_{p,q,r}$ при чётном n.

Семейства алгебр Ли $\mathfrak{p}^{\pm}_{p,q,r}$, $\mathfrak{p}_{p,q,r}$, $\mathfrak{p}^{\pm\Lambda}_{p,q,r}$, $\mathfrak{p}^{\Lambda}_{p,q,r}$ и $\mathfrak{p}^{\pm\mathrm{rad}}_{p,q,r}$

Рассмотрим алгебры Ли $\mathfrak{p}^{\mathbb{F}\pm}_{p,q,r}$, $\mathfrak{p}^{\mathbb{F}}_{p,q,r}$, $\mathfrak{p}^{\mathbb{F}\pm\Lambda}_{p,q,r}$, $\mathfrak{p}^{\mathbb{F}\Lambda}_{p,q,r}$ и $\mathfrak{p}^{\mathbb{F}\pm\mathrm{rad}}_{p,q,r}$ групп Ли $\mathrm{P}^{\pm}_{p,q,r}$, $\mathrm{P}_{p,q,r}$, $\mathrm{P}^{\pm\Lambda}_{p,q,r}$, $\mathrm{P}^{\Lambda}_{p,q,r}$ и $\mathrm{P}^{\pm\mathrm{rad}}_{p,q,r}$ соответственно. Будем опускать верхний индекс $\mathbb{F}$ при одновременном рассмотрении случаев $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ и $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. Имеем:

$$\mathfrak{p}^{\pm}_{p,q,r}=\mathcal{C}\ell^{(0)}_{p,q,r}, \tag{13}$$

$$\mathfrak{p}^{\pm\Lambda}_{p,q,r}=\mathcal{C}\ell^{(0)}_{p,q,r}\oplus\Lambda^{(1)}_r, \tag{14}$$

$$\mathfrak{p}^{\pm\mathrm{rad}}_{p,q,r}=\mathcal{C}\ell^{(0)}_{p,q,r}\oplus\mathrm{rad}\,\mathcal{C}\ell^{(1)}_{p,q,r}, \tag{15}$$

$$\mathfrak{p}_{p,q,r}=\begin{cases}\mathcal{C}\ell^{(0)}_{p,q,r}\oplus\mathcal{C}\ell^{n}_{p,q,r}, & n \text{ – нечётное},\\ \mathcal{C}\ell^{(0)}_{p,q,r}, & n \text{ – чётное},\end{cases} \tag{16}$$

$$\mathfrak{p}^{\Lambda}_{p,q,r}=\begin{cases}\mathcal{C}\ell^{(0)}_{p,q,r}\oplus\Lambda^{(1)}_r\oplus\mathcal{C}\ell^{n}_{p,q,r}, & n \text{ – нечётное}, \quad n\neq r,\\ \mathcal{C}\ell^{(0)}_{p,q,r}\oplus\Lambda^{(1)}_r, & \text{в остальных случаях}.\end{cases} \tag{17}$$

Множества в правых частях (13)–(17) рассматриваются относительно операции коммутатора $[U,V]=UV-VU$, где $U,V\in\mathcal{C}\ell_{p,q,r}$.

Замечание. Пусть $e_A=e_{a_1\ldots a_s}$, $e_B=e_{b_1\ldots b_l}$ и $A'=\{a_1,\ldots,a_s\}$, $B'=\{b_1,\ldots,b_l\}$ и $e_{A\triangle B}:=e_{c_1\ldots c_r}$, где $c_i\in A'\triangle B'$ для $i=1,\ldots,r$. Коммутационные соотношения $\mathfrak{p}^{\pm}_{p,q,r}$, $\mathfrak{p}_{p,q,r}$, $\mathfrak{p}^{\pm\Lambda}_{p,q,r}$ и $\mathfrak{p}^{\Lambda}_{p,q,r}$ имеют вид:

$$[e_A,e_B]=\begin{cases}\pm 2(e_{i_1})^2\cdots(e_{i_k})^2e_{A\triangle B}, & |A'\cap B'|=1 \bmod 2, \quad e_A,e_B\in\mathcal{C}\ell^{(0)}_{p,q,r},\\ \pm 2e_{A\triangle B}, & |A'\cap B'|=0, \quad e_A,e_B\in\Lambda^{(1)}_r,\\ 0, & \text{в остальных случаях},\end{cases}$$

где $i_1,\ldots,i_k\in A'\cap B'$ и знак перед $e_{A\triangle B}$ зависит от чётности перестановки.

