МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
INTERDISCIPLINARY SCIENTIFIC CENTER J.-V. PONCELET
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР МИРОВОГО УРОВНЯ МИАН
САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА

Восьмая школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов,

Москва, Россия
27 января – 1 февраля 2020 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

The Eighth School-Conference on

Lie Algebras, Algebraic Groups and Invariant Theory

Moscow, Russia
January 27 – February 1, 2020

ABSTRACTS

МЦНМО
Москва 2020

УДК 512.81+512.74+512.554.3
ББК 22.1
В78

В78 Восьмая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». Москва, Россия, 27 января – 1 февраля 2020 г. Тезисы докладов. — Москва: МЦНМО, 2020. — 88 с.

ISBN 978–5–4317–4060–1

Сборник содержит тезисы докладов участников Восьмой школы-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», проводившейся в Москве с 27 января по 1 февраля 2020 года. Адресован научным работникам, преподавателям, студентам и аспирантам математических специальностей.

УДК 512.81+512.74+512.554.3
ББК 22.1

ISBN 978–5–4317–4060–1

Предисловие

Восьмая школа-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» проходила в Москве с 27 января по 1 февраля 2020 года. Организаторы школы-конференции: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Междисциплинарный научный центр имени Ж.-В. Понселе (Interdisciplinary Scientific Center J.-V. Poncelet), Математический центр мирового уровня МИАН и Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева. Информацию о предыдущих школах-конференциям см. на сайте `http://halgebra.math.msu.su/alg_conf/main.shtml`.

Программный комитет школы конференции: Э.Б. Винберг (МГУ им. М.В. Ломоносова, председатель), И.В. Аржанцев (НИУ ВШЭ), В.А. Артамонов (МГУ им. М.В. Ломоносова), Н.А. Вавилов (СПбГУ), М.Х. Гизатуллин (Самара), М.В. Зайцев (МГУ им. М.В. Ломоносова) А.С. Клещёв (Университет Орегона, США), А.Н. Панов (Самарский университет), В.И. Черноусов (Университет Альберты, Канада), О.К. Шейнман (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН).

Организационный комитет школы-конференции: В.Н. Чубариков (МГУ им. М.В. Ломоносова, сопредседатель), Э.Б. Винберг (МГУ им. М.В. Ломоносова, сопредседатель), С.О. Горчинский (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, заместитель председателя), А.Н. Панов (Самарский университет, заместитель председателя), Д.А. Тимашёв (МГУ им. М.В. Ломоносова,заместитель председателя), И.В. Аржанцев (НИУ ВШЭ), С.А. Гайфуллин (МГУ им. М.В. Ломоносова), М.В. Игнатьев (Самарский университет), Н.Ю. Медведь (МГУ им. М.В. Ломоносова), Ю.И. Зайцева (МГУ им. М.В. Ломоносова).

Участниками школы были студенты, аспиранты и молодые учёные из России и других стран. Им были прочитаны следующие лекционные курсы:

- *Бесконечномерные локально нильпотентные алгебры Ли*
  (Михаил Викторович Игнатьев, Самарский университет, Самара, Россия);

- *Метод орбит и квантования*
  (Иван Вадимович Лосев, Йельский университет, Нью-Хейвен, США);

- *Окна в производные категории факторов GIT и пространств модулей*
  (Евгений Аркадьевич Тевелев, Университет Массачусетса, Амхерст, США и Католический Университет Чили, Сантьяго, Чили);

- *Пуассон-коммутативные подалгебры симметрической алгебры* $S(\mathfrak{g})$ (Оксана Сергеевна Якимова, Университет Йены, Йена, Германия).

Сборник содержит тезисы докладов участников школы-конференции и анонсы лекционных курсов.

Публикация сборника профинансирована Междисциплинарным научным центром им. Ж.-В. Понселе.

Оргкомитет

АНОНСЫ ЛЕКЦИОННЫХ КУРСОВ

Бесконечномерные локально нильпотентные алгебры Ли

М.В. Игнатьев
Самарский университет, Самара, Россия
mihail.ignatev@gmail.com

Теория представлений конечномерных простых алгебр Ли (и примитивных идеалов в их обёртывающих алгебрах) — классический раздел алгебры. Существуют различные бесконечномерные аналоги простых алгебр Ли — к примеру, алгебры Каца–Муди или прямые пределы вложенных алгебр Ли классического типа. Про неприводимые представления таких алгебр (и соответствующие примитивные идеалы) известно довольно много, причём есть как сходства, так и серьёзные отличия от конечномерного случая.

Нильпотентные алгебры в каком-то смысле «противоположны» по своим свойствам простым. В конечномерной ситуации основным инструментом в теории представлений таких алгебр является алгебраическая версия метода орбит, описывающая примитивные идеалы в терминах коприсоединённого представления. Алгебры Ли, полученные как прямые пределы конечномерных нильпотентных алгебр, называются локально нильпотентными. Я расскажу, как работает метод орбит для таких алгебр, какие результаты становятся сложнее, а какие — проще по сравнению с конечномерным вариантом. Основным примером будут нильрадикалы борелевских подалгебр простых бесконечномерных алгебр Ли. (Классификация борелевских подалгебр — в отличие от конечномерного случая — нетривиальна и красива сама по себе; о ней я тоже расскажу.)

Метод орбит и квантования

И.В. Лосев
Йельский Университет, Нью-Хейвен, США
ivan.loseu@gmail.com

Первоначально, метод орбит был предложен А.А. Кирилловым в 1962 году для классификации унитарных представлений нильпотентных групп Ли. А именно, пусть G — односвязная нильпотентная группа Ли. Кириллов построил естественную биекцию между коприсоединёнными орбитами группы G и множеством классов изоморфизма неприводимых унитарных представлений этой группы в гильбертовых пространствах. Вскоре после работы Кириллова Диксмье получил алгебраическую версию этого результата: коприсоединённые орбиты нильпотентной группы находятся в естественной биекции с примитивными идеалами в универсальной обёртывающей алгебре. Эти результаты можно мыслить как проявление принципа соответствия между классической и квантовой механикой.

Важный вопрос, открытый уже более 50 лет, — это как перенести результаты Кириллова и Диксмье на случай полупростых групп и алгебр Ли. В этих лекциях я обсужу случай алгебр Ли, сосредоточившись на классических алгебрах. В этом случае можно надеяться установить естественную биекцию между эквивариантными накрытиями присоединённых орбит и эквивариантными квантованиями накрытий нильпотентных орбит. Мы также обсудим аналог метода орбит для разных интересных представлений полупростых алгебр Ли. А именно, для некоторых классов неприводимых модулей Хариш-Чандры мы обсудим их классификацию в геометрических терминах.

Окна в производные категории факторов GIT и пространств модулей

Е.А. Тевелев
Университет Массачусетса, Амхерст, США,
Католический Университет Чили, Сантьяго, Чили
tevelev@math.umass.edu

В лекциях будут разобраны новые (и некоторые старые) приложения теорем Телемана, Халперн-Лейстнера и Балларда–Фаверо–Кацаркова о сравнении когомологий векторных расслоений (и производных категорий) на факторах GIT с эквивариантными когомологиями (и эквивариантными категориями). Мы начнём с краткого обзора геометрической теории инвариантов и стратификации Кемпфа–Несс на примере нескольких важных многообразий. Затем мы дадим набросок доказательства теоремы квантизации Телемана и её обобщения Халперн-Лейстнером, метод окон в производные категории. Далее мы разберём несколько приложений, особенно доказательство гипотезы Манина о существовании симметричных исключительных наборов на пространствах модулей стабильных рациональных кривых с отмеченными точками. Новые результаты были получены совместно с Ана-Марией Кастравет и Себастьяном Торресом.

Пуассон-коммутативные подалгебры симметрической алгебры $S(\mathfrak{g})$

О.С. Якимова
Университет Йены, Йена, Германия
oksana.yakimova@uni-jena.de

На двойственном пространстве $S(\mathfrak{q})$ конечномерной комплексной алгебры Ли $\mathfrak{q}$ определена каноническая структура Пуассона. Иначе говоря, на симметрической алгебре $S(\mathfrak{q})$ задана скобка Пуассона–Ли $\{\cdot,\cdot\}$. Подалгебра $A \subset S(\mathfrak{q})$ Пуассон-коммутативна, если $\{A, A\} = 0$. Интерес к таким подалгебрам возник в задачах гамильтоновой механики.

Пусть теперь $\mathfrak{g}$ — это редуктивная алгебра Ли. Наиболее известными Пуассон-коммутативными подалгебрами в $S(\mathfrak{g})$ являются подалгебры Гельфанда–Цетлина (ГЦ), построенные по цепочкам со свободными от кратностей правилами ветвления, и Мищенко–Фоменко (МФ), известные также как подалгебры «сдвига аргумента».

Мы обсудим новые результаты, касающиеся полноты ГЦ- и МФ-подалгебр на (ко)присоединённых орбитах. Будет также представлена конструкция, позволяющая построить максимальную Пуассон-коммутативную подалгебру, соответствующую практически произвольной цепочке симметрических пар.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

О вычислении расширенных полугрупп старших весов для сферических однородных пространств

Р.С. Авдеев
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
suselr@yandex.ru

Пусть G — связная редуктивная комплексная алгебраическая группа и B — её борелевская подгруппа. Замкнутая подгруппа $H \subset G$ называется *сферической* (однородное пространство G/H — сферическим), если B имеет открытую орбиту в G/H.

В рамках общей теории каждому сферическому однородному пространству G/H сопоставляются несколько комбинаторных инвариантов, которые играют ключевую роль в классификации сферических однородных пространств и описании их открытых эквивариантных нормальных вложений. Одним из этих инвариантов является набор так называемых сферических корней. В работе [1] показано, что полная информация о всех остальных из упомянутых выше инвариантов содержится в ещё одном инварианте, называемом расширенной полугруппой старших весов. В этой связи важная и естественная задача — научиться вычислять набор сферических корней и расширенную полугруппу старших весов для G/H исходя из явного вида подгруппы H. Стандартным способом задания подгруппы H служит регулярное вложение в некоторую параболическую подгруппу $P \subset G$, что означает включения $H \subset P$ и $H_u \subset P_u$ (индекс u обозначает унипотентный радикал).

В препринте [2] предложена общая стратегия вычисления набора сферических корней для произвольной сферической подгруппы $H \subset G$, а также её конкретная реализация в случае, когда H регулярно вложена в параболическую подгруппу P таким образом, что подгруппа Леви группы H содержит коммутант подгруппы Леви группы P. С помощью этих результатов найдены явные эффективные алгоритмы вычисления набора сферических корней для сферических подгрупп из указанного класса. Настоящий доклад посвящён задаче вычисления расширенных полугрупп старших весов.

Для всякой алгебраической группы K обозначим через $\mathfrak{X}(K)$ группу её характеров.

Зафиксируем максимальный тор $T \subset B$ и борелевскую подгруппу $B^- \subset G$, для которой $B \cap B^- = T$. Пусть $\Lambda^+(G) \subset \mathfrak{X}(T)$ — полугруппа доминантных весов по отношению к B. Для каждого $\lambda \in \Lambda^+(G)$ обозначим через $V(\lambda)$ неприводимый G-модуль со старшим весом λ.

Согласно результату Э. Б. Винберга и Б. Н. Кимельфельда [4], подгруппа $H \subset G$ является сферической тогда и только тогда, когда для всех $\lambda \in \Lambda^+(G)$ и $\chi \in \mathfrak{X}(H)$ выполняется неравенство $\dim V(\lambda)^{(H)}_\chi \leqslant 1$, где $V(\lambda)^{(H)}_\chi \subset V(\lambda)$ — подпространство H-полуинвариантных векторов веса χ.

Далее считаем, что $H \subset G$ — сферическая подгруппа. *Расширенная полугруппа старших весов* сферического однородного пространства G/H определяется как

$$\widehat{\Lambda}^+ = \{(\lambda, \chi) \in \Lambda^+(G) \times \mathfrak{X}(H) \mid [V(\lambda)^*]^{(H)}_\chi \neq 0\},$$

где звёздочка означает двойственный модуль.

Задача вычисления полугруппы $\widehat{\Lambda}^+$ легко сводится к случаю, когда G полупроста и односвязна, далее будем считать эти условия выполненными. Как показано в [3], в этом случае полугруппа $\widehat{\Lambda}^+$ свободна, а её неразложимые элементы находятся в естественной биекции с B-инвариантными простыми дивизорами в G/H (они называются «красками»), множество которых обозначим через $\mathcal{D}$. Для каждого дивизора $D \in \mathcal{D}$ обозначим через (λ_D, χ_D) соответствующий неразложимый элемент полугруппы $\widehat{\Lambda}^+$.

Теперь предположим, что H регулярно вложена в некоторую параболическую подгруппу $P \subset G$. С практической точки зрения удобно считать, что $P \supset B^-$. Пусть L — подгруппа Леви в P, содержащая T. Заменяя при необходимости подгруппу H сопряжённой, будем считать, что $K = H \cap L$ является подгруппой Леви в H. Далее, обозначим через S стабилизатор общего положения для действия группы K на пространстве $\operatorname{Lie} L / \operatorname{Lie} K$, это редуктивная подгруппа в K. Тогда теорема Панюшева [5] утверждает, что сферичность подгруппы H равносильна одновременному выполнению следующих двух условий:

(1) подгруппа K сферична в L;

(2) $\operatorname{Lie} P_u / \operatorname{Lie} H_u$ является сферическим S-модулем (то есть обладает открытой орбитой борелевской подгруппы группы S).

По отношению к рассматриваемому регулярному вложению $H \subset P$ возникает разбиение $\mathcal{D} = \mathcal{D}1 \cup \mathcal{D}2 \cup \mathcal{D}3$, где

$\mathcal{D}1$ находится в биекции с B-инвариантными простыми дивизорами в G/P;

$\mathcal{D}2$ находится в биекции с $B \cap L$-инвариантными простыми дивизорами в L/K;

$\mathcal{D}3$ находится в биекции с $B \cap S$-инвариантными простыми дивизорами в $\operatorname{Lie} P_u / \operatorname{Lie} H_u$.

Для каждого $D \in \mathcal{D}3$ соответствующий $B \cap S$-инвариантный простой дивизор в $\operatorname{Lie} P_u / \operatorname{Lie} H_u$ является дивизором нулей некоторой $B \cap S$-полуинвариантной регулярной функции, обозначим через μ_D её вес.

Можно показать, что элементы (λ_D, χ_D) для $D \in \mathcal{D}1 \cup \mathcal{D}2$ явно вычисляются исходя из полугрупп $\widehat{\Lambda}^+(G/P)$ и $\widehat{\Lambda}^+(L/K)$, а каждый элемент (λ_D, χ_D) для $D \in \mathcal{D}3$ определяется по элементу μ_D однозначно с точностью до целочисленной линейной комбинации элементов $(\lambda_{D'}, \chi_{D'})$, где $D' \in \mathcal{D}1 \cup \mathcal{D}2$. Оказывается, что для определения коэффициентов в упомянутой выше линейной комбинации достаточно знать, какие простые корни группы G являются сферическими корнями для G/H, что приводит к следующему основному результату.

Теорема. Множество $\{(\lambda_D, \chi_D) \mid D \in \mathcal{D}\}$ явно вычисляется исходя из $\widehat{\Lambda}^+(G/P)$, $\widehat{\Lambda}^+(L/K)$, $\{\mu_D \mid D \in \mathcal{D}3\}$ и множества простых сферических корней пространства G/H.

Если H — сферическая подгруппа из рассматривавшегося в [2] класса (см. выше), то комбинация данной теоремы с найденными в [2] алгоритмами вычисления сферических корней позволяет вычислить все комбинаторные инварианты сферического однородного пространства G/H. В частном случае, когда H — связная разрешимая сферическая подгруппа, это даёт новое доказательство основного результата работы [3] о структуре полугруппы $\widehat{\Lambda}^+(G/H)$.

Список литературы

[1] R. Avdeev. Strongly solvable spherical subgroups and their combinatorial invariants. Selecta Math. (N. S.) **21** (2015), no. 3, 931–993, arXiv: `math.AG/1212.3256`.

[2] R. Avdeev. Degenerations of spherical subalgebras and spherical roots, arXiv: `math.AG/1905.01169` (2019).

[3] Р.С. Авдеев, Н.Е. Горфинкель. Гармонический анализ на сферических однородных пространствах с разрешимым стабилизатором. Функц. анализ и его прил. **46** (2012), no. 3, 1–15, arXiv: `math.RT/:1106.1070`.

[4] Э.Б. Винберг, Б.Н. Кимельфельд. Однородные области на флаговых многообразиях и сферические подгруппы полупростых групп Ли. Функц. анализ и его прил. **12** (1978), no. 3, 12–19.

[5] D.I. Panyushev. Complexity and nilpotent orbits. Manuscripta Math. **83** (1994), no. 1, 223–237.

Аддитивные действия на полных алгебраических многообразиях

И.В. Аржанцев[1]
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
arjantsev@hse.ru

Рассмотрим нормальное полное алгебраическое многообразие X размерности n над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. Пусть $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$ и $\mathbb{G}_a^n = \mathbb{G}_a \times \ldots \times \mathbb{G}_a$ (n копий) — коммутативная унипотентная аффинная алгебраическая группа.

Аддитивным действием на многообразии X мы называем эффективное регулярное действие $\mathbb{G}_a^n \times X \to X$ с открытой орбитой. Систематическое исследование аддитивных действий начато в работе [10] в связи с задачами арифметической алгебраической геометрии (гипотеза Манина). Также проблема описания аддитивных действий крайне естественна в контексте теории алгебраических групп преобразования, в частности, в рамках классификации эквивариантных пополнений линейных алгебраических групп.

Задача классификации аддитивных действий на данном многообразии X часто оказывается весьма содержательной. Так, аддитивные действия на проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ находятся в естественном биективном соответствии с $(n+1)$-мерными коммутативными ассоциативными локальными $\mathbb{K}$-алгебрами с единицей [10], [12]. Развитие этого подхода привело к доказательству единственности аддитивного действия на невырожденной квадрике [13] и к описанию аддитивных действий на вырожденных квадриках [3], [5].

В настоящее время найдено полное описание аддитивных действий на обобщённых многообразиях флагов [1], [8], [7]. В случае торических многообразий получено описание аддитивных действий, нормализуемых действующим тором, и доказано, что наличие аддитивного действия на полном торическом многообразии влечёт наличие нормализуемого аддитивного действия [4]. Достигнут существенный прогресс в классификации аддитивных действий на полных поверхностях и многомерных многообразиях определённых типов, см., например, [6], [8], [9].

В докладе будет рассказано о нескольких подходах к задаче классификации аддитивных действий и о недавних результатах, полученных в этом направлении. Мы обсудим связь наличия одного или нескольких аддитивных действий с геометрическими свойствами многообразия. Также будет установлено соответствие между аддитивными действиями на торических многообразиях и структурами коммутативных моноидов на аффинном пространстве [2].

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 19–11–00172.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev. Flag varieties as equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$. Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), no. 3, 783–786.

[2] I. Arzhantsev, S. Bragin, Yu. Zaitseva. Commutative algebraic monoid structures on affine spaces. Comm. Contem. Math. (2020), in press, arXiv: `math.AG/1809.05291`.

[3] I. Arzhantsev, A. Popovskiy. Additive actions on projective hypersurfaces. In: Automorphisms in Birational and Affine Geometry, Springer Proc. Math. Stat. **79**, Springer, 2014, 17–33.

[4] I. Arzhantsev, E. Romaskevich. Additive actions on toric varieties. Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), no. 5, 1865–1879.

[5] I. Arzhantsev, E. Sharoyko. Hassett–Tschinkel correspondence: Modality and projective hypersurfaces. J. Algebra **348** (2011), no. 1, 217–232.

[6] U. Derenthal, D. Loughran. Singular del Pezzo surfaces that are equivariant compactifications. J. Math. Sci. **171** (2010), no. 6, 714–724.