Примеры. Имеют место следующие изоморфизмы алгебр Ли:

$$\mathfrak{p}^{\mathbb{F}\pm}_{1,0,2}\cong\mathfrak{p}^{\mathbb{F}\pm\Lambda}_{0,0,2}\cong\mathfrak{gl}(1,\mathbb{F})\oplus\mathfrak{heis}(3,\mathbb{F}), \quad \mathfrak{p}^{\mathbb{F}}_{1,0,2}\cong\mathfrak{gl}(1,\mathbb{F})\oplus\mathfrak{gl}(1,\mathbb{F})\oplus\mathfrak{heis}(3,\mathbb{F}),$$

$$\mathfrak{p}^{\mathbb{F}\pm\Lambda}_{1,0,2}\cong\mathfrak{gl}(1,\mathbb{F})\oplus\mathfrak{heis}(4,\mathbb{F}), \quad \mathfrak{p}^{\mathbb{F}\Lambda}_{1,0,2}\cong\mathfrak{gl}(1,\mathbb{F})\oplus\mathfrak{gl}(1,\mathbb{F})\oplus\mathfrak{heis}(4,\mathbb{F}),$$

$$\mathfrak{p}^{\mathbb{R}\pm}_{4,0,0}\cong\mathfrak{u}(1)\oplus\mathfrak{u}(1)\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2),$$

$$\mathfrak{p}^{\mathbb{C}\pm}_{4,0,0}\cong\mathfrak{gl}(1,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{gl}(1,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}),$$

где $\mathfrak{heis}(n,\mathbb{F})$ – алгебра Гейзенберга.

Список литературы

[1] D. Shirokov. On inner automorphisms preserving fixed subspaces of Clifford algebras. Advances in Applied Clifford Algebras 31 (2021), no. 30
[2] E.F., D. Shirokov. On generalization of Lipschitz groups and spin groups. Mathematical Methods in the Applied Sciences (2022), 1–26
[3] E.F., D. Shirokov. On some Lie groups in degenerate geometric algebras. ICACGA 2022 (Colorado Springs, CO, USA, 2022). Lecture Notes in Computer Science. Springer, to appear
[4] E.F.,D. Shirokov. On some Lie groups in degenerate Clifford geometric algebras. arXiv:2301.06842
[5] C. Chevalley. The Algebraic Theory of Spinors. Columbia University Press, New York (1954)
[6] I. Porteous. Clifford Algebras and the Classical Groups. Cambridge University Press, UK (1995)
[7] P. Lounesto. Clifford Algebras and Spinors. Cambridge University Press, UK (1997)
[8] J. Helmstetter, A. Micali. Quadratic Mappings and Clifford Algebras. Birkhäuser, Basel (2008)
[9] M. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro. Clifford Modules. Topology 3 (1964), 3–38

Полные проективные слоения с нулевой трансверсальной кривизной

Юнусова Розалия Олеговна

НИУ ВШЭ, г. Нижний Новгород

Основные понятия

Целью данной работы является изучение структуры и существование минимальных множеств для полных проективных слоений с нулевой трансверсальной кривизной.

Определение. Пусть (M, F) — слоение. Если слой $L \in (M, F)$ — вложенное подмногообразие в M, то L будет называется собственным слоем. Если каждый слой $\tilde{L}$ слоения (M, F) является собственным, то и слоение (M, F) называется собственным.

Слой L слоения (M, F) называется замкнутым, если он является замкнутым подмножеством многообразия M. Р. Пале в [12] доказал, что любой замкнутый слой является собственным. В частности, любой компактный слой слоения является собственным. Обратное, вообще говоря, не верно, то есть, существуют собственные незамкнутые слои.

Определение. Пусть M — многообразие со слоением (M, F) и $B \subset M$ — подмножество M. Если B представимо в виде объединения некоторых слоев слоения (M, F), то B называется насыщенным подмножеством.

Отметим, что в теории динамических систем насыщенные подмножества называется инвариантными.

Историческая справка

В данной работе представлены два определения минимального множества и доказана их эквивалентность.

Д.В. Аносов в математической энциклопедии написал, что вопросы существования и строения минимальных множеств являются центральными в качественной теории динамических систем и слоений [1].

Примером минимального множества служит любой замкнутый слой слоения, если он существует.

Как известно, любое слоение (M, F) на компактном многообразии M имеет минимальное множество. Это, вообще говоря, не верно для слоений на некомпактных многообразиях.

В работе Бенье и Майнеза [7] доказано, что существуют слоения на некомпактных многообразиях, не имеющие минимальных множеств.

Основные результаты

Основным результатом работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть (M, F) — это произвольное полное проективное слоение коразмерности $q \geq 2$ на $n-$мерном гладком многообразии M. Предположим, что трансверсальная кривизна (M, F) равна нулю. Тогда существует минимальное множество этого слоения.

Примеры

Матрица $A \in O(3)$, где $\det A = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, такое что $f(X) = \lambda A(X)$, $\lambda > 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Под действием f вектор $Z = (Z^1, Z^2, Z^3) \in \mathbb{R}^3$ повернется в плоскости, параллельной (Z_1, Z_2), на угол φ и растянется в λ раз. Таким образом, мы получаем прямые. Следовательно, отображение $f(Z) = \lambda A(Z)$ переводит прямые в прямые и является проективным преобразованием, которое индуцирует отображение проективных пространств $\hat{f} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$.

Аналогично, рассмотрим матрицу $A' \in O(q)$, $\det A' = 1$, $q \geq 2$, такую что $A'(A')^T = E$.

В $\mathbb{RP}^q$ отображение $f(Z) = \lambda A(Z)$ определяет отображения из группы проективных преобразований G.

Построим надстройку. Берем $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^1 \times \mathbb{RP}^2$, которое задается формулой $(n, (t, Z)) \mapsto (t + n, f^n(Z))$ $\forall$ $n \in \mathbb{Z}$. Получаем компактное трехмерное многообразие без края $M = (\mathbb{R}^1 \times \mathbb{RP}^2)/\mathbb{Z}$. При этом M – многообразие со слоением.

Отображение $f^n(Z) = \lambda^n A^n(Z)$ не учитывает растяжения. Однако при возведении в степень n угол поворота увеличивается в n раз. То есть действую матрицей $A^n(Z)$ вектор повернется на угол $n\varphi$. При этом возможны два случая.

1. Для иррациональных углов φ найдутся такие целые значения n, что $A^n = A$, то есть вектор повернется на угол $n\varphi$ и вернется в изначальное положение. Например, при значении угла $\varphi = \pi/4$ можно взять $n = 8k$, $k \in \mathbb{Z}$. В таком случае все орбиты конечны и, следовательно, все слои замкнуты.

2. В случае рациональных значений угла φ такого n найти не удастся. Тогда слои всюду плотные и существует лишь один замкнутый слой.