[7] R. Devyatov. Unipotent commutative group actions on flag varieties and nilpotent multiplications. Transformation Groups **20** (2015), no. 1, 21–64.

[8] B. Fu, J.-M. Hwang. Uniqueness of equivariant compactifications of $\mathbb{C}^n$ by a Fano manifold of Picard number 1. Math. Res. Lett. **21** (2014), no. 1, 121–125.

[9] B. Fu, P. Montero. Equivariant compactifications of vector groups with high index. Comptes Rendus Math. **357** (2019), no. 5, 455–461.

[10] B. Hassett, Yu. Tschinkel. Geometry of equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$. Int. Math. Res. Notices **1999** (1999), no. 22, 1211–1230.

[11] Zh. Huang, P. Montero. Fano threefolds as equivariant compactifications of the vector group. Michigan Math. J. (2020), in press, arXiv: `math.AG/1802.08090`.

[12] F. Knop, H. Lange. Commutative algebraic groups and intersections of quadrics. Math. Ann. **267** (1984), no. 4, 555–571.

[13] E. Sharoiko. Hassett–Tschinkel correspondence and automorphisms of a quadric. Sbornik Math. **200** (2009), no. 11, 1715–1729.

Базис Гельфанда–Капранова–Зелевинского

Д.В. Артамонов
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
artamonov.dmitri@gmail.com

Рассмотрим группу $GL_N(\mathbb{C})$ и функции на ней. На этом пространстве имеется действие самой группы правыми сдвигами, таким образом, всё пространство функций становится представлением $GL_N(\mathbb{C})$. Переходя к инфинитезимальной версии этого действия, мы получаем, что пространство функций на $GL_N(\mathbb{C})$ есть представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$.

Далее обсуждаются только неприводимые конечномерные представления $\mathfrak{gl}_N$. У таких представлений имеются многочисленные явные конструкции (то есть явное перечисление базисных векторов и явно выписанные формулы действия генераторов алгебры на них). Одно из важнейших явных описаний было получено Гельфандом и Цетлиным.

Возникает вопрос: какие функции на группе соответствуют базисным векторам Гельфанда–Цетлина?

Случай $\mathfrak{gl}_2$ тривиален, простейшим нетривиальным является случай $\mathfrak{gl}_3$. Ответ был получен в работе [1], он устанавливает неожиданную глубокую связь с теорией специальных функций. Оказывается, что в рассматриваемом случае функции, соответствующие диаграмме, выражаются с помощью гипергеометрической функции Гаусса (куда подставляются миноры от матрицы, составленной из матричных элементов). Более того, в работе [1] намечен вывод формул для действия генераторов, основанный на рассмотрении соотношений, которым удовлетворяет гипергеометрическая функция Гаусса.

В докладе будет обсуждаться случай $N > 3$. Именно, по аналогии со случаем $N = 3$ мы построим базис, определяемый функциями на $GL_N(\mathbb{C})$, выражающимися через гипергеометрические функции (на этот раз — через многомерные обобщения гипергеометрической функции Гаусса). А потом зададимся вопросом — получили ли мы базис Гельфанда–Цетлина?

Итак, прежде всего будет предъявлен естественный аналог гипергеометрической функции Гаусса. Его определение использует относительно современные результаты теории гипергеометрических функций, полученные Гельфандом, Капрановым, Зелевинским (см. обзор [2]). С помощью этого аналога будет предъявлен некоторый базис в представлении $\mathfrak{gl}_N$, причём будет показано, как можно получить формулы действия генераторов алгебры.

При выводе этих результатов ключевую роль играют свойства обобщённых гипергеометрических функций, прежде всего, дифференциальные уравнения, которым они удовлетворяют.

К сожалению, при $N > 3$ построенный базис отличается от базиса Гельфанда–Цетлина. В докладе будет сказано об их связи: в некотором смысле, базис, построенный в работе, — удачное приближение к базису Гельфанда–Цетлина.

Список литературы

[1] L.C. Biedenharn, G.E. Baid. On the representations of semisimple Lie groups II. J. Math. Phys. **4** (1963), no. 12, 1449–1466.

[2] И.М. Гельфанд, М.И. Граев, В.С. Ретах. Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа. УМН **47** (1992), no. 4, 3—82.

Гибкость не обязательно нормальных торических многообразий

И.А. Болдырев (по совместной работе с С.А. Гайфуллиным)
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
boldyrev.i.al@gmail.com

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Аддитивную группу поля $\mathbb{K}$ будем обозначать $\mathbb{G}_a$. Рассмотрим неприводимое аффинное алгебраическое многообразие X над полем $\mathbb{K}$. Многообразие X называется *торическим*, если алгебраический тор $T \cong (\mathbb{K}^\times)^n$ действует на нём с открытой орбитой. Зачастую в понятие торического многообразия вкладывают ещё условие нормальности многообразия X. Мы же этого не предполагаем.

В работе [1] введена подгруппа специальных автоморфизмов $\mathrm{SAut}(X)$ в группе регулярных автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$. Подгруппа $\mathrm{SAut}(X)$ по определению порождена всеми алгебраическими подгруппами, изоморфными $\mathbb{G}_a$. Подгруппа $\mathrm{SAut}(X)$ по определению порождена всеми алгебраическими подгруппами, изоморфными $\mathbb{G}_a$. Точка $x \in X$ называется *гибкой*, если касательное пространство T_xX порождается касательными векторами к орбитам $\mathbb{G}_a$-подгрупп. Если все гладкие точки X являются гибкими, то $\mathrm{SAut}(X)$ действует на множестве гладких точек X^{reg} транзитивно. В таком случае многообразие X называется *гибким*. Напомним, что действие группы G на множестве Y называется *бесконечно транзитивным*, если для любых двух конечных наборов одинаковой длины различных элементов $(a_1, \ldots, a_m)$ и $(b_1, \ldots, b_m)$ существует элемент $g \in G$ такой, что $g \cdot a_i = b_i$ выполнено при всех $1 \leq i \leq m$. Интерес к гибким многообразиям во многом обусловлен следующей теоремой.

Теорема. ([1] теорема 0.1) *Для неприводимого аффинного многообразия X размерности ≥ 2 следующие условия эквивалентны.*

(i) Группа $\mathrm{SAut}(X)$ *действует транзитивно на* X^{reg}.

(ii) Группа $\mathrm{SAut}(X)$ *действует бесконечно транзитивно на* X^{reg}.

(iii) Многообразие X гибко.

Есть множество работ, которые доказывают гибкость того или иного класса многообразий, например [1], [2], [3]. Один из первых примеров гибких многообразий дают невырожденные нормальные торические многообразия, см. [2]. С другой стороны, если отказаться от условия нормальности, то торическое многообразие может оказаться негибким. Например, торическая кривая $\{x^2 = y^3\}$ не является гибкой, так как не изоморфна прямой.

Гибкие многообразия соответствуют ситуации, когда группа $\mathrm{SAut}(X)$ большая и действует на X^{reg} транзитивно. В некотором смысле противоположная ситуация имеет место, когда группа $\mathrm{SAut}(X)$ тривиальна. В этом случае X называется *жёстким* многообразием. Жёсткие многообразия характерны тем, что в группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ существует единственный максимальный регулярный алгебраический тор. Иногда это дает возможность явно описать группу автоморфизмов многообразия X, см. [4]. В докладе будет рассказано о полученных критериях гибкости и жёсткости не обязательно нормальных торических многообразий, а также будет приведено явное описание групп автоморфизмов жёстких аффинных торических многообразий. Ответ сформулирован как в терминах комбинаторного описания торических многообразий, так и в геометрических терминах.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. **162** (2013), no. 4, 767–823.

[2] И.В. Аржанцев, М.Г. Зайденберг, К.Г. Куюмжиян. Многообразия флагов, торические многообразия и надстройки: три примера бесконечной транзитивности. Математический сборник **203** (2012), no. 7, 3–30.

[3] А.А. Шафаревич. Гибкость S-многообразий полупростых групп. Математический сборник **208** (2017), no. 2, 285–310.

[4] I. Arzhantsev, S. Gaifullin. The automorphism group of a rigid affine variety. Math. Nachr. **290** (2017), no. 5–6, 662–671.

Действия коммутативных групп на невырожденных квадриках с открытой орбитой

В.А. Боровик[1], С.А. Гайфуллин[1,2,3], А.Н. Трушин[1,2]
[1]Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
[2]НИУ ВШЭ, Москва, Россия
sgayf@yandex.ru

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Обозначим через $\mathbb{G}_a$ аддитивную группу поля $\mathbb{K}$, а через $\mathbb{G}_m$ — его мультипликативную группу. Рассмотрим проективное пространство $\mathbb{P}^n$ над полем $\mathbb{K}$. В работе [2] установлено соответствие между эффективными алгебраическими действиями аддитивной группы $(\mathbb{G}_a)^k$ на $\mathbb{P}^n$ и локальными коммутативными ассоциативными $(n+1)$-мерными алгебрами с единицей с k-мерным порождающим пространством, содержащемся в максимальном идеале (соответствие Хассета–Чинкеля).

В работе [3] (см. также [1]) описаны действия группы $(\mathbb{G}_a)^n$ на невырожденной квадрике $Q \subset \mathbb{P}^{n+1}$ с открытой орбитой. Для того, чтобы описать такие действия, доказывается, что все они происходят из действий $(\mathbb{G}_a)^n$ на $\mathbb{P}^{n+1}$. На соответствующей алгебре можно ввести структуру инвариантного скалярного умножения. Далее классифицируются локальные алгебры со скалярным умножением. Оказывается, что для каждого n существует единственное с точностью до изоморфизма $(\mathbb{G}_a)^n$-действие на Q с открытой орбитой.

В докладе будет рассказано об обобщении результата работы [3] на случай произвольной линейной коммутативной группы $(\mathbb{G}_a)^l \times (\mathbb{G}_m)^r$. Оказывается, что при $n \geq 3$ нет коммутативных действий с открытой орбитой на невырожденной квадрике, кроме аддитивных.

Теорема. *При $n > 2$ не существует никаких действий линейной коммутативной группы $(\mathbb{G}_a)^l \times (\mathbb{G}_m)^r$ на невырожденной n-мерной квадрике с открытой орбитой, кроме аддитивных действий, то есть случая $r = 0$. При $n = 2$ есть одно с точностью до изоморфизма неаддитивное действие группы $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m$ на двумерной невырожденной квадрике.*

Для доказательства этой теоремы развита техника, обобщающая соответствие Хассета–Чинкеля на случай произвольной коммутативной линейной группы. Далее обобщаются идеи работ [3] и [1] на этот случай.

[3]Автор поддержан РНФ, проект номер 19–11–00172.

Список литературы
[1] I. Arzhantsev, A. Popovskiy. Additive actions on projective hypersurfaces. In: Automorphisms in Birational and Affine Geometry. Levico Terme **79**: Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. L., NY, Dordrecht, Heidelberg: Springer, 2014, 17–33.
[2] B. Hassett, Yu. Tschinkel. Geometry of equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$. Int. Math. Res. Notices **1999** (1999), no. 22, 1211–1230.
[3] Е.В. Шаройко. Соответствие Хассета–Чинкеля и автоморфизмы квадрики. Математический сборник **200** (2009), no. 11, 145–160.

Алгебра Ли дифференцирований абелевых функций по параметрам

Е.Ю. Бунькова
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
bunkova@mi-ras.ru

Работа частично поддержана Программой РАН «Нелинейная динамика: фундаментальные проблемы и приложения» и Российским фондом фундаментальных исследований (проект 17–01–00366 А).

Задача дифференцирования абелевых функций по параметрам поставлена в [1]. Она является обобщением на многомерный случай классического результата Ф.Г. Фробениуса и Л. Штикельбергера 1882-го года [2], построивших образующие алгебры Ли дифференцирований эллиптических функций:

$$\mathcal{L}_0 = 4\lambda_4\partial_{\lambda_4} + 6\lambda_6\partial_{\lambda_6} - z\partial_z, \ \ \mathcal{L}_1 = \partial_z, \ \ \mathcal{L}_2 = 6\lambda_6\partial_{\lambda_4} - \frac{4}{3}\lambda_4^2\partial_{\lambda_6} - \zeta(z;\lambda_4,\lambda_6)\partial_z.$$

Эллиптической функцией [3] называется мероморфная функция $f(z)$ на $\mathbb{C}$ с решёткой периодов Γ, то есть удовлетворяющая условию $f(z+\omega) = f(z)$ для любых $z \in \mathbb{C}$, $\omega \in \Gamma$. Тор $\mathbb{C}/\Gamma$ является якобианом эллиптической кривой $y^2 = x^3 + \lambda_4 x + \lambda_6$ (рода $g = 1$), и таким образом параметры (λ_4, λ_6) эллиптической кривой параметризуют решётки Γ. Любую эллиптическую функцию можно представить как рациональную функцию от функции Вейерштрасса $\wp(z;\lambda_4,\lambda_6)$ с теми же периодами и её производной по z. Таким образом, мы получаем мероморфную функцию $f(z,\lambda_4,\lambda_6)$ от трёх переменных. Обратим внимание, что $\partial_z f(z,\lambda_4,\lambda_6)$ — также эллиптическая функция с теми же периодами, что и $f(z,\lambda_4,\lambda_6)$, но $\partial_{\lambda_4} f(z,\lambda_4,\lambda_6)$ и $\partial_{\lambda_6} f(z,\lambda_4,\lambda_6)$, в общем случае — мероморфные, но не эллиптические функции. Для построенных полей

$(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ и эллиптической функции f мероморфная функция $\mathcal{L}_k f$ является эллиптической. Поскольку для рода $g = 1$ классы абелевых и эллиптических функций совпадают, то поля $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_2$ решают задачу дифференцирования абелевых функций по параметрам в этом случае.

В докладе будут представлены результаты по этой задаче, полученные в случае рода $g > 1$. Для гиперэллиптических функций, заданных на якобианах гиперэллиптических кривых рода g в модели

$$\mathcal{V}_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \colon y^2 = x^{2g+1} + \lambda_4 x^{2g-1} + \lambda_6 x^{2g-2} + \ldots + \lambda_{4g} x + \lambda_{4g+2}\},$$

задача состоит в построении $3g$ образующих алгебры Ли дифференцирований таких функций. В работе [4] эта задача решена для рода $g = 2$, в работе [5] эта задача решена для рода $g = 3$, в работе [6] эта задача решена для рода $g = 4$.

Предложенный метод решения использует структуру возникающих в этой задаче градуированных полиномиальных алгебр Ли. Это позволяет нам получить решение поставленной задачи в явном виде. Интересны полиномиальные динамические системы, естественно возникающие в этой задаче. Основные результаты доклада можно найти в [5], [6].

Список литературы

[1] В.М. Бухштабер, Д.В. Лейкин. Решение задачи дифференцирования абелевых функций по параметрам для семейств (n, s)-кривых. Функц. анализ и его прил. **42** (2008), no. 4, 24–36.
[2] F.G. Frobenius, L. Stickelberger. Über die Differentiation der elliptischen Functionen nach den Perioden und Invarianten. J. Reine Angew. Math. **92** (1882), 311–337.
[3] Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. Курс современного анализа, ч. 2. Трансцендентные функции. — М.: УРСС, 2010.
[4] В.М. Бухштабер. Полиномиальные динамические системы и уравнение Кортевега—де Фриза. Тр. МИАН **294** (2016), 191–215.
[5] E.Yu. Bunkova. Differentiation of genus 3 hyperelliptic functions. European Journal of Mathematics, **4** (2018), no. 1, 93–112.
[6] V.M. Buchstaber, E.Yu. Bunkova. Differentiation of genus 4 hyperelliptic functions, arXiv: `nlin.SI/1912.11379` (2019).

Распознавание группы по условиям на классы сопряжённых элементов

Г.В. Воскресенская
Самарский университет, Самара, Россия
galvosk@mail.ru

Пусть G — конечная группа, $c(n,G) = c_G(n)$ — количество классов сопряжённых элементов, на которые распределяются элементы порядка n в группе G. Мы расскажем в докладе о свойствах функции $c(n,G)$.

Основной вопрос. Пусть G, H — конечные группы равных порядков. При каких условиях на группы верно утверждение «$\forall\, n \in \mathbb{N}\ c(n,G) = c(n,H)$ в том и только в том случае, когда $G \cong H$»?

Это утверждение верно для групп небольших порядков или хорошо известной структуры, например, абелевых. В общем случае, как показал Р .Гонин, оно неверно. Например, существуют две неизоморфные группы G и H порядка 100, для которых $\forall\, n \in \mathbb{N}\ c(n,G) = c(n,H)$.

При изучении этого вопроса можно выделить две основные проблемы.

1) Пусть $|G| = |H|$, множества $\{c(n,G)\}$ и $\{c(n,H)\}$ совпадают. Что можно сказать о структуре этих групп? В частности, при каких условиях они изоморфны?

2) Проблема определения некоторых свойств группы по условиям на $c(n,G)$. Иногда достаточно рассматривать не все n. Например, легко распознать абелевость.

В докладе планируется рассказать о результатах, полученных в этих направлениях.

Теорема 1. Пусть p — нечётное простое число, $|G| = p^n$, $c(p^{n-1},G) \neq 0$. Тогда имеются ровно две возможности:

1) если $c(p^{n-2},G) = p \cdot \varphi(p^{n-2})$, то $G \cong \mathbb{Z}_{p^{n-1}} \times \mathbb{Z}_p$.

2) если $c(p^{n-2},G) = \varphi(p^{n-2})$, то $G \cong \langle a, b\colon a^{p^{n-1}} = b^p = e, ba = a^{1+p^{n-2}}b\rangle$.

Теорема 2. Пусть p — нечётное простое число, целое число l имеет по модулю p^2 показатель p, целое число m удовлетворяет условию $l \cdot m \equiv 1 \pmod{p^2}$. Тогда для приведенных ниже неизоморфных групп G и H выполняется условие $\forall\, n \in \mathbb{N}\ c(n,G) = c(n,H)$:

$$G \cong \langle a, b, c\colon a^{p^2} = b^{p^2} = c^p = e,\ c^{-1}ac = a^l,\ c^{-1}bc = b^l,\ ab = ba\rangle,$$
$$H \cong \langle a, b, c\colon a^{p^2} = b^{p^2} = c^p = e,\ c^{-1}ac = a^l,\ c^{-1}bc = b^m,\ ab = ba\rangle.$$

Список литературы
[1] Г.С.М. Коксетер, У.О.Дж. Мозер. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. — М.: Наука, 1980.
[2] М. Холл. Теория групп. — М.: Изд–во иностранной литературы, 1962.

О надгруппах подсистемных подгрупп

П.Б. Гвоздевский
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
gvozdevskiy96@gmail.com

Доклад основан на работе автора [2].

Для каждой системы корней Φ и коммутативного кольца R определена группа Шевалле $G(\Phi, R)$. Пусть Δ — подсистема в системе Φ, тогда подгруппа $E(\Delta, R) \leq G(\Phi, R)$, порождённая всеми элементарными корневыми элементами $x_\alpha(\xi)$, где $\alpha \in \Delta$ и $\xi \in R$, называется элементарной *подсистемной подгруппой*.

Проблемы, сформулированные в работе [1], состоят в том, чтобы для определённых пар (Φ, Δ) дать описание решетки надгрупп группы $E(\Delta, R)$, то есть подгрупп, промежуточных между $E(\Delta, R)$ и $G(\Phi, R)$. Основная теорема работы [2] решает большую часть этих проблем.

Одной из мотиваций может послужить тот факт, что для групп над полем подсистемные подгруппы часто являются максимальными. С точки зрения классификации максимальных подгрупп в конечных классических группах подсистемные подгруппы принадлежат классам Ашбахера C_1 и C_2.