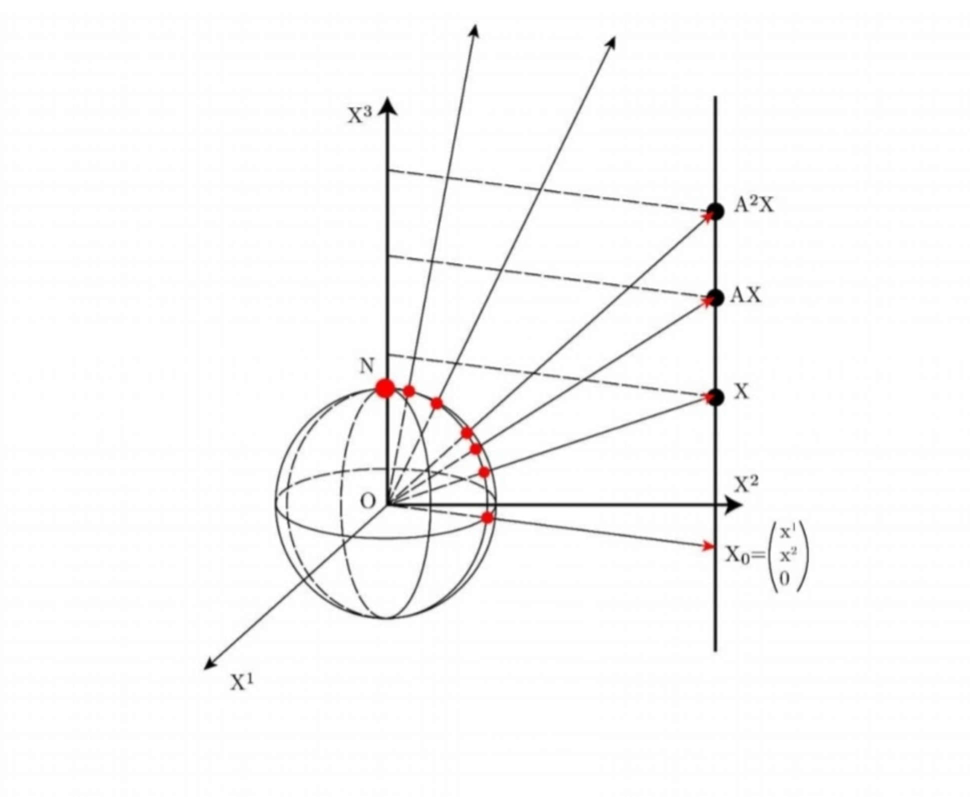


Рис. 1

Список литературы

[1] Аносов Д.В. Минимальное множество // Математическая энциклопедия. М.: Сов. энц., 1982. Т. 3. С. 690–691.

[2] Жукова Н.И. Минимальные множества картановых слоений // Тр. МИАН. 2007. Т. 256, С. 115–147.

[3] Жукова Н.И. Глобальные аттракторы конформных слоений // Мат. сб. 2012. Т. 256, С. 115–147.

[4] Тамура И. Топология слоений. М.: Мир, 1979.

[5] Inaba T. An example of a flow on a non-compact surface without minimal set // Ergod. Theory and Dyn. Syst. 1999. V. 19, N 1. P. 31–33.

[6] Куликов М.С. Группы типа Шоттки и минимальные множества орициклического и геодезического потоков // Мат. сб. 2004. Т. 195, №1. С. 37–68.

[7] Beniere J.-C., Meigniez G. Flows without minimal set // Ergod. Theory and Dyn. Syst. 1999. V. 19, N 1. P. 21–30.

[8] Blumenthal R. A., Hebda J.J. Ehresmann connections for foliations // Indiana Univ. Math. J 1984. V.33, no 4. P. 597–611.

[9] Zhukova N.I. On existence of global attractors of foliations with transverse affine connections. DGA, 2021. V. 74, 101699.

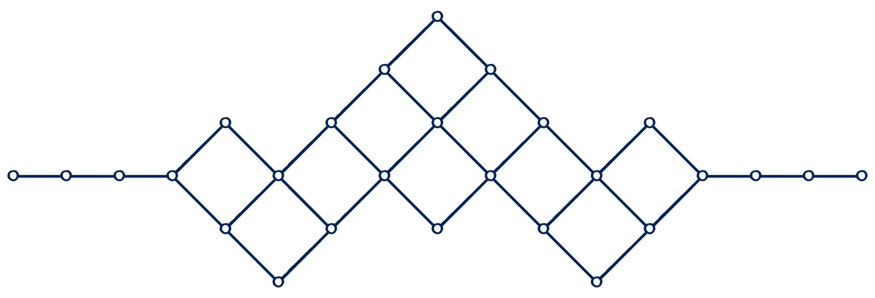
[10] Матвеев В.С. О числе нетривиальных проективных преобразований замкнутых многообразий // Фунд. и прикладная математика. 2015. Т. 20, № 2. С. 125–131.

[11] Зуланке Р. Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. 1975. 352.

[12] Пале Р. Семинар по теореме Атьи —Зингера об индексе. // М.: Мир, 1970.

[13] Blumenthal R. Transversely homogeneous foliations. Ann. Institut Fourier. 1979. V. 29. P. 143–158.