Простейшим примером является случай $\Phi = A_{n-1}$, то есть $G(\Phi, R) = \mathrm{SL}_n(R)$ — группа $n \times n$ матриц с определителем, равным единице. В этом случае подсистемные подгруппы — это группы блочно-диагональных матриц. Задача описания надгрупп в этом случае была полностью изучена в работах Боревича и Вавилова. Аналогичная задача для ортогональных и симплектических групп (то есть случай $\Phi = B_n$, C_n, D_n) был изучен в диссертации Александра Щёголева. Поэтому на момент написания работы [2] основной интерес представляли исключительные группы.

Во всех случаях ответ дается в терминах сетей идеалов кольца R. Каждой надгруппе сопоставляется сеть идеалов, которая называется ее *уровнем*, и доказывается, что для каждой сети идеалов σ среди надгрупп уровня σ существуют наименьшая и наибольшая по включению. В нашем случае наименьшая подгруппа уровня σ будет обозначаться через $E(\sigma)$ и определяться своими элементарными образующими, а наибольшая будет обозначаться через $S(\sigma)$ и определяться как стабилизатор определенной подалгебры в алгебре Ли–Шевалле $L(\Phi, R)$ при присоединённом действии группы $G(\Phi, R)$.

Доклад будет посвящён развернутой формулировке и обсуждению следующего основного результаты работы [2].

Теорема. Пусть R — коммутативное кольцо. Пусть Φ — неприводимая система корней с простыми связями, Δ — ее подсистема, удовлетворяющая определенному комбинаторному условию. Тогда

1. Если кольцо R не имеет поля вычетов из двух элементов, то для любой надгруппы $E(\Delta, R) \leq H \leq G(\Phi, R)$ существует единственная сеть идеалов σ кольца R, такая, что
$$E(\sigma) \leq H \leq S(\sigma).$$
2. При фиксированных Φ и Δ предположим, что заключение первого пункта верно для $R = \mathbb{F}_2$. Тогда оно верно для произвольного кольца R.

Список литературы

[1] Н.А. Вавилов, А.В. Щёголев. Надгруппы subsystem subgroups в исключительных группах: уровни. Записки научных семинаров ПОМИ **400** (2012), 70–126.

[2] П.Б. Гвоздевский. Надгруппы subsystem subgroups в исключительных группах: $2A_1$-доказательство, arXiv: `math.GR/1910.08011` (2019).

Бирациональные преобразования в некоммутативной геометрии

М.Х. Гизатуллин
Самара, Россия
gizmarat@yandex.ru

Предполагаю рассказать о некоторых геометрических и теоретико-категорных построениях, полезных при рассмотрении как отдельных преобразований объектов, задаваемых посредством координат из некоммутативного тела (или даже почти-поля), так и групп (или даже группоидов), составленных из таких преобразований. Собираюсь на простых примерах показать полезность этих построений.

Двойные алгебры Ли и операторы Роты–Бакстера

В.Ю. Губарев
Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия
vsevolodgu@math.nsc.ru

Для $u \in V^{\otimes n}$ и $\sigma \in S_n$ через u^σ обозначим перестановку тензорных множителей.

Определение [3]. Векторное пространство V, снабжённое линейным отображением (двойной скобкой) $\{\{\cdot,\cdot\}\}\colon V\otimes V \to V\otimes V$, называется двойной алгеброй Ли, если выполнены следующие тождества для всех $a,b,c \in L$:

$$\{\{a,b\}\} = -\{\{b,a\}\}^{(12)},$$
$$\{\{a,\{\{b,c\}\}\}\}_L - \{\{b,\{\{a,c\}\}\}\}_R^{(12)} = \{\{\{\{a,b\}\},c\}\}_L,$$

где $\{\{a,b\otimes c\}\}_L = \{\{a,b\}\}\otimes c$, $\{\{a,b\otimes c\}\}_R = (b\otimes\{\{a,c\}\})^{(12)}$ и $\{\{a\otimes b,c\}\}_L = (\{\{a,c\}\}\otimes b)^{(23)}$.

Известно [1], что двойная скобка $\{\{\cdot,\cdot\}\}$ на конечномерном пространстве V может быть задана при помощи линейного оператора $R\colon \mathrm{End}(V)\to\mathrm{End}(V)$ равенством

$$\{\{a,b\}\} = \sum_i e_i(a)\otimes R(e_i^*)(b), \quad a,b\in V, \tag{1}$$

где $e_1,\ldots,e_N$ — базис $\mathrm{End}(V)$, а $e_1^*,\ldots,e_N^*$ — дуальный базис относительно формы следа.

Линейный оператор P на алгебре A называется оператором Роты–Бакстера веса 0, если

$$P(x)P(y) = P(P(x)y + xP(y))$$

выполнено для всех $x,y\in A$.

Теорема [1]. Пусть V — конечномерное пространство с двойной скобкой $\{\{\cdot,\cdot\}\}$ и оператор $R\colon \mathrm{End}(V)\to\mathrm{End}(V)$ соответствует этой скобке по (1). Тогда V является двойной алгеброй Ли тогда и только тогда, когда R — кососимметричный оператор Роты–Бакстера веса 0 на $\mathrm{End}(V)$.

Пусть $V = F[t]$. Обозначим через I идеал в $\mathrm{End}(V)$, состоящий из всех преобразований, которые действуют нетривиально только на конечномерном подпространстве V.

Пусть двойная скобка $\{\{\cdot,\cdot\}\}$ задана на V при помощи (1), где $R\colon I\to\mathrm{End}(V)$. Найдены достаточные условия на R, при которых $\langle V,\{\{\cdot,\cdot\}\}\rangle$ — двойная алгебра Ли.

Показано, что известные примеры [1], [3], [4] двойных алгебр Ли на $F[t]$ с точностью до сопряжения автоморфизмами и транспонированием соответствуют оператору

$$Q(e_{ij}) = \begin{cases} e_{i-1,j} + e_{i-2,j-1} + \ldots + e_{i-1-j,0}, & i > j, \\ -(e_{i,j+1} + e_{i+1,j+2} + \ldots), & i \leq j. \end{cases}$$

Оператор $-Q$ является пределом операторов Роты–Бакстера веса 0 на $M_n(F)$ из [2].

Зададим на $F[t]$ по (1) при помощи Q двойную алгебру M,

$$\{\{t^n, t^m\}\} = \frac{t^n \otimes t^m - t^m \otimes t^n}{t \otimes 1 - 1 \otimes t}.$$

В (1) доказано, что простых конечномерных двойных алгебр Ли не существует. Насколько известно автору, двойная алгебра M является первым примером простой двойной алгеброй Ли.

Список литературы

[1] M.E. Goncharov, P.S. Kolesnikov. Simple finite-dimensional double algebras. J. Algebra **500** (2018), 425–438.

[2] V. Gubarev. Rota—Baxter operators on unital algebras, arXiv: `math.RA/1805.00723` (2018).

[3] A. De Sole, V.G. Kac, D. Valeri. Double Poisson vertex algebras and non-commutative Hamiltonian equations. Adv. Math. **281** (2015), 1025–1099.

[4] M. Van den Bergh. Double Poisson algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), no. 11, 5711–5769.

Аддитивные действия на полных торических поверхностях

С.Н. Джунусов[1]

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

dzhunusov398@gmail.com

Доклад основан на работе автора, см. [2].

Аддитивным действием на алгебраическом многообразии будем называть регулярное эффективное действие коммутативной унипотентной группы $\mathbb{G}_a^n$ с открытой орбитой. Исследование аддитивных действий началось с работ Хассетта–Чинкеля для случая проективного пространства, см. [3].

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 19–11–00172.

В работе И.В. Аржанцева и Е.Л. Ромаскевич [1] описаны все полные торические многообразия, допускающие аддитивные действия. Я расскажу классификацию аддитивных действий на полных торических поверхностях. Оказывается, что возможны три случая:

1. многообразие не допускает аддитивных действий;
2. многообразие допускает единственное аддитивное действие, которое нормализуемо действующим тором;
3. многообразие допускает два неизоморфных аддитивных действия, одно из которых нормализуемо тором, а другое не нормализуемо.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, E. Romaskevich. Additive actions on toric varieties. Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), no. 5, 1865–1879.
[2] S. Dzhunusov. Additive action on toric surfaces, arXiv: `math.AG/1908.03563` (2019).
[3] B. Hassett, Yu. Tschinkel. Geometry of equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$. Int. Math. Res. Notices **1999** (1999), no. 22, 1211–1230.

Глобальные модули Демазюра и полубесконечные кривые Веронезе

И.С. Думанский
НИУ ВШЭ, НМУ, Москва, Россия
ilyadumnsk@gmail.com

Доклад основан на совместной работе автора с Е. Фейгиным [3].

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ — простая алгебра Ли, а $\mathfrak{g}[t] = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$ — соответствующая алгебра токов. Глобальный модуль Вейля $\mathbb{W}_\lambda$ веса λ над $\mathfrak{g}[t]$ определяется как циклический модуль с циклическим вектором v и определяющими соотношениями $\mathfrak{n}^+[t].v = 0$, $ht^0.v = \lambda(h)v$ для $h \in \mathfrak{h}$ и $(f_\alpha t^0)^{(\lambda,\alpha^\vee)+1}.v = 0$ для каждого положительного корня α. Локальный модуль Вейля получается из глобального добавлением соотношений $t\mathfrak{h}[t].v = 0$.

В работах [2], [4], [6] было доказано, что на глобальном модуле Вейля $\mathbb{W}_\lambda$ имеется свободное действие полиномиальной алгебры старших весов $\mathcal{A}_\lambda$, причем специализация в нуле по этому действию изоморфна локальному модулю Вейля.

В то же время, в [4] было доказано, что в типах ADE локальный модуль Вейля изоморфен модулю Демазюра уровня 1 для аффинной алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$: $W_\lambda = D_{1,\lambda}$. Это позволяет предположить существование глобальных модулей произвольного уровня, которые бы относились к модулям Демазюра так же, как глобальный модуль Вейля относится к локальному. Основным результатом нашей работы является построение таких циклических модулей $\mathbb{D}_{l,\lambda}$ уровня l и веса $l\lambda$, названных *глобальными модулями Демазюра*. Про эти модули доказана следующая теорема, являющаяся обобщением известной теоремы для глобальных модулей Вейля.

Теорема. На глобальном модуле Демазюра $\mathbb{D}_{l,\lambda}$ имеется свободное действие алгебры симметрических многочленов, индуцированное действием $\mathfrak{h}[t]$ на циклический вектор, причём специализация в нуле по этому действию изоморфна аффинному модулю Демазюра $D_{l,\lambda}$.

В работах [1], [5] было показано, что однородным координатным кольцом вложения Дринфельда–Плюккера полубесконечного многообразия флагов является $\bigoplus_\lambda \mathbb{W}_\lambda^*$. Это может быть обобщено до глобальных модулей Демазюра путем рассмотрения композиции вложений Дринфельда–Плюккера и вложения Веронезе.

Частный случай этой конструкции при $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ позволяет описать явно соотношения, задающие арксхему кривой Веронезе.

Список литературы

[1] A. Braverman, M. Finkelberg. Weyl modules and q-Whittaker functions. Math. Ann. **359** (2014), no. 1, 45–59.

[2] V. Chari, S. Loktev. Weyl, Demazure and fusion modules for the current algebra of $\mathfrak{sl}_{r+1}$. Adv. Math. **207** (2006), no. 2, 928–960.

[3] I. Dumanski, E. Feigin. Reduced arc schemes for Veronese embeddings and global Demazure modules, arXiv: `math.RT/1912.07988` (2019).

[4] G. Fourier, P. Littelmann. Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions. Adv. Math. **211** (2007), no. 2, 566–593.

[5] S. Kato. Demazure character formula for semi-infinite flag varieties. Math. Ann. **371** (2018), no. 3–4, 1769–1801.

[6] K. Naoi. Weyl modules, Demazure modules and finite crystals for non-simply laced type. Adv. Math. **229** (2012), no. 2, 875–934.

Структуры коммутативных алгебраических моноидов на аффинных пространствах

Ю.И. Зайцева[1]

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, НИУ ВШЭ, Москва, Россия

yuliazaitseva@gmail.com

Доклад основан на совместной работе автора с И.В. Аржанцевым и С.Д. Брагиным [1].

(Аффинным) алгебраическим моноидом называется неприводимое (аффинное) алгебраическое многообразие S с ассоциативным умножением

$$\mu\colon S \times S \to S, \quad (a, b) \mapsto ab,$$

которое является морфизмом алгебраических многообразий и обладает нейтральным элементом $e \in S$, то есть $ea = ae = a$ для любого $a \in S$. Группа обратимых элементов $G(S)$ алгебраического моноида S открыта в S и является алгебраической группой. Согласно результату А. Риттаторе, каждый алгебраический моноид S с аффинной алгебраической группой обратимых элементов $G(S)$ является аффинным моноидом. Аффинный алгебраический моноид S называется редуктивным, если группа $G(S)$ является редуктивной аффинной алгебраической группой.

Групповым вложением называется такое неприводимое аффинное многообразие X с открытым вложением $G \hookrightarrow X$ аффинной алгебраической группы G, что действия правыми и левыми умножениями G на себе продолжаются до действий группы G на X. Аффинный моноид S даёт групповое вложение $G(S) \hookrightarrow S$. Обратно, для каждого группового вложения $G \hookrightarrow S$ существует такая структура аффинного алгебраического моноида на S, что G совпадает с группой обратимых элементов $G(S)$. Это утверждение доказано в [3] в предположении, что G редуктивна, и в [2] для произвольной G.

Мы изучаем коммутативные аффинные алгебраические моноиды на аффинных пространствах. Основное поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто и характеристики нуль. Коммутативные редуктивные моноиды, то есть моноиды с алгебраическим тором в качестве группы обратимых элементов, суть торические многообразия. Мы сконцентрируемся на нередуктивном случае.

Определим ранг коммутативного моноида S как размерность максимального тора группы $G(S)$. Мы классифицируем коммутативные моноиды на $\mathbb{A}^n$ ранга 0, $n-1$ и n. В частности, это даёт классификацию коммутативных моноидов на $\mathbb{A}^n$ для $n \leq 2$.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 19–11–00172.

В основном результате [1] мы даём классификацию структур коммутативных моноидов на $\mathbb{A}^3$. Для $b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $b \leq c$, обозначим через $Q_{b,c}$ многочлен

$$Q_{b,c}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sum_{k=1}^{d} \binom{d+1}{k} x_1^{e+b(k-1)} y_1^{e+b(d-k)} x_2^{d-k+1} y_2^{k},$$

где $c = bd + e,\ \ d, e \in \mathbb{Z},\ \ 0 \leq e < b$. Заметим, что $Q_{b,c}(x_1, y_1, x_2, y_2) = Q_{b,c}(y_1, x_1, y_2, x_2)$ и

$$Q_{b,c}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{(x_1^b y_2 + y_1^b x_2)^{d+1} - (x_1^b y_2)^{d+1} - (y_1^b x_2)^{d+1}}{x_1^{b-e} y_1^{b-e}}.$$

Теорема. Каждый коммутативный моноид на $\mathbb{A}^3$ изоморфен одному из следующих:

rk	Обозначение	$(x_1, x_2, x_3) * (y_1, y_2, y_3)$
0	$3A$	$(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3)$
1	$M \underset{b}{+} A \underset{c}{+} A$	$\big(x_1 y_1,\ x_1^b y_2 + y_1^b x_2,\ x_1^c y_3 + y_1^c x_3\big),\ b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ b \leq c$
1	$M \underset{b}{+} A \underset{b,c}{+} A$	$\big(x_1 y_1,\ x_1^b y_2 + y_1^b x_2,\ x_1^c y_3 + y_1^c x_3 + Q_{b,c}(x_1, y_1, x_2, y_2)\big), b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, b \leq c$
2	$M + M \underset{b,c}{+} A$	$(x_1 y_1,\ x_2 y_2,\ x_1^b x_2^c y_3 + y_1^b y_2^c x_3),\ b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ b \leq c$
3	$3M$	$(x_1 y_1,\ x_2 y_2,\ x_3 y_3)$

Более того, любые два моноида различных типов или одного типа с разными значениями параметров не изоморфны.

Доказательство основано на классификации пар коммутирующих однородных локально нильпотентных дифференцирований степени нуль на положительно градуированной алгебре $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, S. Bragin, Yu. Zaitseva. Commutative algebraic monoid structures on affine spaces. Communications in Contemporary Mathematics, accepted, `doi:10.1142/S0219199719500640`.

[2] A. Rittatore. Algebraic monoids and group embeddings. Transformation Groups **3** (1998), no. 4, 375–396.

[3] E. Vinberg. On reductive algebraic semigroups. In: Lie Groups and Lie Algebras. AMS Transl. **169**, Amer. Math. Soc., 1995, 145–182.

Нетрадиционные когомологии: коммутативные алгебры Ли в характеристике 2 и CD алгебры

П. Зусманович
Университет Остравы, Острава, Чехия
pasha.zusmanovich@osu.cz

Я расскажу о двух вариациях на тему когомологий алгебр Ли. Первая вариация — так называемые коммутативные когомологии. Коммутативные алгебры Ли — это коммутативные алгебры в характеристике 2, удовлетворяющие тождеству Якоби. Этот класс алгебр шире чем класс алгебр Ли (которые удовлетворяют более специальному альтернированному тождеству $[x, x] = 0$). Естественные когомологии для коммутативных алгебр Ли получаются заменой в обычном комплексе Шевалле–Эйленберга альтернированных коцепей на симметрические. Эти когомологии появляются естественным образом в недавних усилиях по продвижению в классификации простых алгебр Ли в характеристике 2, и их свойства скорее напоминают когомологии супералгебр Ли (в любой характеристике), чем обычные когомологии Шевалле–Эйленберга.

Другая вариация — так называемые CD когомологии. Рассмотрим следующее естественное условие на (неассоциативную) алгебру: коммутатор двух правых (или левых) умножений является дифференцированием. Коммутативные алгебры с таким свойством включают в себя йордановы алгебры и изучались в литературе под названием «тройные алгебры Ли». Мы начали изучать антикоммутативные алгебры с таким свойством, назвав их «CD алгебры». Очевидно, алгебры Ли являются CD алгебрами. Оказывается, что CD алгебры являются, в некотором смысле, центральными расширениями алгебр Ли, что наводит на мысль о необходимости изучения когомологий в классе CD алгебр, по крайней мере в малых степенях.

Имеется множество открытых вопросов (как записать эти когомологии в виде производных функторов? выполняются ли аналоги лемм Уайтхеда для CD когомологий? и т.д.).

Удивительный факт: во всех известных мне случаях, когда коммутативные и CD когомологии доставляют инварианты, позволяющие различать простые алгебры Ли в характеристике 2, не различимые при помощи классических инвариантов (обычные когомологии, наличие симметрической инвариантной формы, и т.д.), они совпадают.

Список литературы
[1] V. Lopatkin, P. Zusmanovich. Commutative Lie algebras and commutative cohomology in characteristic 2, arXiv: `math.KT/1907.03690` (2019).
[2] I. Kaygorodov and P. Zusmanovich. On anticommutative algebras for which $[R_a, R_b]$ is a derivation, в процессе подготовки.

Подалгебры Бете в янгианах

А.И. Ильин
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
`alex.omsk2@gmail.com`

Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная комплексная простая алгебра Ли. Мы определяем семейство коммутативных подалгебр Бете в янгиане $Y(\mathfrak{g})$, параметризованных соответствующей присоединённой группой Ли G. Затем мы исследуем способы расширить пространство параметров — чудесная компактификация группы $\overline{G}$ и предельные подалгебры.

Далее, ограничим пространство параметров регулярными элементами максимального тора $T \subset G$. Пусть $\overline{T}$ — чудесная компактификация тора. Тогда $T^{reg} = \overline{T} \setminus C$, где C — это набор гиперповерхностей в $\overline{T}$. Следуя работе [1], по этим данным можно построить компактификацию $M_{\mathfrak{g}}$ множества T^{reg}.

Гипотеза. *$M_{\mathfrak{g}}$ является пространством параметров замыкания семейства подалгебр Бете $B(C) \subset Y(\mathfrak{g}), C \in T^{reg}$. Все предельные подалгебры — свободные, максимальные коммутативные подалгебры янгиана и имеют тот же ряд Пуанкаре, что и $B(C)$, $C \in G^{reg}$.*

В типе А гипотеза является теоремой. Доклад основан на совместных работах с Л.Г. Рыбниковым.

Список литературы
[1] C. De Concini, G. Gaiffi. Projective wonderful models for toric arrangements. Adv. Math. **327** (2018), 390–409.
[2] А.И. Ильин. О максимальности некоторых коммутативных подалгебр янгианов. Функц. анализ и его прил. **53** (2019), no. 4, 85–88.
[3] A. Ilin, L. Rybnikov. Bethe subalgebras in Yangians and the wonderful compactification. Commun. Math. Phys. **372** (2019), 343–366.

Слоения Лиувилля интегрируемых систем Ковалевской на пучке $so^*(3,1) - e^*(3) - so^*(4)$

В.А. Кибкало
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
slava.kibkalo@gmail.com

Доклад основан на работах автора [1], [2]. В них изучалась топология слоений Лиувилля интегрируемых аналогов системы Ковалевской для пучка алгебр Ли $so(3,1) - e(3) - so(4)$.

Классический случай Ковалевской интегрируемости уравнений динамики твердого тела в однородном поле силы тяжести может быть задан уравнениями Эйлера для алгебры Ли $e(3)$ группы движений трёхмерного пространства.

Как было обнаружено И.В. Комаровым в [3], классический случай допускает обобщение на случай пучка $so(3,1) - e(3) - so(4)$, для которого скобка Ли–Пуассона (на пространстве $\mathbb{R}^6(x_1, x_2, x_3, J_1, J_2, J_3)$) задается формулами

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \qquad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k \qquad \{x_i, x_j\} = \varkappa \varepsilon_{ijk} J_k,$$

где $\varepsilon_{ijk} = \operatorname{sgn}(123) \to (ijk)$.

Гамильтониан H при этом определит однопараметрическое (относительно $\varkappa \in \mathbb{R}$) семейство интегрируемых систем с первыми интегралами $K = K(\varkappa)$

$$H = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2c_1 x_1,$$

$$K = (J_1^2 - J_2^2 - 2c_1 x_1 + \varkappa c_1^2)^2 + (2J_1 J_2 - 2c_1 x_2)^2.$$

На регулярных орбитах коприсоединённого представления (четырёхмерных симплектических листах скобок Ли–Пуассона) функции H, K задают вполне интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. В работах [1] и [2] были подсчитаны инварианты Фоменко–Цишанга для неособых поверхностей постоянной энергии для случаев $\varkappa > 0$ и $\varkappa < 0$.

Тем самым, была завершена лиувиллева (тонкая) классификация слоений Лиувилля указанного семейства систем. Отметим, что в случае $\varkappa = 0$ (то есть для классического случая Ковалевской) указанная задача была решена в работе [4]. Для случая $\varkappa > 0$ грубая топология слоений Лиувилля была описана в работе [5], а в случае $\varkappa > 0$ — в работе [6].

Теорема 1. В системе Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ имеется ровно 27 классов $L_1, \ldots, L_{27}$ лиувиллево неэквивалентных слоений на связных компонентах неособых изоэнергетических поверхностей. В некоторых зонах энергии слоения системы Ковалевской на $so(4)$ лиувиллево эквивалентны слоениям интегрируемых систем Ковалевской на $e(3)$, Ковалевской–Яхьи, Клебша, Соколова.

Теорема 2. а) В случае ненулевой постоянной площадей ($b \neq 0$) система Ковалевской на алгебре Ли $so(3,1)$ имеет в точности 25 типов слоений Лиувилля на неособых изоэнергетических Q^3, попарно лиувиллево неэквивалентных (то есть имеющих разные инварианты Фоменко–Цишанга). В некоторых зонах энергии слоения системы Ковалевской на $so(3,1)$ лиувиллево эквивалентны слоениям интегрируемых систем Ковалевской на $e(3), so(4)$, Соколова, или получаются из них типичным расщеплением $C_2 \longrightarrow B \xrightarrow[\varepsilon = 1]{r = \infty} B$ седловых атомов. б) В случае нулевой постоянной площадей ($b = 0$) каждое слоение Лиувилля принадлежит одному из классов случаев Соколова, Ковалевской на $e(3)$ или $so(4)$.

При изучении системы Ковалевской в случае $so(3,1)$ и её связей со случаем Соколова используется отображение (указанное в [7]), переводящее орбиты алгебры $e(3)$ в орбиты $so(3,1)$, а интегралы системы Соколова $e(3)$ — в интегралы системы Ковалевской на $so(3,1)$.

Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант НШ–6399.2018.1, соглашение №075–02–2018–867).

Список литературы

[1] В.А. Кибкало. Топологическая классификация слоений Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$. Мат. сборник **210** (2019), no. 5, 3–40.

[2] V. Kibkalo. Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $so(3,1)$. Topology and its Applications (in print), arXiv: `math.DS/1812.04164` (2018).

[3] И.В. Комаров. Базис Ковалевской для атома водорода. ТМФ **47** (1981), no. 1, 67–72.

[4] А.В. Болсинов, П. Рихтер, А.Т. Фоменко. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской. Мат. сборник **191** (2000), no. 2, 3–42.

[5] И.К. Козлов. Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$. Мат. сборник **205** (2014), no. 4, 79–120.

[6] M.P. Kharlamov, P.E. Ryabov, A.Yu. Savushkin. Topological atlas of the Kowalevski–Sokolov top. Regular and Chaotic Dynamics **4** (2016), no. 1, 24–65.

[7] I.V. Komarov, V.V. Sokolov, A.V. Tsiganov. Poisson maps and integrable feformations of the Kowalevski top. J. Phys. A **36** (2003), no. 29, 8035–8048.

Унитаризуемые бимодули Хариш-Чандры для деформаций клейновых особенностей

Д.С. Клюев
Массачусетский технологический институт, Кембридж, США
klyuev@mit.edu

Доклад основан на дипломной работе автора [4].

$\mathbb{Z}_{\geq 0}$-фильтрованная ассоциативная алгебра $\mathcal{A}$ над $\mathbb{C}$ с единицей называется *почти коммутативной*, если $\operatorname{gr}\mathcal{A}$ коммутативна. Пусть $\mathcal{A}$ — почти коммутативная алгебра с антиинволюцией τ, сохраняющей фильтрацию. Выберем число $d > 0$ такое, что $[A_{\leq i}, A_{\leq j}] \subset A_{\leq i+j-d}$.

Пусть M — фильтрованнный $\mathcal{A}$-модуль. Мы говорим, что M является (A, τ)-модулем Хариш-Чандры [1], если

1. $\operatorname{gr} M$ является конечно порождённым $\operatorname{gr}\mathcal{A}$-модулем.

2. Для любого элемента $a \in \mathcal{A}_{\leq i}$ с $\tau(a) = -a$ выполнено $aM_{\leq j} \subset M_{\leq i+j-d}$.

Пусть $\mathcal{B}$ — почти коммутативная алгебра, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}^{opp}$, $\tau(b_1 \otimes b_2) = b_2 \otimes b_1$. Тогда $(\mathcal{A}, \tau)$-модуль Хариш-Чандры называется бимодулем Хариш-Чандры над $\mathcal{B}$.

Пример. Свяжем это определение с классическими модулями Хариш-Чандры. Предположим, что $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathcal{A} = U(\mathfrak{g})$ — её универсальная обёртывающая алгебра с естественной фильтрацией. Пусть τ — антиинволюция алгебры $\mathfrak{g}$, тогда $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^{-\tau}$ — редуктивная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Отображение τ продолжается до антиинволюции алгебры $\mathcal{A}$, которую мы тоже обозначим за τ. Можно показать, что $(\mathcal{A}, \tau)$-модуль Хариш-Чандры — это то же самое, что $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модуль Хариш-Чандры, то есть конечнопорожденный $\mathfrak{g}$-модуль с локально конечным действием $\mathfrak{k}$.

Мы будем работать в следующей ситуации.

Определение. Пусть A — градуированная алгебра. Фильтрованной деформацией алгебры A называется пара $(\mathcal{A}, \chi)$, где $\mathcal{A}$ — фильтрованная алгебра, χ — изоморфизм градуированных алгебр между $\operatorname{gr}\mathcal{A}$ и A.

Пусть A — градуированная пуассонова алгебра, в которой степень скобки Пуассона равна $-d$, $(\mathcal{A}, \chi)$ — некоммутативная фильтрованная деформация A. Пусть выполнено $[\mathcal{A}_{\leq i}, \mathcal{A}_{\leq j}] \subset \mathcal{A}_{\leq i+j-d}$. Коммутатор на $\mathcal{A}$ задает скобку Пуассона на $\operatorname{gr}\mathcal{A}$ степени $-d$.

Определение. Если χ переводит эту скобку Пуассона в скобку Пуассона на A мы говорим, что $(\mathcal{A}, \chi)$ — квантование A.

Нас будут интересовать квантования клейновых особенностей: пусть Γ — конечная подгруппа в $\mathrm{SL}(2)$, $\mathcal{A}$ — квантование алгебры $\mathbb{C}[u,v]^{\Gamma}$. В работе мы рассматриваем случай $\Gamma = C_n$. В этом случае квантования алгебры $\mathbb{C}[x,y]^{C_n}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с многочленами степени n с фиксированным старшим коэффициентом [2]: многочлену $P(x)$ соответствует алгебра с образующими e, f, h и соотношениями $[h,e] = ne$, $[h,f] = -nf$, $ef = P(h)$, $fe = Q(h)$, где $Q(x) = P(x+n)$.

Следующее определение обобщает определение унитаризуемости для классических модулей Хариш-Чандры на $(\mathcal{A},\tau)$-модули Хариш-Чандры.

Определение. Пусть $\mathcal{A}$ — это почти коммутативная алгебра с антиинволюцией τ и антилинейной инволюцией r такими, что $r\tau = \tau r$. Пусть V — это $(\mathcal{A},\tau)$-модуль Хариш-Чандры. Мы говорим, что V унитаризуем, если на V можно ввести положительно определённую эрмитову форму такую, что для любых $a \in \mathcal{A}$, $u, v \in V$ выполнено $(au, v) = (u, r\tau(a)v)$.

Пусть $\mathcal{A}$ — деформация алгебры $\mathbb{C}[x,y]^{C_n}$ с параметром $P(x)$. В случае, когда $P(x) = \overline{P}(n-x)$, существует антилинейная инволюция r на $\mathcal{A}$, которая устроена следующим образом: $r(e) = -f$, $r(f) = -e$, $r(h) = -h$. Мы изучаем унитаризуемость бимодулей Хариш-Чандры для антилинейной инволюции $r \otimes r$ на алгебре $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{op}$.

В работе исследуется случай регулярного бимодуля Хариш-Чандры, то есть алгебры $\mathcal{A}$ как бимодуля над собой. Этот частный случай сам по себе является нетривиальной и интересной задачей. У вопроса об унитаризуемости регулярного бимодуля есть физическая мотивация [3]. Основной результат заключается в следующем.

Теорема. В этих условиях

1. Если у $P(x)$ есть хотя бы три корня α таких, что $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$, то регулярый бимодуль унитаризуем.
2. Предположим что $n = 2m$ и знак старшего члена $P(x)$ равен $(-1)^m$. Тогда
   (a) Если у $P(x)$ есть корень α такой, что $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$, то регулярный бимодуль унитаризуем.
   (b) Если для любого корня α многочлена $P(x)$ выполнено $\operatorname{Re}\alpha \notin [0, n]$, то регулярный бимодуль не унитаризуем.

Для многочленов $P(x)$ степени $n = 2m$ без чисто мнимых корней со старшим членом $(-1)^m$ эта теорема даёт полный ответ.

Список литературы
[1] I. Losev. Dimensions of irreducible modules over W-algebras and Goldie ranks, arXiv: `math.RT/1209.1083` (2012).
[2] T.J. Hodges. Noncommutative deformations of type-A Kleinian singularities. J. Algebra **161** (1993), 271–290.
[3] C. Beem, W. Peelaers, L. Rastelli. Deformation quantization and superconformal symmetry in three dimensions, arXiv: `physics.hep-th/1601.05378` (2016).
[4] D. Klyuev. On unitarizable Harish-Chandra bimodules for deformations of Kleinian singularities, to appear on arXiv.

Квадратичные конформные супералгебры Ли, связанные с супералгебрами Новикова

Р.А. Козлов
Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия
KozlovRA.NSU@yandex.ru

Алгебры Гельфанда–Дорфман были введены в работе [1] как инструмент изучения операторов Гамильтона в фомальном вариационном исчислении. В данном докладе, основанном на работе [2], мы рассмотрим некоторые связи между конформными алгебрами, алгебрами Пуассона и Гельфанда–Дорфман.

Пусть $V = V_0 \oplus V_1$ — $\mathbb{Z}_2$-градуированное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль с двумя операциями $(\cdot \circ \cdot)$, $[\cdot, \cdot]$: $V \otimes V \to V$, соблюдающими градуировку. Пространство V называется супералгеброй Гельфанда–Дорфман (или GD-супералгеброй), если оно образует супералгебру Новикова относительно $(\cdot \circ \cdot)$, супералгебру Ли относительно $[\cdot, \cdot]$ и эти две операции связаны дополнительным тождеством

$$[a \circ b, c] - a \circ [b, c] + [a, b] \circ c + (-1)^{|a||b|}[b, a \circ c] - (-1)^{|b||c|}[a, c] \circ b = 0. \quad (1)$$

Например, супералгебра Новикова V с операцией $(\cdot \circ \cdot)$, снабжённая скобкой вида $[a, b] = (a \circ b) - (-1)^{|a||b|}(b \circ a)$, является *коммутаторной* GD-супералгеброй, которую мы обозначим $V^{(-)}$.

Пусть $P = P_0 \oplus P_1$ — коммутативная супералгебра, снабжённая скобкой Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ и чётным дифференцированием d. Тогда P относительно операций

$$a \circ b = ad(b), \quad [a, b] = \{a, b\}$$

является GD-супералгеброй. Назовем GD-супералгебру V *специальной*, если она вкладывается в дифференциальную алгебру Пуассона указанным способом.

Теорема 1. Для любой супералгебры Новикова V коммутаторная GD-супералгебра $V^{(-)}$ специальна.

Пусть $H = \mathbb{K}[\partial]$ — алгебра многочленов от одной переменной над полем нулевой характеристики. Конформной супералгеброй Ли [3] называется $\mathbb{Z}_2$-градуированный H-модуль $C = C_1 \oplus C_2$, снабжённый соблюдающим градуировку линейным отображением $[\cdot_\lambda \cdot]\colon C \otimes C \to C[\lambda]$, удовлетворяющий тождествам

$$[\partial x_\lambda y] = -\lambda[x_\lambda y],$$
$$[x_\lambda \partial y] = (\partial + \lambda)[x_\lambda y],$$
$$[x_\lambda y] = (-1)^{|x||y|}[y_{-\partial-\lambda} x],$$
$$[x_\lambda [y_\mu z]] - (-1)^{|x||y|}[[y_\mu [x_\lambda z]] = [[x_\lambda y]_{\lambda+\mu} z]].$$

Если по GD-супералгебре V построить свободный H-модуль $L(V) = H \otimes V$ и определить на нем λ-скобку правилом

$$[a_\lambda b] = [a, b] + (-1)^{|a||b|}\partial(b \circ a) + \lambda(a \circ b + (-1)^{|a||b|}(b \circ a), \quad a, b \in V,$$

то получится конформная супералгебра Ли, называемая *квадратичной* [4].

Теорема 2. Пусть V — специальная GD-супералгебра. Тогда квадратичная конформная супералгебра Ли $L(V)$ имеет ассоциативную конформную обёртывающую.

Следствие. Если V — конечномерная специальная GD-супералгебра, то $L(V)$ имеет конечное точное представление.

Список литературы

[1] И.М. Гельфанд, И.Я. Дорфман. Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры. Функц. анализ и его прил. **13** (1979), no. 4, 13–30.

[2] P.S. Kolesnikov, R.A. Kozlov, A.S. Panasenko. Quadratic Lie conformal superalgebras related to Novikov superalgebras, arXiv: `math.QA/1912.03943` (2019).

[3] V.G. Kac. Vertex algebras for beginners. University Lecture Series **10**, 2nd edn. AMS, Providence, 1996 (1998).

[4] X. Xu. Quadratic conformal superalgebras. J. Algebra **231** (2000), 1–38.

О конечных неразрешимых 4-примарных группах без элементов порядка 6

А.С. Кондратьев, Н.А. Минигулов
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия
a.s.kondratiev@imm.uran.ru, nikola-minigulov@mail.ru

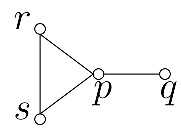
Графом Грюнберга–Кегеля (или графом простых чисел) конечной группы G называется граф $\Gamma(G)$, в котором вершинами являются все простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в группе G есть элемент порядка pq.

В [1] и [2] первый автор описал конечные группы с графами Грюнберга–Кегеля как у групп $Aut(J_2)$ и A_{10} соответственно. Графы Грюнберга–Кегеля этих групп как абстрактные графы изоморфны.

Нами поставлена более общая задача: описать конечные группы, графы Грюнберга–Кегеля которых как абстрактные графы изоморфны графу $\Gamma(A_{10})$.

В рамках решения этой задачи в [3] нами доказано, что если G — конечная неразрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ как абстрактный граф изоморфен графу $\Gamma(A_{10})$, то фактор-группа $G/S(G)$ группы G по её разрешимому радикалу $S(G)$ почти проста, и классифицированы все конечные почти простые группы, графы Грюнберга–Кегеля которых как абстрактные графы изоморфны подграфам графа $\Gamma(A_{10})$.

Пусть G — конечная неразрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ как абстрактный граф изоморфен графу $\Gamma(A_{10})$. Тогда граф $\Gamma(G)$ имеет вид



для подходящих простых чисел p, q, r, s.

Ранее нами было описано строение группы G в случае, когда q делит порядок подгруппы $S(G)$ (см. [4]), и в случае, когда 3 не делит $|G|$ (см. [5]).

В данной работе мы доказываем следующую теорему.

Теорема. *Пусть* G *– конечная неразрешимая группа,* $\overline{G} \cong G/S(G)$ *и граф* $\Gamma(G)$ *как абстрактный граф изоморфен графу* $\Gamma(A_{10})$*. Если* $|G|$ *делится на* 3 *и* G *не содержит элементов порядка* 6*, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $S = O_{2',2}(G)$, $O(G) = O_p(G)$, $q = 2$, $S/O(G)$ *— элементарная абелева группа,* $\overline{G} \cong L_2(2^n)$*, причём либо* $n = 4$*,* $p = 17$ *и* $\{r, s\} = \{3, 5\}$*, либо* n *—*

простое число, $n \geq 5$, $p = 2^n-1$ и $\{r,s\} = \{3,(2^n-1)/3\}$, группа $S/O(G)$ либо тривиальна, либо как $\overline{G}$-модуль изоморфна прямой сумме естественных $GF(2^n)$-модулей;

(2) $S = O_p(G)$, $q = 2$, $\overline{G} \cong L_2(p)$, $p \geq 31$, $p \equiv \varepsilon 5 \pmod{12}$, $\varepsilon \in \{+,-\}$, $p - \varepsilon 1 = 2^k$, *и* $3 \in \{r,s\} = \pi((t+\varepsilon 1)/2)$;

(3) $S = O_p(G)$, $q = 3$ *и выполняется одно из утверждений*:

(3*a*) $\overline{G} \cong PGL_2(9)$, $p > 5$ *и* $\{r,s\} = \{2,5\}$;

(3*b*) $\overline{G} \cong L_2(81)$, $PGL_2(81)$ *или* $L_2(81).2_3$, $p = 41$ *и* $\{r,s\} = \{2,5\}$;

(3*c*) $\overline{G} \cong L_2(3^n)$ *или* $PGL_2(3^n)$, *n — нечётное простое число*, $p = (3^n-1)/2$ *и* $\{r,s\} = \pi(3^n+1)$.