Десятая школа-конференция
"Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов"



Многочлены Костанта–Кумара

Яруллин Ренат Набиуллович

Самарский университет, Самара

Понятие многочленов Костанта–Кумара

Пусть Φ — система корней, W — её группа Вейля, $v,\ w \in W$ — произвольные элементы, $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$ — простые корни, $s_1,\ \ldots,\ s_n$ — соответствующие простые отражения, $w = s_{i_1}\ldots s_{i_l}$ — какое-то приведённое разложение элемента w. Обозначим через $l(w) = l$ длину элемента w и положим

$$c_{w,v} = (-1)^{l(w)} \cdot \sum \frac{1}{s_{i_1}^{\epsilon_1}\alpha_{i_1}} \cdot \frac{1}{s_{i_1}^{\epsilon_1}s_{i_2}^{\epsilon_2}\alpha_{i_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{s_{i_1}^{\epsilon_1}\ldots s_{i_l}^{\epsilon_l}\alpha_{i_l}},$$

где суммирование ведётся по всем наборам $(\epsilon_1,\ \ldots,\ \epsilon_l)$ из нулей и единиц таким, что $s_{i_1}^{\epsilon_1}\ldots s_{i_l}^{\epsilon_l} = v$. По построению, $c_{w,v} \in \mathbb{C}(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$. Можно показать, что $c_{w,v}$ не зависит от выбора приведённого разложения для w [8, Section 3].

Пример. Пусть $\Phi = A_{n-1}$, $w = s_1s_2s_1$, $v = \mathrm{id}$. Здесь суммирование будет по двум наборам $(0,0,0)$ и $(1,0,1)$, поэтому

$$c_{w,\mathrm{id}} = (-1)^3 \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\alpha_1} + \frac{1}{-\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_1}\right) = -\frac{1}{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

Положим теперь

$$d_{w,v} = (-1)^{l(w)-l(v)} c_{w,v} \prod_{\alpha\in\Phi^+} \alpha.$$

Оказывается, что $d_{w,v} \in \mathbb{C}[\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n]$ [7].

Определение. Многочлен $d_w = d_{w,\mathrm{id}}$ называется многочленом Костанта–Кумара, связанным с элементом w.

Связь с касательными конусами

Пусть теперь G — простая комплексная алгебраическая группа с системой корней Φ, B — её борелевская подгруппа, G/B — многообразие флагов. Хорошо известно, что оно распадается на клетки Шуберта, нумеруемые элементами группы Вейля:

$$G/B = \bigsqcup_{w\in W} \mathcal{X}_w^\circ;$$

их замыкания $\mathcal{X}_w$ называются многообразиями Шуберта. Все они содержат точку p, являющуюся образом нейтрального элемента группы G в G/B.

Обозначим через $\mathcal{O}_p$ локальное кольцо точки p на многообразии $\mathcal{X}_w$; пусть $\mathfrak{m}_p$ — максимальный идеал в нём. На $\mathcal{O}_p$ есть естественная фильтрация степенями максимального идеала:

$$\mathcal{O}_p = \mathfrak{m}_p^0 \supset \mathfrak{m}_p = \mathfrak{m}_p^1 \supset \mathfrak{m}_p^2 \supset \mathfrak{m}_p^3 \ldots.$$

Определение. Спектр кольца

$$R = \bigoplus_{i\geqslant 0} \mathfrak{m}_p^i/\mathfrak{m}_p^{i+1}$$

называется касательным конусом к многообразию Шуберта $\mathcal{X}_w$ в точке p и обозначается $C_w = \operatorname{Spec} R$. Мы рассматриваем его как подсхему в касательном пространстве $T_p(\mathcal{X}_w)$ (а значит, и как подсхему в касательном пространстве $T_p(G/B)$).

Легко видеть, что, к примеру, $C_w = C_{w^{-1}}$ для любого элемента $w \in W$. Вопрос, который нас интересует, таков.

Основная проблема. Для каких различных элементов $w_1,\ w_2 \in W$ их касательные конусы C_{w_1} и C_{w_2} совпадают?