Каждый из пунктов заключения теоремы реализуется.

Наши обозначения можно найти в [6]

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19–71–10067).

Список литературы

[1] А.С. Кондратьев. Конечные группы с графом простых чисел, как у группы $Aut(J_2)$. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН **18** (2012), no. 3, 131–138.

[2] А.С. Кондратьев. Конечные группы с графом простых чисел, как у группы A_{10}. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН **19** (2013), no. 1, 136–143.

[3] A.S. Kondrat'ev, N.A Minigulov. Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the Gruenberg–Kegel graph of the alternating group A_{10}. Siberian Electr. Math. Rep. **15** (2018), 1378–1382.

[4] А.С. Кондратьев, Н.А. Минигулов. О конечных неразрешимых группах, графы Грюнберга–Кегеля которых как абстрактные графы изоморфны графу Грюнберга–Кегеля группы A_{10}. Межд. конф. «Мальцевские чтения». Тез. докл. — Новосибирск: ИМ СО РАН и НГУ, 2018, 96.

[5] А.С. Кондратьев, Н.А. Минигулов. О конечных неразрешимых 4-примарных $3'$-группах. Межд. конф. «Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем». Тез. докл. — Нальчик: Изд-во КБГУ, 2019, 56–57.

[6] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. Atlas of finite groups. Clarendon Press, Oxford, 1985.

Неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли характеристики 2

А.В. Кондратьева
Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия
alisakondr@mail.ru

Класс гамильтоновых алгебр Ли характеристики 2 с простейшей симметричной скобкой Пуассона был построен в 1993 году Lei Lin [1]. Позднее были введены симметричные гамильтоновы формы в разделённых степенях [2]. В работе [3] дано инвариантное определение комплекса симметрических дифференциальных форм $S\Omega$. В докладе рассматриваются алгебры Ли, соответствующие неальтернирующим гамильтоновым формам $\omega = \omega(0) + d\varphi + \sum\limits_{i<j} b_{ij} x_i^{(2^{m_i}-1)} x_j^{(2^{m_j}-1)} dx_i dx_j$, где $\varphi \in \mathfrak{m}^{(2)} S\Omega^1$ — 1-форма с коэффициентами в виде многочленов из $\mathcal{O}_n(\mathcal{F})$ степени 2 и выше, b_{ij} — элементы основного поля, m_i — высота элемента x_i, а $\omega(0)$ приведена к каноническому виду (определение $\mathcal{O}_n(\mathcal{F})$ см. в [4]). Приводится условие на высоты переменных, при котором форма сводится к виду $\omega = \omega(0)$ [5]. Если это условие не выполнено, то проблема приведения к каноническому виду остается открытой. В данной работе доказывается, что при $n = 3$ форму можно привести к одному из четырёх канонических видов:

(1) $\omega_1 = dx_1 dx_2 + dx_3^{(2)}$ и $m_3 > 1$;
(2) $\omega_2 = dx_1 dx_2 + dx_2^{(2)} + dx_3^{(2)}$;
(3) $\omega_3 = dx_1^{(2)} + dx_2^{(2)} + dx_3^{(2)}$ и $(m_1, m_2, m_3) \neq (1,1,1)$;
(4) $\omega_4 = dx_1 dx_2 + dx_3^{(2)} + a x_1^{(2^{m_1}-1)} x_3 dx_1 dx_3$ и $m_3 = 1$, $a = 1, 0$.

Также в работе доказана теорема о простоте градуированных алгебр Ли для любого числа переменных и теорема о простоте алгебр Ли для трёх переменных.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 18–01–00900/а.

Список литературы

[1] L. Lin. Non-alternating Hamiltonian algebra $P(n, m)$ of characteristic 2. Comm. Algebra **21** (1993), 399–411.
[2] S. Bouarrouj, P. Grozman, A. Lebedev, D. Leites. Divided power(co)homology. Presentation of simple finite dimensional modular superalgebras with Cartan Matrix. Homology, Homotopy Appl. **12** (2010), 237–248.
[3] М.И. Кузнецов, А.В. Кондратьева, Н.Г. Чебочко. О гамильтоновых алгебрах Ли характеристики 2. Матем. журнал (НАН Казахстана) **16** (2016), no. 2, 54–65.

[4] А.И. Кострикин, И.Р. Шафаревич. Градуированные алгебры Ли конечной характеристики. Изв. АН СССР. Сер. матем. **33** (1969), no. 2, 251–322.
[5] M.I. Kuznetsov, A.V. Kondrateva, N.G. Chebochko. Non-alternating Hamiltonian Lie algebras in characteristic 2. I, arXiv: `math.RA/1812.11213` (2018).

Чжоу-весовые и мотивные (ко)гомологии

Д.З. Кумаллагов
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
kumdavid@yandex.ru

Доклад основан на работе [2].

В статье [1] были определены и изучены свойства Чжоу-весовых гомологий ($CWH^i_j(-,R)$, где R — базовое кольцо) на категории геометрических мотивов Воеводского DM^{eff}_{gm}. Эта теория дает удобные критерии для исследования свойств эффективности, связности и размерности мотивов. Также в терминах Чжоу-весовых гомологий были сформулированы классические утверждения о разложимости диагонали и их приложения к свойствам когомологий (этальных, сингулярных).

В данной работе мы расширяем функтор $CWH(-)$ на всю категорию эффективных мотивов DM^{eff}_R, используя весовую структуру w_{chow} статьи [3]. Это позволяет доказать некоторые утверждения о совместном обнулении Чжоу-весовых и мотивных гомологий в некоторых областях, а также влечёт различные условия на эффективность градуированных факторов весовой фильтрации на сингулярных и этальных гомологиях. Данные результаты применяются к мотивам с компактными носителями.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19–31–90074\19.

Список литературы

[1] M.V. Bondarko, V.A. Sosnilo. Detecting effectivity of motives, their weights, connectivity, and dimension via Chow-weight (co)homology: a "mixed motivic decomposition of the diagonal". J. Math. Jussie (в печати), см. также arXiv: `math.AG/1411.6354`.
[2] M.V. Bondarko, D.Z. Kumallagov. On Chow-weight homology of motivic complexes and its relation to motivic homology, in preparation.
[3] М.В. Бондарко, Д.З. Кумаллагов. Весовые структуры Чжоу без проективности и разрешения особенностей. Алгебра и анализ **30** (2018) no. 5, 57–83.

Вариация обратного разложения унипотентов для внешнего квадрата

Р.А. Лубков
ПОМИ им. В.А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия
RomanLubkov@yandex.ru

В докладе рассматривается неожиданный для последних лет прогресс в теории структурных редуктивных групп над коммутативными кольцами. Метод разложения унипотентов впервые был предложен Алексеем Степановым [1] для $\mathrm{GL}(n, R)$ в 1987 году. Его можно рассматривать как эффективный вариант нормальности элементарных подгрупп. Почти сразу Николай Вавилов смог обобщить этот метод на другие расщепимые классические группы [2], и в 1990 году совместно с Евгением Плоткиным они обобщили этот метод на группы Шевалле типов E_6 и E_7 [3], [4]. В самой простой форме он даёт явные полиномиальные формулы, выражающие сопряжённый к элементарному унипотенту как произведение элементарных образующих. В последние годы Раймунд Пройссер [5] заметил, что для классических групп по существу те же самые вычисления работают и в другую сторону и дают эффективные варианты описания нормальных подгрупп. Сразу же Николай Вавилов развил эту идею для исключительных групп [6]. Весьма удивительно, что во многих случаях мы можем получить явные полиномиальные оценки длины выражений элементарных образующих в терминах элементарных сопряжений произвольного группового элемента. В докладе я описываю вариант этого метода для поливекторного представления полной линейной группы.

Список литературы

[1] A.V. Stepanov. Stability conditions in the theory of linear groups over rings. Ph.D. Thesis, Leningrad State Univ., 1987.
[2] N.A. Vavilov. Subgroups of split classical groups. Habilitationsschrift, Leningrad State Univ., 1987.
[3] N.A. Vavilov. Structure of Chevalley groups over commutative rings. In: Nonassociative algebras and related topics (Hiroshima, 1990). World Sci. Publ., London et al., 1991.
[4] N.A. Vavilov, E.B. Plotkin, A.V. Stepanov. Computations in Chevalley groups over commutative rings. Soviet Math. Dokl. **40** (1990), no. 1, 145–147.
[5] R. Preusser. Sandwich classification for $\mathrm{GL}_n(R)$, $\mathrm{O}_{2n}(R)$ and $\mathrm{U}_{2n}(R, \Lambda)$ revisited. J. Group Theory **21** (2018), no. 1, 21–44.
[6] N.A. Vavilov. Towards the reverse decomposition of unipotents. Journal of Mathematical Sciences **243** (2019), 515–526.

Простота спектра подалгебр Бете в $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_2)$

И.А. Машанова-Голикова
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
inna.mashanova@gmail.com

Доклад основан на работе автора [1].

1. Определение Янгиана.

Алгебра $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_2)$ порождена образующими $t_{ij}^{(r)}$ ($t_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$) с соотношениями

$$[t_{ij}^{(r+1)}, t_{kl}^{(s)}] - [t_{ij}^{(r)}, t_{kl}^{(s+1)}] = t_{kj}^{(r)} t_{il}^{(s)} - t_{kj}^{(s)} t_{il}^{(r)}.$$

Образующие $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_2)$ можно записать как ряд от формальной переменной

$$t_{ij}(u) = \sum_{r \geqslant 0} t_{ij}^{(r)} u^{-r},$$

а ряды объединить в матрицу

$$T(u) = \begin{pmatrix} t_{11}(u) & t_{12}(u) \\ t_{21}(u) & t_{22}(u) \end{pmatrix}.$$

2. Представления вычисления.

Алгебра $\mathfrak{gl}_2$ вкладывается в $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_2)$ как подалгебра, порождённая $t_{ij}^{(1)}$, и отображение $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_2)$ на $\mathfrak{gl}_2$ — это гомоморфизм.

Мы будем рассматривать действие $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_2)$ на конечномерных представлениях $\mathfrak{gl}_2$ с помощью данного гомоморфизма, а также тензорные произведения таких представлений. Любое конечномерное представление $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_2)$ с точностью до автоморфизма $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_2)$ имеет такой вид. Тензорное произведение представлений вычисления характеризуется упорядоченным набором весов — пар чисел, различающихся на целое число.

3. Подалгебры Бете

Для ненулевой матрицы $C \in \mathfrak{gl}_2$ можно определить коммутативную подалгебру $B(C)$ в $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_2)$, порождённую коэффициентами рядов $\operatorname{tr} CT(u)$ и $t_{11}(u)t_{22}(u-1) - t_{21}(u)t_{12}(u-1)$. Подалгебра $B(C)$ зависит от C с точностью до пропорциональности, то есть является семейством над проективизацией $\mathfrak{gl}_2$. Это семейство может быть замкнуто до семейства $\mathcal{B}$ коммутативных подалгебр $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_2)$ с постоянным рядом Пуанкаре над раздутием $\mathbb{C}P^3$ в точке. Это частный случай результата [2].

4. Основной результат

Мы явно определим класс конечномерных представлений $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_2)$ (назовем его хорошим), на котором подалгебры $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_2)$ из семейства $\mathcal{B}$ действуют с циклическим вектором. На произведениях представлений вычисления можно определить унитарную форму, относительно которой подалгебры из вещественной части семейства $\mathcal{B}$ действуют на тензорных произведениях вещественных представлений вычисления самосопряжёнными операторами.

Теорема. Рассмотрим вещественную часть семейства $\mathcal{B}$ и хорошие тензорные произведения вещественных представлений вычисления. Тогда такие подалгебры действуют на таких представлениях с простым спектром.

Список литературы

[1] I. Mashanova-Golikova, Simplicity of spectra for Bethe subalgebras in $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_2)$, arXiv: `math.RT/1906.09049` (2019).
[2] A. Ilin, L. Rybnikov. Bethe subalgebras in Yangians and the wonderful compactification, arXiv: `math.QA/1810.07308` (2018).

Индексы Дынкина простых подгрупп ранга 1 полупростых компактных групп Ли и критические значения секционной кривизны биинвариантных римановых метрик на них

М.В. Мещеряков
Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва, Саранск, Россия
`mesh@math.mrsu.ru`

Доклад основан на работе [1] и содержит ряд результатов, обобщающих результаты [2] о максимальных значениях секционной кривизны компактных римановых глобально симметрических пространств.

Пусть G — связная полупростая компактная группа Ли, наделённая биинвариантной римановой метрикой, индуцированной формой Киллинга B алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы G. Если $X, Y \in \mathfrak{G}$ — нормированные векторы, то соответствующая секционная кривизна равна

$$K_\sigma(X,Y) = 1/4 \cdot B((adX)^2 Y, Y).$$

Согласно [2], максимальное значение $K_\sigma(X,Y)$ равно $1/4 \cdot |\delta|^2$, и оно достигается, когда X пропорционально H_δ, а Y берется в соответствующем старшему корню δ корневом подпространстве.

Цель доклада — показать, как критические значения секционной кривизны $K_\sigma(X,Y)$ выражаются через индексы Дынкина $ind_D(su(2))$ подалгебр Ли ранга 1 в алгебре Ли $\mathfrak{G}$.

Предложение. Пара ортогональных, нормированных векторов $X, Y \in \mathfrak{G}$ определяет критическую точку функции секционной кривизны K_σ на грассманиане $G_2(\mathfrak{G})$ двумерных плоскостей в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия критичности:

$$[X, Y] = Z, \quad [Y, Z] = 4K_\sigma(X, Y)X, \quad [Z, X] = 4K_\sigma(X, Y)Y.$$

При $K_\sigma(X, Y) > 0$ условия критичности означают, что X, Y и Z образуют базис простой подалгебры Ли $su(2)$ ранга 1 алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

Теорема 1. Отличные от нуля критические значения секционной кривизны биинвариантной римановой метрики на компактной полупростой группе Ли G совпадают с кривизнами её простых компактных подгрупп ранга 1.

Теорема 2. Критические значения секционной кривизны K_σ биинвариантной метрики, отвечающие вложениям $su(2) \to \mathfrak{G}$ критических подалгебр Ли ранга 1, вычисляются по следующей формуле:

$$K_\sigma = ind_D(ad/su(2))/ind_D(ad),$$

где $ind_D(ad)$ — индекс Дынкина присоединённого представления ad алгебры $\mathfrak{G}$ и $ind_D(ad/su(2))$ — индекс Дынкина ограничения представления ad на критическую подалгебру $su(2) \to \mathfrak{G}$.

Согласно [3], $ind_D(ad) = 2h^*(\mathfrak{G})$, причём дуальное число Кокстера $h^*(\mathfrak{G})$ равно обычному числу Кокстера $h(\mathfrak{G})$ алгебры $\mathfrak{G}$ в ADE-случаях и $h^*(B_n) = 2n - 1$, $h(C_n) = n + 1$, $h(F_4) = 9$, $h(G_2) = 4$. Разлагая представление $ad/su(2)$ в сумму неприводимых представлений $\rho_1, \ldots, \rho_s$, находим, что $ind_D(\rho_k) = 1/6 \cdot n_k(n_k + 1)(n_k + 2)$, где n_k — числовая метка старшего веса представления ρ_k.

Список литературы

[1] М.В. Мещеряков. Оценки секционных кривизн римановых симметрических пространств. УМН, **51** (1996), no. 1, 157–158.
[2] S. Helgason. Totally geodesics spheres in compact symmetric spaces. Math. Ann. **165** (1966), 309–317.
[3] D.I. Panyushev. On the Dynkin index of a principal sl_2-subalgebra, arXiv: `math.RT/0903.0398` (2009).

Представления нильпотентных алгебр Ли и произведения Масси

Д.В. Миллионщиков
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
mitia_m@hotmail.com

Многоместные произведения Масси — важный и интересный класс высших когомологических операций. Возникнув самым естественным образом в недрах алгебраической топологии [2], произведения Масси впоследствии стали находить интересные применения в самых разных разделах чистой алгебры [1] и дифференциальной геометрии. Доклад будет посвящен произведениям Масси в когомологиях нильмногообразий (нильпотентных алгебр Ли). В частности, с помощью произведений (операций) Масси можно описать препятствия к построению точного представления (фиксированной размерности) нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ строго верхнетреугольными матрицами.

Доклад основан на работах автора [3], [4].

Список литературы

[1] I. Efrat. Single-valued Massey products. Comm. Algebra **42** (2014), 4609–4618.
[2] W.S. Massey. Some higher order cohomology operations. Simposium International de topologia Algebraica, La Universidad National Autónoma de Mexico and UNESCO, Mexico City, 1958, 145–154.
[3] D. Millionschikov. Massey products in graded Lie algebra cohomology. In: N. Bokan et al., eds. Proceedings of the Conference "Contemporary Geometry and related topics" (Belgrade, June 26 –July 2, 2005). Faculty of Mathematics, Belgrad, 2006, 353–377
[4] D. Millionschikov, I. Limonchenko. Higher order Massey products and applications, to appear in: A. Vershik et al., eds. Proceedings of the Conference "Rokhlin–100" (S.-Petersburg, August 26—2, 2019).

О первичном радикале направленных (в частности, решёточно упорядоченных) алгебр Ли

А.В. Михалёв[1], Е.Е. Ширшова[2]
[1]Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
[2]Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия
shirshova.elena@gmail.com

Пусть F — частично упорядоченное поле [1], L — алгебра Ли над полем F. Алгебра L называется частично упорядоченной [2], если $\langle L, +, \leqslant \rangle$ — частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условиям: из $a \leqslant b$ следует $\alpha a \leqslant \alpha b$ для всех $a, b \in L$ и $\alpha > 0$ в поле F; из $a \leqslant b$ следует $a + [a, c] \leqslant b + [b, c]$ для всех $a, b, c \in L$.

Положим $L^+ = \{a \in L |\ 0 \leqslant a\}$.

Гомоморфизм частично упорядоченных алгебр Ли $f : L_1 \to L_2$ называется строгим o-гомоморфизмом алгебр, если $f({L_1}^+) = {L_2}^+ \cap f(L_1)$. Если существует гомоморфизм алгебр Ли f^{-1}, для которого $f({L_2}^+) \subseteq {L_1}^+$, то f называется o-изоморфизмом алгебр.

Теорема. Пусть L_1 и L_2 — частично упорядоченные алгебры Ли над частично упорядоченным полем F. Если $f \colon L_1 \to L_2$ — строгий o-гомоморфизм алгебр Ли, то существует o-изоморфизм частично упорядоченных алгебр Ли $\varphi : L_1/\ker f \to f(L_1)$, где $\varphi(a + \ker f) = f(a)$ для всех $a \in L_1$.

Положительные элементы a и b частично упорядоченной группы $G = \langle G, +, \leqslant \rangle$ называются AO-элементами, если из неравенств $x \leqslant a, b$ следует $nx \leqslant a, b$ для всех $x \in G$ и целых чисел $n > 0$. Группа G называется AO-группой, если любой элемент $g \in G$ представим в виде $g = a - b$ для некоторых AO-элементов из G.

Определение. Частично упорядоченную алгебру Ли L над частично упорядоченным полем F назовем AO-упорядоченной алгеброй Ли, если группа $\langle L, +, \leqslant \rangle$ является AO-группой.

Этот класс направленных алгебр включает класс решёточно упорядоченных алгебр.

Определение. AO-упорядоченная алгебра Ли L называется AO-первичной алгеброй Ли, если для любых выпуклых направленных идеалов I и J алгебры L из $IJ = 0$ следует $I = 0$ или $J = 0$.

Выпуклый направленный идеал P алгебры L называется AO-первичным, если факторалгебра L/P является AO-первичной алгеброй Ли. Пересечение всех AO-первичных идеалов алгебры L называется AO-первичным радикалом алгебры L ($AO - radL$).

Определение. Элемент a из AO-упорядоченной алгебры Ли L будем называть псевдо-t-нильпотентным, если в любой последовательности (a_i) элементов из L, где $a_0 = a$ и $a_{k+1} \in I_{a_k} I_{a_k}$, начиная с некоторого места, все элементы равны нулю. (Здесь I_{a_k} — наименьший выпуклый направленный идеал в L, содержащий элемент a_k.)

Теорема. Пусть L — AO-упорядоченная (в частности, решёточно упорядоченная) алгебра Ли над направленным полем F. Тогда AO-первичный радикал алгебры L совпадает с совокупностью псевдо-t-нильпотентных элементов алгебры L.

Если $I = AO - radL$, то $AO - radL/I = \{I\}$.

Список литературы

[1] Л. Фукс. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.

[2] В.М. Копытов. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.

Супергруппа $OSP(2, 2n)$ и супермногочлены Якоби

Г.С. Мовсисян, А.Н. Сергеев

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

movsisyangs@gmail.com

Доклад основан на работе авторов [1]. Основной целью данного доклада является исследование связей между теорией представлений супералгебр Ли и дифференциальным оператором Калоджеро—Мозера—Сазерленда (КМС). Дифференциальный оператор зависит (полиномиально) от трёх параметров $k, \ p, \ q$. Соответствующие полиномиальные собственные функции — многочлены Якоби — также зависят от трёх параметров, но в общем случае коэффициенты этих собственных функций имеют рациональную зависимость от параметров.

Коэффициенты супемногочленов Якоби типа $BC(1, n)$ являются рациональными функциями от трёх параметров $k, \ p, \ q$. В точке $(-1, 0, 0)$ эти коэффициенты могут иметь полюса. Положим $q = 0$ и $p = t(k+1)$, после перейдём к пределу при $t \to \infty$, тогда получим суперхарактеры модулей Каца и суперхарактеры неприводимых модулей супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(2, 2n)$.

Список литературы

[1] G.S. Movsisyan, A.N. Sergeev. Supergroup $OSP(2, 2n)$ and super Jacobi polynomials, arXiv: math.RT/1906.09753 (2019).

Разрешимые супералгебры Лейбница с нильрадикалом $N_{2,m}$

Х.А. Муратова
Институт Математики им. В.И. Романовского
АН Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан
xalkulova@gmail.com

Из теории алгебр известно, что для произвольной категории алгебр с помощью оболочки Грассмана можно определить $\mathbb{Z}_2$-градуированные алгебры, которые называются супералгебрами данной категории. Обычно в $\mathbb{Z}_2$-градуированных пространствах одно из пространств называют чётной частью, а второе — нечётной. Характерной особенностью многообразий определённых супералгебр является тот факт, что чётная часть есть не что иное, как многообразие этих алгебр. В частности, чётные части супералгебр Ли и супералгебр Лейбница являются алгеброй Ли и алгеброй Лейбница соответственно.

Основные понятия и систематическое изложение основ супералгебр Ли приведены в монографии В.Г. Каца [5] и на протяжении более тридцати лет вызывают интерес как со стороны математиков, так и со стороны физиков. Понятие супералгебры Лейбница впервые было введено в работе С. Альбеверио, Ш.А. Аюпова и Б.А. Омирова [2] в 2005 году.

Для изучения таких объектов мы задаём некоторые условия, такие как нильпотентность, разрешимость, характеристическая последовательность и т.д. Нильпотентные супералгебры Лейбница с заданной характеристической последовательностью получены в работах Б.А. Омирова, А.Х. Худойбердиева и других [1], [3], [4]. Следующим шагом изучения супералгебр Лейбница является изучение разрешимых супералгебр Лейбница.

В данной работе получены нелиевские разрешимые супералгебры Лейбница, для которых нильрадикалом является супералгебра Ли с максимальным индексом нильпотентности.

Определение 1. $\mathbb{Z}_2$-градуированное векторное пространство $G = G_0 \oplus G_1$ называется супералгеброй Ли если оно снабжено произведением $[-,-]$, которое удовлетворяет следующим условиям:

1. $[x, y] = -(-1)^{\alpha\beta}[y, x]$, для любых $x \in G_\alpha$, $y \in G_\beta$,
2. $(-1)^{\alpha\gamma}[x, [y, z]] + (-1)^{\alpha\beta}[y, [z, x]] + (-1)^{\beta\gamma}[z, [x, y]] = 0$ – для любых $x \in G_\alpha$, $y \in G_\beta$, $z \in G_\gamma$

(супертождество Якоби).

Определение 2. $\mathbb{Z}_2$-градуированное векторное пространство $L = L_0 \oplus L_1$ называется супералгеброй Лейбница, если оно снабжено произведением $[-,-]$, которое удовлетворяет следующему условию:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - (-1)^{\alpha\beta}[[x, z], y] \text{для всех } x \in L, y \in L_\alpha, z \in L_\beta$$

(супертождество Лейбница).

Для заданной супералгебры Лейбница L определим следующие ряды:

$$L^1 = L,\ L^{k+1} = [L^k, L],\ k \geq 1,\ [L^{[1]} = L,\ L^{[s+1]} = [L^{[s]}, L^{[s]}],\ s \geq 1.$$

Определение 3. Супералгебра Лейбница L называется нильпотентной (соответственно, разрешимой) если существует $k \in \mathbb{N}$ (соответственно, $s \in \mathbb{N}$) такое, что $L^k = \{0\}$ (соответственно, $L^{[s]} = \{0\}$).

Минимальное число k, обладающее таким свойством, называется индексом нильпотентности супералгебры L.

В следующей теореме дается описание супералгебр Ли с максимальным индексом нильпотентности.

Теорема 1. [3] Пусть $G \in Lie_{n,m}$ — супералгебра Ли с нильиндексом $n+m$. Тогда $n = 2$, m — нечётное и существует базис $\{e_1, e_2, y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ супералгебры G такой, что произведения в этом базисе имеют следующий вид:

$$N_{2,m} : \begin{cases} [y_i, e_1] = y_{i+1}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ [y_{m+1-i}, y_i] = (-1)^{i+1} e_2, & 1 \leq i \leq \frac{m+1}{2}. \end{cases}$$

Напомним, что максимальный нильпотентный идеал N супералгебры Лейбница L такой, что $[L, L] \subset N$, называется нильрадикалом.

Из работы [6] имеем, что если $L = L_0 \oplus L_1$ — разрешимая супералгебра Лейбница с нильрадикалом $N = N_0 \oplus N_1$, то $dimL_1 = dimN_1$.

Пусть $L = L_0 \oplus L_1$ — нелиева разрешимая супералгебра Лейбница с нильрадикалом $N_{2,m}$. Тогда $dimL_1 = m$ и $dim(L_0) \leq 4$. В данной работе приведён случай, когда $dim(L_0) = 3$.

Предложение 2. Пусть $L = L_0 \oplus L_1$ — разрешимая супералгебра Лейбница, у которой нильрадикал изоморфен $N_{2,m}$ и $dim(L_0) = 3$. Тогда L изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных супералгебр:

$$SL(\mu_1) : \begin{cases} [e_1, x] = e_1, & \\ [y_i, e_1] = y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_{n+1-i}, y_i] = (-1)^{i+1} e_2, & 1 \leq i \leq \frac{n+1}{2}, \\ [y_i, x] = -[x, y_i] = (i - 1 - \frac{n+1}{2}) y_i, & 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$SL(\mu_2)_1 : \begin{cases} [e_1, x] = e_1, & [x, e_1] = -e_1, \\ [e_2, x] = \alpha e_2, & \alpha \in C \setminus \{0\}, \\ [y_i, e_1] = y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_{n+1-i}, y_i] = (-1)^{i+1} e_2, & 1 \leq i \leq \frac{n+1}{2}, \\ [y_i, x] = -[x, y_i] = (i - \frac{n+1}{2}) y_i, & 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$SL(\mu_2)_2 : \begin{cases} [e_1, x] = e_1, & [x, e_1] = -e_1, \\ [e_2, x] = \alpha e_2, & \alpha \in C \setminus \{0\}, \\ [y_i, e_2] = y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_{n+1-i}, y_i] = (-1)^{i+1} e_1, & 1 \leq i \leq \frac{n+1}{2}, \\ [y_i, x] = -[x, y_i] = (\frac{1-(n-1)\alpha}{2} + (i-1)\alpha) y_i, & 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$SL(\mu_3) : \begin{cases} [e_1, x] = e_1, & [x, e_1] = -e_1, \\ [x, x] = e_2, & \\ [y_i, e_1] = y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_{n+1-i}, y_i] = (-1)^{i+1} e_2, & 1 \leq i \leq \frac{n+1}{2}, \\ [y_i, x] = -[x, y_i] = (i - \frac{n+1}{2}) y_i, & 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$SL(\mu_4) : \begin{cases} [e_1, x] = e_1, & \\ [e_2, x] = \alpha e_2, & \alpha \in C \setminus \{0\}, \\ [y_i, e_1] = y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_{n+1-i}, y_i] = (-1)^{i+1} (\beta e_1 + e_2), & 1 \leq i \leq \frac{n+1}{2}, \\ [y_i, x] = -[x, y_i] = (i - 1 + \frac{1-n}{2}) y_i, & 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$SL(\mu_5) : \begin{cases} [e_1, x] = e_1, & [e_2, x] = e_1, \\ [x, x] = e_2, & \\ [y_i, e_1] = y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [y_{n+1-i}, y_i] = (-1)^{i+1} (\beta e_1 + e_2), & 1 \leq i \leq \frac{n+1}{2}, \\ [y_i, x] = -[x, y_i] = (i - \frac{n+1}{2}) y_i, & 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$SL(\mu_6)_1 : \begin{cases} [e_1, x] = e_1 + e_2, & [e_2, x] = e_2, \\ [y_i, e_1] = y_{i+1}, & 1 \le i \le n-1, \\ [y_{n+1-i}, y_i] = (-1)^{i+1} e_2, & 1 \le i \le \frac{n+1}{2}, \\ [y_i, x] = -[x, y_i] = (i - \frac{n+1}{2}) y_i, & 1 \le i \le n. \end{cases} \quad SL(\mu_6)_2 : \begin{cases} [e_1, x] = e_1 + e_2, & [e_2, x] = e_2, \\ [y_i, e_2] = y_{i+1}, & 1 \le i \le n-1, \\ [y_{n+1-i}, y_i] = (-1)^{i+1} (e_1 + \beta e_2), & 1 \le i \le \frac{n+1}{2}, \\ [y_i, x] = -[x, y_i] = (i - \frac{n+1}{2}) y_i, & 1 \le i \le n. \end{cases}$$

Список литературы

[1] Sh.A. Ayupov, A.Kh. Khudoyberdiyev, B.A. Omirov. The classification of filiform Leibniz superalgebras of nilindex $n+m$. Acta Math. Sinica (English Series) **25** (2009), no. 1, 171–190.

[2] S. Albeverio, Sh.A. Ayupov, B.A. Omirov. On nilpotent and simple Leibniz algebras. Comm. Algebra **33** (2005), no. 1, 159–172.

[3] L.M. Camacho, J.R. Gómez, R.M. Navarro, B.A. Omirov. Classification of some nilpotent class of Leibniz superalgebras. Acta Math. Sinica (English Series) **26** (2010), no. 5, 799–816.

[4] J.R. Gómez, A.Kh. Khudoyberdiyev, B.A. Omirov. The classification of Leibniz superalgebras of nilindex $n + m$ $(m \neq 0)$. J. Algebra **324** (2010), no. 10, 2786–2803.

[5] V.G. Kac. Lie superalgebras. Adv. Math. **26** (1977), no. 1, 8–96.

[6] A.Kh. Khudoyberdiyev, M. Ladra, Kh.A. Muratova. Solvable Leibniz superalgebras whose nilradical is a Lie superalgebra of maximal nilindex. Bulletin of National University of Uzbekistan: Math. and Nat. Sci. **2** (2019), no. 1, 52–68.

Группы Вейля систем корней и их подъёмы в группы Ли

С.В. Облезин[1]

Ноттингемский университет, Ноттингем, Великобритания

oblezin@gmail.com

В основе классического подхода к классификации конечномерных комплексных полупростых групп Ли лежит редукция основной задачи к проблеме классификации корневых данных Картана. Так, для комлексной полупростой группы G с фиксированным максимальным тором $H \subset G$ соответствующая система корней возникает из присоединённого действия картановской подалгебры $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$ на алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ и определяет G с точностью до изоморфизма. В работе [1] показано, что классификация связных компактных полупростых групп Ли G с фиксированным максимальным

[1]Работа выполнена при частичной поддержке гранта РНФ 16–11–10075.

тором $H \subset G$ эквивалентна классификации нормализаторов $N_G(H)$ максимального тора в G. Нормализатор $N_G(H)$ содержит информацию о группе Вейля $W_G := N_G(H)/H$, и её действии на $H \subset N_G(G)$, однако для восстановления всей группы G этого недостаточно, и необходимо знать структуру расширения для группы $N_G(H)$:

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow N_G(H) \xrightarrow{p} W_G \longrightarrow 1. \tag{1}$$

В общем случае расширение (1) не расщепляется, в связи с чем возникает вопрос о построении сечения проекции $N_G(H) \to W_G$. Для произвольной комплексной редуктивной группы G Титсом [1] построено расширение W_G^T соответствующей группы Вейля W_G; при этом группа Титса W_G^T является погруппой в $N_G(H)$ и вместе с H порождает $N_G(H)$.

Доклад посвящён топологическому описанию группы Титса W_G^T, её интерпретации в терминах максимально расщепимой вещественной формы $G(\mathbb{R}) \subset G(\mathbb{C})$ и обобщению конструкции Титса [3] на случай связной компактной вещественной погруппы $U \subset G(\mathbb{C})$. Результаты, представленные в докладе, получены при работе над совместным проектом с А.А. Герасимовым и Д.Р. Лебедевым [2].

§1. Пусть G — комплексная полупростая группа Ли, выберем $H \subset G$ — её максимальный тор, и пусть $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ – соответствующая алгебра Ли конечного ранга ℓ, а $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$ — её картановская подалгебра. Далее, пусть $\Pi = \{\alpha_i,\, i \in I\} \subset \mathfrak{h}^*$ — множество простых корней, занумерованных множеством I, $|I| = \ell$, вершин диаграммы Дынкина, и пусть $\Pi^\vee = \{\alpha_i^\vee,\, i \in I\} \subset \mathfrak{h}$ — множество простых кокорней. С помощью инвариантной невырожденной билинейной формы $\langle\, ,\, \rangle$ на $\mathfrak{h}$ определим матрицу Картана $A = \|a_{ij}\|$, $a_{ij} = \langle \alpha_i^\vee,\, \alpha_j \rangle$, системы $(\Pi, \Pi^\vee)$. Соответствующая группа Вейля $W_G = N_G(H)/H$ порождается образующими $\{s_i = s_{\alpha_i},\, i \in I\}$ и следующими соотношениями:

$$s_i^2 = 1, \qquad \underbrace{s_i s_j s_i \ldots}_{m_{ij}} = \underbrace{s_j s_i s_j \ldots}_{m_{ij}}, \qquad i \neq j \in I, \tag{2}$$

где $m_{ij} = 2, 3, 4, 6$ при $a_{ij}a_{ji} = 0, 1, 2, 3$ соответственно. Структура (1) определяет каноническое действие W_G на $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$ отражениями относительно простых корней:

$$s_i(h_j) = h_j - a_{ji}h_i\,, \qquad s_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{ij}\alpha_i. \tag{3}$$

Определение 1. *Группой Титса W_G^T называется расширение группы W_G с помощью абелевой групы $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\ell$, так что W_G^T порождена образующими*

$\{\tau_i,\, \theta_i,\, i \in I\}$, *удовлетворяющими следующим соотношениям*:

$$\begin{gathered} \tau_i^2 \,=\, \theta_i\,, \qquad \theta_i\theta_j \,=\, \theta_j\theta_i\,, \qquad \theta_i^2 \,=\, 1\,, \\ \tau_i\theta_j \,=\, \theta_i^{-a_{ji}}\theta_j\tau_i\,, \qquad \underbrace{\tau_i\tau_j\tau_i\ldots}_{m_{ij}} \,=\, \underbrace{\tau_j\tau_i\tau_j\ldots}_{m_{ij}}, \quad i\neq j\in I\,; \end{gathered} \tag{4}$$

при этом абелева нормальная подгруппа $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\ell \subset W_G^T$ *порождена элементами* $\{\theta_i,\, i\in I\}$.

Для максимально расщепимой вещественной формы $G(\mathbb{R}) \subset G(\mathbb{C})$ с максимальным тором $H(\mathbb{R}) = G(\mathbb{R}) \cap H$ имеется аналог последовательности (1) для нормализатора:

$$1 \longrightarrow H(\mathbb{R}) \longrightarrow N_{G(\mathbb{R})}(H(\mathbb{R})) \xrightarrow{\;p\;} W_G \longrightarrow 1, \tag{5}$$

при этом сечение в правом члене (5) определяет сечение в правом члене (1). Максимальный тор $H(\mathbb{R})$ содержит связную (экпоненциальную) подгруппу A и допускает разложение

$$H(\mathbb{R}) \,=\, MA, \qquad M \,=\, H(\mathbb{R})\cap K\,,$$

где $K \subset G(\mathbb{R})$ — максимальная компактная подгруппа в $G(\mathbb{R})$, а M — подгруппа элементов порядка 2. Таким образом, абелева группа $H(\mathbb{R})$ несвязна и имеет $|M| = 2^\ell$ связных компонент, так что $M = \pi_0(H(\mathbb{R}))$, более того, имеется следующая точная последовательность:

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow N_{G(\mathbb{R})}(H(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_0\big(N_{G(\mathbb{R})}(H(\mathbb{R}))\big) \longrightarrow 1. \tag{6}$$

Легко показать, что (6) расщепляется в правом члене и нормализатор $N_{G(\mathbb{R})}(H(\mathbb{R}))$ содержит $\pi_0\big(N_{G(\mathbb{R})}(H(\mathbb{R}))\big)$ в качестве подгруппы.

Предложение 1. *Имеет место следующий изоморфизм групп:*

$$\pi_0\big(N_{G(\mathbb{R})}(H(\mathbb{R}))\big) \,\simeq\, W_G^T. \tag{7}$$

§2. Ввиду (7) можно поставить вопрос об аналоге конструкции расширения Титса (4) для других вещественных форм комплексной группы $G(\mathbb{C})$. Мы ограничимся рассмотрением лишь случая связной компактной вещественной подруппы

$$U \,=\, \big\{g\in G(\mathbb{C})\colon g^\dagger g \,=\, 1\big\}, \tag{8}$$

где $\dagger\colon g\mapsto g^\dagger$ — композиция инволюции Картана с автоморфизмом Галуа γ, задаваемого комплексным сопряжением:

$$\gamma^{-1}\,\lambda\,\gamma \,=\, \bar\lambda, \qquad \forall\lambda\in\mathbb{C}\,.$$

Введём также расширение U с помощью группы Галуа $\Gamma := \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ поля $\mathbb{R}$:

$$U^\Gamma := (U \ltimes \Gamma) \subset G^\Gamma := G(\mathbb{C}) \ltimes \Gamma. \tag{9}$$

Определение 2. *Группа W_G^U порождена образующими $\{\sigma_i, \bar{\sigma}_i, \eta_i, i \in I\}$ и соотношениями*

$$\begin{gathered} \sigma_i^2 = \bar{\sigma}_i^2 = 1\,, \qquad \sigma_i\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_i\sigma_i = \eta_i\,, \qquad i \in I; \\ \sigma_i\eta_j = \eta_j\eta_i^{-a_{ji}}\sigma_i\,, \qquad \bar{\sigma}_i\eta_j = \eta_j\eta_i^{-a_{ji}}\bar{\sigma}_i\,, \qquad i,j \in I\,, \quad a_{ij} = -1,-2,-3; \end{gathered} \tag{10}$$

$$\underbrace{\sigma_i\sigma_j\cdots}_{m_{ij}} = \underbrace{\bar{\sigma}_j\bar{\sigma}_i\cdots}_{m_{ij}}, \qquad i \neq j \in I, \tag{11}$$

где в (11) $m_{ij} = 2,3,4,6$ *при* $a_{ij}a_{ji} = 0,1,2,3$ *соответственно.*

Группа W_G^U обладает естественным внешним автоморфизмом, переставляющим между собой σ_i и $\bar{\sigma}_i$, так что расширенная группа $W_G^U \ltimes \Gamma$ порождается $\{\sigma_i, i \in I\}$ и γ и соотношениями (10), (11), при этом $\bar{\sigma}_i = \gamma\sigma_i\gamma^{-1}$.