Можно проверить, что многочлен Костанта–Кумара d_w для элемента $w \in W$ полностью определяется по касательному конусу C_w. Значит, чтобы показать, что $C_{w_1} \neq C_{w_2}$, достаточно проверить, что $d_{w_1} \neq d_{w_2}$.

Имеющиеся факты

В работе Д.Ю.Елисеева и А.Н. Панова [2] была сформулирована следующая основная гипотеза.

Гипотеза. Если w_1, w_2 — разные инволюции из W, то $C_{w_1} \neq C_{w_2}$.

К настоящему моменту гипотеза проверена в следующих случаях.

- 2014, Д.Ю. Елисеев. М.В. Игнатьев [3]: $\Phi = A_{n-1}$, F_4 и G_2;
- 2016, М.А. Бочкарёв, М.В. Игнатьев, А.А. Шевченко [1]: $\Phi = C_n$ или B_n (но в случае B_n только для так называемых базисных инволюций; инволюция называется базисной, если она никакой вектор стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$ не переводит в противоположный);
- 2016, М.В. Игнатьев, А.А. Шевченко [5]: $\Phi = D_n$, для базисных инволюций;
- 2020, М.В. Игнатьев, А.А. Шевченко [6]: $\Phi = E_6$, E_7 или E_8, для некоторых типов инволюций.

Кроме того, в 2017 году в работе [4] было получено достаточное условие совпадения касательных конусов для типа A_{n-1}.

Основные результаты

Мы рассматриваем случай $\Phi = E_6$. Напомним, что у каждой инволюции w есть канонически определённый носитель $\operatorname{Supp}(w)$ — множество попарно ортогональных положительных корней, в произведение отражений относительно которых раскладывается инволюция. Для произвольной системы корней можно определить аналог базисной инволюции. Для этого нужен аналог «первого столбика» в классических системах корней. Занумеруем произвольно простые корни.

Определение. Первым столбиком системы корней Φ называется множество положительных корней, в разложение которых входит α_1.

Аналогично определяются второй столбик и так далее. Инволюция называется базисной, если каждый столбик содержит не более одного корня из носителя. Нам удалось, используя методы работы [6], доказать основную гипотезу для базисных инволюций, носитель которых состоит не более, чем из трёх корней.

Теорема. Пусть $\Phi = E_6$, $w_1,\ w_2 \in W$ — разные базисные инволюции (для некоторого специального порядка на простых корнях), для которых $|\operatorname{Supp}(w_1)| \leqslant 3$, $|\operatorname{Supp}(w_2)| \leqslant 3$. Тогда $d_{w_1} \neq d_{w_2}$ и, как следствие, $C_{w_1} \neq C_{w_2}$.

Список литературы

[1] M.A. Bochkarev, M.V. Ignatyev, A.A. Shevchenko. Tangent cones to Schubert varieties in types A_n, B_n and C_n. J. Algebra 465 (2016), 259–286.

[2] D.Yu. Eliseev, A.N. Panov. Tangent cones to Schubert varieties for A_n of lower rank. English transl.: J. Math. Sci. 188 (2013), no. 5, 596–600.

[3] D.Yu. Eliseev, M.V. Ignatyev. Kostant–Kumar polynomials and tangent cones to Schubert varieties for involutions in A_n, F_4 and G_2. J. Math. Sci. 199 (2014), no. 3, 289–301.

[4] D. Fuchs, A. Kirillov, S. Morier-Genuod, V. Ovsienko. On tangent cones of Schubert varieties. Arnold Math. J. 3 (2017), 451–482.

[5] M.V. Ignatyev, A.A. Shevchenko. On tangent cones to Schubert varieties in type D_n. St. Petersburg Math. J. 27 (2016), no. 4, 609–623.

[6] M.V. Ignatyev, A.A. Shevchenko. On tangent cones to Schubert varieties in type E. Comm. in Math. 28 (2020), no. 2, 179–197.

[7] B. Kostant, S. Kumar. T-equivariant K-theory of generalized flag varieties. J. Diff. Geom. 32 (1990), 549–603.

[8] S. Kumar. The nil-Hecke ring and singularities of Schubert varieties. Invent. Math. 123 (1996), 471–506.