Теорема 1. *Пусть* Π *— система простых корней комплексной полупростой алгебры Ли* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, *пусть* $A = \|a_{ij}\|$ *— соответствующая матрица Картана и пусть* $\{e_i, f_i, h_i, i \in I\}$ *— (вещественные) образующие Вейля–Шевалле алгебры Ли* $\mathfrak{g}$. *Тогда отображение*

$$\begin{gathered} \sigma_i \longmapsto \varsigma_i := e^{\frac{\pi\imath}{2}(e_i+f_i)}\,\gamma, \qquad \bar{\sigma}_i \longmapsto \bar{\varsigma}_i := e^{-\frac{\pi\imath}{2}(e_i+f_i)}\,\gamma, \\ \eta_i \longmapsto \xi_i := e^{\pi\imath h_i}\,, \qquad i \in I, \end{gathered} \tag{12}$$

задаёт гомоморфизм $W_G^U \longrightarrow U^\Gamma$ *в группу* (9). *Таким образом, элементы* ς_i, $i \in I$ *и* γ *вместе с максимальным тором* H *порождают расширенную группу* $N_G(H) \ltimes \Gamma$.

Список литературы

[1] M. Curtis, A. Wiederhold, B. Williams. Normalizers of maximal tori. In: Localization in group theory and homotopy theory and related topics. Lect. Notes Math. **418**, 1974, 31–47.

[2] A. Gerasimov, D. Lebedev, S. Oblezin. Normalizers of maximal tori and real forms of Lie groups, arXiv: `math.RT/1811.12867` (2018).

[3] J. Tits. Normalisateurs de Tores: I. Groupes de Coxeter Étendus. J. Algebra **4** (1966), 96–116.

Дискретные группы Гейзенберга и гармонический анализ на группе нормирования ранга два двумерного локального поля

Д.В. Осипов
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, НИУ ВШЭ, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», Москва, Россия
d_osipov@mi-ras.ru

Двумерное локальное поле — это полное поле дискретного нормирования с полем вычетов, которое снова является полным полем дискретного нормирования с конечным полем вычетов. Пример такого поля — это поле $\mathbb{F}_q((u))(t))$, возникающее естественным образом из данных: точка и формальный росток неприводимой кривой на алгебраической поверхности, определённой над конечным полем.

Двумерное локальное поле не является локально компактным пространством в естественной топологии. Тем не менее, в работах [1], [2] был построен гармонический анализ на двумерных локальных полях и пространствах аделей двумерных схем: пространства функций и распределений, преобразования Фурье, формулы суммирования Пуассона.

В докладе будет рассказано про «дискретную» версию этого гармонического анализа, а именно, на абелевой группе Γ с фиксированным центральным расширением

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

будут построены пространства функций и распределений и преобразования Фурье на них. В случае, когда группа Γ является группой нормирования ранга два двумерного локального поля, построенный гармонический анализ связан с гармоническим анализом на двумерном локальном поле из работ [1], [2].

На построенных пространствах функций и распределений на группе Γ естественным образом действуют дискретная группа Гейзенберга $\mathrm{Heis}(3,\mathbb{Z})$ и расширенная дискретная группа Гейзенберга $\mathrm{Heis}(3,\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$. При этом преобразование Фурье коммутирует с действием дискретной группы Гейзенберга и (в некоторых случаях) с действием расширенной дискретной группы Гейзенберга.

Доклад основан на совместной работе с А.Н. Паршиным, см. [3].

Список литературы

[1] Д.В. Осипов, А.Н. Паршин. Гармонический анализ на локальных полях и пространствах аделей. I. Изв. РАН. Сер. матем. **72** (2008), no. 5, 77–140, arXiv: `mathAG/0707.1766`.
[2] Д.В. Осипов, А.Н. Паршин. Гармонический анализ на локальных полях и пространствах аделей. II. Изв. РАН. Сер. матем. **75** (2011), no. 4, 91–164, arXiv: `math.AG/0912.1577`.
[3] Д.В. Осипов, А.Н. Паршин. Гармонический анализ на группе нормирования ранга 2 двумерного локального поля. Математический сборник **211** (2020), no. 1, в печати, arXiv: `math.NT/1911.09718`.

Представления параболических подгрупп

А.Н.Панов[1]
Самарский университет, Самара, Россия
`apanov@list.ru`

Теорией суперхарактеров для конечной группы G называют пару $(\mathfrak{S}, \mathcal{K})$, где $\mathfrak{S} = \{\chi_1, \ldots, \chi_M\}$ — система попарно ортогональных характеров (представлений) группы G и $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_M\}$ — разбиение группы такие, что характеры из $\mathfrak{S}$ постоянны на подмножествах из $\mathcal{K}$ и $\{1\} \in \mathcal{K}$. При этом характеры из $\mathfrak{S}$ называются суперхарактерами, а помножества из $\mathcal{K}$ — суперклассами (см. [1]). Отметим, что число суперхарактеров должно быть равно числу суперклассов. Примером теории суперхарактеров является пара, состоящая из системы всех неприводимых характеров и разбиения группы на классы сопряжённых элементов. В случае, если классификация неприводимых представлений является чрезвычайно сложной, «дикой» проблемой, ставится задача построения конструктивной теории суперхарактеров.

Пусть G — параболическая подгруппа в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$ характеристики $\neq 2$. Подгруппа G разлагается $G = LU$, где $L = L_1 \times \ldots \times L_\ell$, $L_i = \mathrm{GL}(n_i, \mathbb{F}_q)$ и $U = 1 + \mathcal{U}$ — унипотентный радикал G. Будем называть корнем пару $\gamma = (i, j)$, для которой матричная единица E_{ij} принадлежит $\mathcal{U}$. По определению, расстановка ладей в множестве корней Δ_U — это подмножество $D \subset \Delta_U$, которое имеет в каждой строке и в каждом столбце не более одного корня. Сопоставим D элемент $X_D = \sum_{\gamma \in D} E_\gamma \in \mathcal{U}$ (соответственно, $\Lambda_D = \sum_{\gamma \in D} E_\gamma^* \in \mathcal{U}^*$).

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 20–01–00091а).

Пусть W_L — группа Вейля для L. Будем говорить, что две расстановки ладей эквивалентны, если они сопряжены относительно лево-правого действия $W_L \times W_L$ на Δ_U.

Рассмотрим разбиение $[1, n] = I_1 \cup \ldots \cup I_\ell$ на последовательные отрезки длин $|I_i| = n_i$. По расстановке ладей $D \in \Delta_U$ построим подгруппу $G_D = H_D U_D$, где U_D — стабилизатор Λ_D относительно правого действия U на $\mathcal{U}^*$, а H_D — подгруппа L, состоящая из элементов $h = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_\ell) \in L$, удовлетворяющих условию: для любого $(i,j) \in D, \ \ i \in I_k, \ \ j \in I_m$, подматрица $\mathrm{diag}(h_k, \ldots, h_m)$ скалярна. Рассмотрим подмножество $\mathcal{A}$, состоящее из пар (D, θ), где D пробегает множество представителей эквивалентных расстановок ладей, а θ — множество неприводимых характеров подгрупп H_D. Зафиксируем нетривиальный характер $t \to \varepsilon^t$ поля $\mathbb{F}_q$ со значением в $\mathbb{C}^*$. Каждому $\alpha \in \mathcal{A}$ сопоставим характер χ_α, являющийся суммой по $p \in L$ характеров, индуцированных с характеров $\xi(h(1+x)) = \theta(h)\varepsilon^{p\Lambda_D(x)}$ подгруппы G_D.

Пусть $h = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_\ell) \in L$. Рассмотрим новое разбиение $[1, n]$ на последовательные отрезки $\{\tilde{I}_s\}$, где каждый $\tilde{I}_s$ либо совпадает с одним из отрезков $\{I_k\}$, либо является наибольшим отрезком вида $I_k \cup \ldots \cup I_m, \ \ k \neq m$, для которого подматрица $\mathrm{diag}(h_k, \ldots, h_m)$ скалярна. По разбиению $\{\tilde{I}_s\}$ построим параболическую подгруппу $G_h = L_h U_h$, содержащую G. Рассмотрим множество $\mathcal{B}$, состоящее из пар (D, h), где D пробегает множество представителей эквивалентных расстановок ладей, а h — множество представителей классов сопряжённых элементов в L. Каждой паре $\beta = (D, h)$ сопоставим класс $K_\beta = C\ell_L(h)(1 + GX_D G)U_h$, где $C\ell(h)$ класс сопряжённых элементов для h в L.

Теорема. [1] Множество характеров $\{\chi_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$ и разбиение G на классы $\{K_\beta \colon \beta \in \mathcal{B}\}$ задают теорию суперхарактеров группы G.

В докладе будет рассказано, как эта конструкция переносится на параболические подгруппы в ортогональной и симплектической группах (см. [2]), а также на группы, полученные параболической контракцией из простых групп лиевского типа A, B, C, D.

Список литературы

[1] P. Diaconis, I.M. Isaacs. Supercharacters and superclasses for algebra groups. Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 2359–2392.

[2] A.N. Panov. Supercharacter theories for algebra group extensions, arXiv: `math.RT/1808.09366` (2018).

[3] A.N. Panov. Two supercharacter theories for the parabolic subgroups in orthogonal and symplectic groups. J. Algebra **539** (2019) 37–53.

Элементы Казимира для подалгебр Леви и вокруг

Д.И. Панюшев
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия
panyushev@iitp.ru

Если $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли и $\mathfrak{h}$ — её произвольная подалгебра Леви, то, используя форму Киллинга на $\mathfrak{g}$, можно определить элемент Казимира $\mathcal{C}_{\mathfrak{h}}$, лежащий в обёртывающей алгебре $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. Я расскажу о свойствах этого элемента и его собственных значениях на $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Если $\mathfrak{h}$ — это максимальная Леви, то с ней ассоциирована естественная $\mathbb{Z}$-градуировка $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i)$, для которой $\mathfrak{g}(0) = \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}(i)$ — простой $\mathfrak{h}$-модуль при $i \neq 0$. Я приведу явные формулы для собственных значений $\mathcal{C}_{\mathfrak{h}}$ на $\mathfrak{g}(i)$, $i \neq 0$, и укажу связь между собственными значениями $\mathcal{C}_{\mathfrak{h}}$ в $\bigwedge^{\bullet}\mathfrak{g}(1)$ и размерностями абелевых подпространств в $\mathfrak{g}(1)$. Одно из приложений состоит в том, что если подпространство $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}(1)$ абелево, тогда как $\mathfrak{g}(1)$ неабелево, то $\dim\mathfrak{a} \leqslant (\dim\mathfrak{g}(1))/2$. Если время позволит, то также будет рассказано и о связи этой теории со «странной формулой» Фрейденталя—де Фриза.

Коприсоединённые орбиты алгебр Витта

А.В. Петухов[1]
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия
alex-2@yandex.ru

В своём докладе хочу поговорить о результатах, связанных с коприсоединёнными орбитами в алгебре Витта (алгебра $\mathbb{C}$-векторных полей на окружности), полученных совместно с С. Сьерра [3], [4]. Сначала будут обсуждено несколько вводных результатов про бесконечномерные алгебры Ли, а так же их конечномерные аналоги. Потом мы перейдём к результатам, специфичным для алгебры Витта. Будут представлены следующие факты:

а) конечномерность коприсоединённых орбит с нетривиальным замыканием для алгебры Витта;

б) соответствие между такими орбитами и линейно-рекуррентными последовательностями;

в) соответствие между такими орбитами и (версией) n-джетов на окружности.

[1]Работа частично поддержана РФФИ, проект 20–01–00091–а.

В конце доклада я обсужу как эти результаты обобщаются на алгебру Вирасоро и как они могут помочь описать все подалгебры конечной коразмерности в алгебре Витта и алгебре Вирасоро. Также хочу отметить, что сама работа является частью программы по исследованию коприсоединённых орбит бесконечномерных алгебр Ли, см. [2] и [1] (в частности, надеюсь убедить пришедших на доклад, что там есть что исследовать).

Список литературы

[1] M.V. Ignatyev, A.V. Petukhov, The orbit method for locally nilpotent Lie algebras, in preparation.

[2] I. Penkov, A. Petukhov. On ideals in the enveloping algebra of a locally simple Lie algebra. IMRN, 2014, `doi:10.1093/imrn/rnu085`.

[3] A.V. Petukhov, S.J. Sierra. Ideals in the enveloping algebra of the positive Witt algebra. Algebras and Representation Theory (2019), `https://doi.org/10.1007/s10468-019-09896-2`.

[4] A.V. Petukhov, S.J. Sierra. Kirillov orbit method for Witt Lie algebra, in preparation.

Исчерпаемые группы автоморфизмов

А.Ю. Перепечко

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Московский физико-технический институт, Москва, Россия

perepeal@gmail.com

Доклад основан на совместных работах автора с М.Г. Зайденбергом, С. Коваленко и А. Регетой, см. [1], [3], [2]. Как известно, группы автоморфизмов аффинных многообразий допускают структуру прямого предела замкнутых алгебраических подмножеств. Будем называть подгруппу автоморфизмов *исчерпаемой*, если она допускает структуру прямого предела алгебраических подгрупп. Также напомним, что *специальной* группой автоморфизмов называется подгруппа, порождённая однопараметрическими унипотентными подгруппами.

Мы выдвигаем гипотезу, что *связная компонента группы автоморфизмов исчерпаема тогда и только тогда, когда специальная группа автоморфизмов абелева.* Ранее она была доказана нами в размерности 2. В докладе мы представим доказательство данной гипотезы для подгруппы, порождённой связными алгебраическими подгруппами.

Работа автора была выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект №18–71–00153).

Список литературы

[1] S. Kovalenko, A. Perepechko, M. Zaidenberg. On automorphism groups of affine surfaces. Algebraic Varieties and Automorphism Groups. Advanced Studies in Pure Mathematics **75** (2017), 207—286.

[2] A. Perepechko, A. Regeta. When is the automorphism group of an affine variety nested?, arXiv: `math.AG/1903.07699`.

[3] A. Perepechko, M. Zaidenberg. Automorphism groups of affine ML_2 surfaces: dual graphs and Thompson groups, in preparation.

Нильпотентность йордановых и альтернативных алгебр

А.В. Попов

Ульяновск, Россия

`klever176@rambler.ru`

Многообразием линейных алгебр называется класс линейных алгебр $\mathcal{V}$, удовлетворяющих заданной системе полиномиальных тождеств $id(\mathcal{V})$. Одной из важнейших задач в теории многообразий является описание «минимальных» систем тождеств, выполнение которых в подмногообразии $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ влечёт выполнение в $\mathcal{W}$ также тождества нильпотентности $x_1 \dots x_n \equiv 0$ для некоторого $n > 1$. Более точно эту задачу можно сформулировать как задачу описания всех почти нильпотентных подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$.

Определение. Многообразие линейных алгебр $\mathcal{V}$ называется почти нильпотентным, если оно не нильпотентно, но всякое его собственное подмногообразие $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ является нильпотентным.

Далее будем считать, что характеристика основного поля равна нулю.

Описание почти нильпотентных подмногообразий в многообразии $\mathcal{N}Ass$ всех (не обязательно ассоциативных) линейных алгебр, судя по всему, является достаточно сложной задачей. В настоящий момент имеются многочисленные примеры таких подмногообразий [1], [2].

В многообразии ассоциативных алгебр $\mathcal{A}ss$ единственным почти нильпотентным подмногообразием является многообразие ассоциативных коммутативных алгебр $\mathcal{C}om$, что является следствием теоремы Нагаты–Хигмана, утверждающей, что всякая ассоциативная алгебра, удовлетворяющая тождеству $x^n \equiv 0$, является нильпотентной.

В случае многообразия алгебр Ли $\mathcal{L}ie$ также имеется единственное почти нильпотентное подмногообразие — многообразие метабелевых алгебр Ли $\mathcal{A}^2$.

Это следует из известного результата Е.И. Зельманова о нильпотентности алгебры Ли с тождеством энгелевости $x\underbrace{y\ldots y}_{k}=0$ [3].

В многообразии йордановых алгебр $\mathcal{J}ord$ известно два примера почти нильпотентных многообразий: многообразие $\mathcal{C}om$ и многообразие йордановых алгебр $\mathcal{V}_J$, удовлетворяющих тождествам $x^3\equiv 0$ и $(x_1x_2)(x_3x_4)\equiv 0$ [4].

В многообразии $\mathcal{A}lt$ почти нильпотентным, помимо $\mathcal{C}om$, является многообразие альтернативных алгебр $\mathcal{V}_A$, удовлетворяющих тождествам $x^3\equiv 0$ и $(x_1x_2)(x_3x_4)\equiv 0$ [5].

В настоящем докладе рассказывается о полученном критерии нильпотентности йордановых алгебр и некоторых его следствиях.

Теорема 1. Йорданова алгебра A, удовлетворяющая тождествам $x^n\equiv 0$ и $St_m=\sum\limits_{\sigma\in S_m}(-1)^{\sigma}\,yx_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(m)}\equiv 0$ для некоторых $n,m>1$, нильпотентна.

Доказательство теоремы 1 опирается на результаты работ [3], [6], [7], [8]. Заметим, что нильпотентность многообразия йордановых алгебр, удовлетворяющего паре тождеств $(x_1x_2)(x_3x_4)\equiv 0$ и $St_m\equiv 0$, была показана в работе [7].

Из теоремы 1 следует, что многообразия $\mathcal{C}om$ и $\mathcal{V}_J$ — единственные почти нильпотентные многообразия йордановых алгебр.

Пусть A — альтернативная алгебра над полем характеристики 0. Известно, что A нильпотентна тогда и только тогда, когда нильпотентна йорданова алгебра $A^{(+)}$ [4]. Пользуясь данным соображением, из теоремы 1 можно получить аналогичный критерий нильпотентности для альтернативных алгебр.

Теорема 2. Альтернативная алгебра A, удовлетворяющая тождеству $x^n\equiv 0$ для некоторого $n>1$ и любому тождеству, не выполненному в многообразии $\mathcal{V}_A$ (например, $\sum\limits_{\sigma\in S_m}(-1)^{\sigma}\,yx_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(m)}\equiv 0$), нильпотентна.

Из теоремы 2 следует, что многообразия $\mathcal{C}om$ и $\mathcal{V}_A$ являются единственными почти нильпотентными многообразиями альтернативных алгебр.

Теоремы 1 и 2 дают решение задачи, поставленной И.П. Шестаковым в днестровской тетради [10, задача 2.124.a].

Список литературы

[1] С.П. Мищенко, О.В. Шулежко. О почти нильпотентных многообразиях в классе коммутативных метабелевых алгебр. Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2015, no. 3(125), 21–28.

[2] С.П. Мищенко, Н.П. Панов. Слова Штурма и несчётное множество почти нильпотентных многообразий квадратичного роста. Вестн. Моск. ун-

та. Сер. 1. Матем., мех. 2017, no. 6, 55–59.
[3] Е.И. Зельманов. Об энгелевых алгебрах Ли. Сиб. мат. журн. **29** (1988), no. 5, 112–117.
[4] К.А. Жевлаков, А.М. Слинько, И.П. Шестаков, А.И. Ширшов. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.
[5] С.В. Пчелинцев. Разрешимые индекса 2 многообразия алгебр. Математический сборник **115**(**157**) (1981), no. 2(6), 179–203.
[6] Yu.A. Medvedev, E.I. Zelmanov. Solvable Jordan algebras. Comm. Algebra **13** (1985), no. 6, 1389–1414.
[7] V. Drensky, T. Rashkova. Varieties of metabelian Jordan algebras. Serdica **15** (1989), 293–301.
[8] А.В. Попов. Йордановы алгебры лиева типа. Математические труды **22** (2019), no. 1, 127–177.
[9] В.Т. Филиппов, В.К. Харченко, И.П. Шестаков. Нерёшенные проблемы теории колец и модулей. Днестровская тетрадь, 4-е изд. — Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1993.

Простые подалгебры неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли характеристики 2

М.М. Рабиа, М.И. Кузнецов, А.В. Кондратьева
Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия
rabiannovgorod91@gmail.com, kuznets-1349@yandex.ru, alisakondr@mail.ru

В работе [1] найдены все деформации классической простой алгебры Ли типа $\overline{A_3}$ над полем характеристики 2, где $\overline{A_3}$ — фактор алгебры A_3 по центру. В [2] показано, что все известные 14-мерные алгебры Ли являются деформациями алгебры Ли типа $\overline{A_3}$. В настоящей работе строятся 15-мерные простые алгебры Ли.

Пусть $P(4)$ — неальтернирующая гамильтонова алгебра Ли от четырех переменных характеристики 2, состоящая из функций Гамильтона, которые являются полиномами в разделенных степенях от переменных $x_1, \ldots, x_4$ по модулю констант, со скобкой Пуассона $\{f, g\} = \sum\limits_{i=1}^{4} \partial_i f \partial_i g$ [3]. Положим $w_i = \prod\limits_{j \neq i} x_j$, $z = x_1^{(2)} + \ldots + x_4^{(2)}$. Пусть $(a, b) \in P^1$ – точка проективной прямой. Алгебра Ли $P(4)$ содержит новое параметрическое семейство простых градуированных 15-мерных подалгебр Ли $L(a,b) = L_{-1}+L_0+L_1$, $L_{-1} = \langle x_1, \dots, x_4\rangle$, $L_0 = \langle x_i x_j,\ i \neq j\rangle + \langle z\rangle$, $L_1 = \langle azx_i + bw_i,\ i = 1,2,3,4\rangle$. Эти алгебры являются новыми, по крайней мере, в классе простых градуированных алгебр Ли.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 18–01–00900/а.

Список литературы

[1] N.G. Chebochko, M.I. Kuznetsov. Integrable cocycles and global deformations of Lie algebra G_2 in characteristic 2. Comm. Algebra **45** (2017), no. 7, 2969–2977.

[2] M.I. Kuznetsov, A.V. Kondrateva, N.G. Chebochko. Simple 14-dimensional Lie algebras in characteristic two. Journal of Mathematical Sciences **240** (2019), no. 4, 474–480.

[3] L. Lin. Non-alternating Hamiltonian algebra $P(n,m)$ of characteristic 2. Comm. Algebra **21** (1993), 399–411.

О кольцах суперсимметричных многочленов

А.Н. Сергеев

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, НИУ ВШЭ, Москва, Россия

sergeevan@info.sgu.ru, asergeev@hse.ru

Доклад основан на работе автора [1].

Рассматривается три типа колец суперсимметричных многочленов: полиномиальные $\Lambda_{m,n}$, частично полиномиальные $\Lambda^{+y}_{m,n}$ и кольца суперсимметричных многочленов Лорана $\Lambda^{\pm}_{m,n}$. Для каждого типа колец дается их описание в терминах образующих и соотношений. Как следствие для $n \geq m$ мы доказываем изоморфизм $\Lambda^{+y}_{m,n} = \Lambda^{+y}_{m,n} \otimes \Lambda^{+y}_{0,m-n}$. Утверждение об изоморфизме верно также для полиномиальных колец, но в этом случае изоморфизм не сохраняет градуировку. Доказывается также формула Якоби–Труди для базиса, состоящего из суперхарактеров Эйлера специального вида.

Список литературы

[1] A.N. Sergeev. On rings of supersymmetric polynomials. J. Algebra **517** (2019), 336–364.

Аналог теоремы Хоррокса для ортогональных групп Стейнберга

С.С. Синчук
Санкт-Петербургский государственный университет, Лаборатория им. П.Л. Чебышёва, Санкт-Петербург, Россия
sinchukss@gmail.com

Доклад основан на совместной работе автора с А. Лавреновым (см. [2]).

Пусть $\mathcal{F}\colon Rings \to Sets_*$ — функтор из категории коммутативных колец в категорию множеств с отмеченной точкой. Будем говорить, что для функтора $\mathcal{F}$ имеет место $\mathbb{P}^1$-склейка, если для любого локального кольца R следующий квадрат является декартовым:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(R) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(R[t]) \arrow[d] \\ \mathcal{F}(R[t^{-1}]) \arrow[r] & \mathcal{F}(R[t,t^{-1}]). \end{tikzcd}$$

Классическая теорема Хоррокса 1964 года (см., например, [1, VI.5.2]) утверждает, что для функтора $\mathcal{F}$, сопоставляющего кольцу R множество $VB_n(R)$ классов изоморфизма проективных модулей постоянного ранга n над R, имеет место $\mathbb{P}^1$-склейка. Данное свойство играет ключевую роль в доказательстве известной теоремы Квиллена–Суслина об описании проективных модулей над кольцом многочленов. В простейшем случае эта теорема утверждает, что для любого поля k выполнено равенство $VB_n(k[t_1,\dots t_n]) = VB_n(k) = \{*\}$.

Напомним, что для произвольной неприводимой системы корней Φ *нестабильные K-функторы, промоделированные по группам Шевалле,* определяются при помощи точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathrm{K}_2(\Phi,R) \longrightarrow \mathrm{St}(\Phi,R) \xrightarrow{\pi} G_{sc}(\Phi,R) \longrightarrow \mathrm{K}_1(\Phi,R) \longrightarrow 1, \qquad (1)$$

в которой через π обозначается естественное отображение между группой Стейнберга $\mathrm{St}(\Phi,R)$ и односвязной группой Шевалле $G_{sc}(\Phi,R)$ (см. [3, § 3, § 6]).

Из работ А. Суслина и его учеников известно, что $\mathbb{P}^1$-склейка выполнена для функторов $\mathrm{K}_1(\mathsf{D}_\ell,R)$ при $\ell \geq 3$ (см. [4, Теорема 6.8]) и $\mathrm{K}_2(\mathsf{A}_\ell,R)$ при $\ell \geq 4$ (см. [5, Теорема 5.1]). Основным же результатом [2] является следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\Phi = \mathsf{D}_\ell$ — система корней ранга $\ell \geq 7$, а R — коммутативное кольцо такое, что $2 \in R^\times$, тогда для функторов $\mathcal{F} = \mathrm{St}(\mathsf{D}_\ell,-)$, $\mathrm{K}_2(\mathsf{D}_\ell,-)$, $\mathrm{KO}_2(-)$ выполнена $\mathbb{P}^1$-склейка.*

Список литературы

[1] T.-Y. Lam. Serre's problem on projective modules. Springer, 2010.

[2] A. Lavrenov, S. Sinchuk. A Horrocks-type theorem for even orthogonal K_2, arXiv: `math.GR/1909.02637` (2019).

[3] Р. Стейнберг. Лекции о группах Шевалле. — М.: Мир, 1975.

[4] А. А. Суслин, В. И. Копейко. Квадратичные модули и ортогональная группа над кольцами многочленов, Модули и представления. Записки научных семинаров ЛОМИ **71** (1977), 216–250.

[5] М. С. Туленбаев. Группа Стейнберга кольца многочленов. Математический сборник **117**(**159**) (1982), no. 1, 131–144.

Инволюции в симметрической группе: комбинаторика и геометрия

Е.Ю. Смирнов

Факультет математики НИУ ВШЭ, НМУ, Москва, Россия

esmirnov@hse.ru

Пусть $\mathfrak{n}_n \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ — подалгебра строго верхнетреугольных матриц. На ней имеется присоединённое действие борелевской подгруппы $B \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, множество орбит которого, вообще говоря, бесконечно. Однако если ограничить это действие на множество $\mathfrak{X}_n \subset \mathfrak{n}_n$ матриц, квадрат которых равен нулю, у него уже будет конечное число орбит. В работе А. Мельниковой [5] было показано, что эти орбиты нумеруются множеством инволютивных перестановок $I_n \subset S_n$. Примыкание B-орбит на $\mathfrak{X}_n$ даёт на I_n частичный порядок (который не следует путать с порядком Брюа). В работе [6] приводится простое описание этого порядка в комбинаторных терминах.

Неожиданным образом тот же порядок возникает в другой геометрической ситуации. Рассмотрим прямое произведение двух грассманианов $\mathrm{Gr}(k,n) \times \mathrm{Gr}(l,n)$. На нем имеется естественное действие пары борелевских подгрупп $B \times B \subset \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n$, орбиты которого — это произведения клеток Шуберта $\Omega_\lambda \times \Omega_\mu$ в грассманианах. Более интересно рассмотреть действие диагональной борелевской подгруппы $B \subset B \times B$. Хорошо известно (см., например, [4]), что это действие также будет иметь конечное число орбит. Явное комбинаторное их описание было получено в [7]. Более того, B-орбиты, на которые распадается данная $(B \times B)$-орбита $\Omega_\lambda \times \Omega_\mu$, нумеруются некоторым специальным набором инволютивных перестановок $I_n(\lambda,\mu) \subset I_n$, зависящим от λ и μ. Как и в предыдущем случае, примыкания B-орбит задают на каждом из $I_n(\lambda,\mu)$ частичный порядок. При этом имеет место следующая теорема.

Теорема. [8] *Частичный порядок на каждом из $I_n(\lambda, \mu)$ получается ограничением частичного порядка на I_n, задаваемого примыканием присоединенных B-орбит на $\mathfrak{X}_n$.*

Приведённое в работе [8] доказательство было чисто комбинаторным; мы покажем, как этот факт можно объяснить геометрически. Также мы обсудим обобщения этой теоремы (отчасти гипотетические), связывающие порядок на B-орбитах в абелевых нильрадикалах (см. работы Барнеа и Мельниковой [1], [2], Гандини и Маффеи [3]) и порядок на B-орбитах на двойных комикровесовых многообразиях флагов.

Работа частично поддержана РФФИ, проект 20–01–00091–а.

Список литературы

[1] N. Barnea, A. Melnikov. B-orbits in abelian nilradicals of types B, C, and D: towards a conjecture of Panyushev. International Workshop on Lie Theory and its Applications in Physics, Springer, 2015, 399-411.

[2] N. Barnea, A. Melnikov. B-orbits of square zero in nilradical of the symplectic algebra. Transformation Groups **22** (2017), no. 4, 885–910.

[3] J. Gandini, A. Maffei. The Bruhat order on Hermitian symmetric varieties and on abelian nilradicals, arXiv: `math.AG/1708.05523` (2017).

[4] P. Littelmann. On spherical double cones. J. Algebra **166** (1994), no. 1, 142–157.

[5] A. Melnikov. B-orbits in solutions to the equation $x^2 = 0$ in triangular matrices. J. Algebra **223** (2000), no. 1, 2000.

[6] A. Melnikov. Description of B-orbit closures of order 2 in upper-triangular matrices. Transformation groups **11** (2006), no. 2, 217–247.

[7] E.Yu. Smirnov. Desingularizations of Schubert varieties in double Grassmannians. Functional Analysis and its Applications **42** (2008), no. 2, 126–134.

[8] E. Smirnov. Orbites d'un sous-groupe de Borel dans le produit de deux grassmanniennes. PhD thesis, Université Grenoble I, 2007.

Дикие автоморфизмы на трёхмерных градуированных алгебрах

А.Н. Трушин
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
Ornkano@mail.ru

Основное поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, нулевой характеристики.

Положим $A = \mathbb{K}[x, y, z]$. *Треугольными* автоморфизмами алгебры A назовём автоморфизмы вида $(x, y, z) \mapsto (x + f(y, z), y, z)$. Пусть Γ — $\mathbb{Z}$-градуировка алгебры A. Будем говорить, что автоморфизм $\varphi = (F, G, H)$ алгебры A сохраняет градуировку Γ, если $\varphi(A_d) \subset A_d$. Такой автоморфизм назовём *градуированным.* Градуированный автоморфизм, φ будем называть *градуированно-ручным*, если этот автоморфизм раскладывается в композицию градуированнных треугольных и градуированных аффинных автоморфизмов. Градуированный автоморфизм назовём *градуированно-диким*, если он не является градуированно-ручным.

Теорема 1. Пусть Γ — $\mathbb{Z}$-градуировка на алгебре A. Пусть $(\deg_\Gamma(x), \deg_\Gamma(y), \deg_\Gamma(z)) = (a, b, c)$, где $a \geqslant b \geqslant 0, c \leqslant 0$, числа a, b и c взаимно просты. Тогда градуировка Γ допускает градуированно-дикие автоморфизмы, если

- целые числа a, b и $-c$ одновременно строго положительны, и существуют натуральное P и натуральное $Q \geqslant 2$, такие, что $a = bQ - cP$; (1)

- числа a, b и c одновременно равны нулю. (2)

В противном случае все градуированные автоморфизмы алгебры $\mathbb{K}[x, y, z]$ являются градуированно-ручными.

Теорема 2. Пусть теперь Γ — произвольная $\mathbb{Z}$-градуировка на алгебре A, то есть $(\deg_\Gamma(x), \deg_\Gamma(y), \deg_\Gamma(z)) = (m, n, k)$, где m, n, k — произвольные целые числа. Тогда градуировка Γ допускает градуированно-дикие автоморфизмы тогда и только тогда, когда тройку чисел (m, n, k) можно привести к виду (1) перестановкой переменных, сокращением на наибольший общий делитель, домножением на -1, либо если она является градуировкой вида (2).

Список литературы
[1] A. van den Essen. Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture. Prog. in Math. **190**, Birkhäuser, Basel, 2000.
[2] I. Shestakov, U. Umirbaev. The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables. J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), 197–227.
[3] И.В. Аржанцев, С.А. Гайфуллин. Кольца Кокса, полугруппы и автоморфизмы аффинных многообразий. Математический сборник **201** (2010), no. 1, 3–24.
[4] G. Freudenburg. Algebraic theory of locally nilpotent derivations. Encyclopaedia of Mathematical Sciences **136**, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2006.
[5] H.W.E. Jung. Über ganze birationale transformationen der Ebene. J. Reine Angew. Math. **184** (1942), 161–174.

Феномен Гартогса в G-многообразиях

С.В. Феклистов
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
sergeyfe2017@yandex.ru

Классическая теорема Гартогса о стирании компактных особенностей формулируется следующим образом. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — область ($n > 1$), и пусть $K \subset D$ — компакт такой, что $D \setminus K$ связно. Тогда каждая голоморфная функция f на $D \setminus K$ имеет единственное голоморфное продолжение на D [3].

Возникает естественный вопрос, наблюдается ли это явление для других комплексных аналитических пространств?

Определение. Будем говорить, что связное комплексное пространство X допускает феномен Гартогса, если для любой области $D \subset X$ и любого компактного множества $K \subset D$ такого, что $D \setminus K$ связно, гомоморфизм ограничения

$$H^0(D, \mathcal{O}) \to H^0(D \setminus K, \mathcal{O})$$

является изоморфизмом.

Феномен Гартогса рассматривался для различных классов комплексных пространств, например, для многообразий и пространств Штейна в работах [1], [6], для $(n-1)$-полных нормальных комплексных пространств в работах [2], [5].

Задача. Найти необходимые и достаточные условия, при которых комплексное алгебраическое G-многообразие допускает феномен Гартогса.

В настоящем докладе пойдет речь о феномене Гартогса в гладких торических многообразиях произвольной размерности. Впервые данная задача была рассмотрена для гладких торических поверхностей в работе [4].

Пусть X_Σ — комплексное торическое многообразие с веером Σ, $|\Sigma|$ — носитель веера Σ, $\mathcal{O}$ — пучок голоморфных функций. Дополнение $\mathbb{R}^p \setminus |\Sigma|$ может иметь несколько компонент связности: $\mathbb{R}^p \setminus |\Sigma| = \bigsqcup\limits_j C_j$.

Теорема. Пусть X_Σ — некомпактное гладкое торическое многообразие и $\mathbb{R}^p \setminus |\Sigma|$ связно. Группа $H^1_c(X_\Sigma, \mathcal{O})$ тривиальна тогда и только тогда, когда X_Σ допускает феномен Гартогса.

Теорема. Пусть Σ — веер торического многообразия X_Σ и дополнение веера $C := \mathbb{R}^p \setminus |\Sigma|$ связно. Группа $H^1_c(X_\Sigma, \mathcal{O})$ тривиальна тогда и только тогда, когда $\operatorname{conv}(\overline{C}) = \mathbb{R}^p$.

Теорема. Пусть X_Σ — гладкое некомпактное торическое многообразие с веером Σ и дополнением $\mathbb{R}^p \setminus |\Sigma| = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} C_j$. Тогда

- Если $\operatorname{conv}(\overline{C_j}) = \mathbb{R}^p$ для некоторого j, то X_Σ допускает феномен Гартогса.

- Если $n = 1$, то верно обратное, то есть если X_Σ допускает феномен Гартогса, то $\operatorname{conv}(\overline{C_1}) = \mathbb{R}^p$.

Список литературы

[1] A. Andreotti, D. Hill. E.E. Levi convexity and the Hans Levy problem. Part I: reduction to vanishing theorems. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. **26** (1972), no. 2, 325-–363.

[2] M. Coltoiu, J. Ruppenthal. On Hartogs' extension theorem on $(n-1)$-complete complex spaces. J. Reine Angew. Math. **637** (2009), 41–47.

[3] F. Hartogs. Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Vertnderlichen. Sitzungsber. Kongl. Bayer. Akad. Wissen **36** (1906), 223–242.

[4] M.A. Marciniak. Holomorphic extensions in smooth toric surfaces. Journal of Geometric Analysis **22** (2011), no. 4, 911–933.

[5] J. Merker, E. Porten. The Hartogs extension theorem on $(n-1)$-complete complex spaces. J. Reine Angew. Math. **637** (2009), 23–39.

[6] N. Øvrelid, S. Vassiliadou. Hartogs extension theorems on Stein spaces. Journal of Geometric Analysis **20** (2010), 817–836.

О шуровых схемах отношений, связанных с группами Судзуки и Ри

Л.Ю. Циовкина
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия
l.tsiovkina@gmail.com

Схемой отношений называется пара $(\Omega, \mathcal{R})$, состоящая из конечного множества Ω и множества $\mathcal{R} = \{R_0, R_1 \ldots, R_s\}$ бинарных отношений на Ω, удовлетворяющего следующим условиям: (1) $\mathcal{R}$ — разбиение множества Ω^2; (2) $\{(x,x) \mid x \in \Omega\} \in \mathcal{R}$; (3) ${R_t}^T = \{(y,x) \mid (x,y) \in R_t\} \in \mathcal{R}$ для всех $0 \le t \le s$; (4) для всех $0 \le i,j,t \le s$ существуют константы c_{ij}^t (называемые *числами пересечений* схемы) такие, что $c_{ij}^t = |\{z \in \Omega | (x,z) \in R_i$ и $(z,y) \in R_j\}|$ для любой пары $(x,y) \in R_t$. Схема отношений $(\Omega, \mathcal{R})$ называется *шуровой*, если для некоторой группы подстановок на Ω её набор орбиталов на Ω совпадает с $\mathcal{R}$. В докладе будут представлены результаты автора по исследованию некоторых шуровых схем отношений, связанных с группами Судзуки $Sz(q)$ и Ри ${}^2G_2(q)$, где $q > 3$, а также графов их базисных отношений, полученные в работах [1], [2], в частности, будет показана справедливость следующего результата.

Теорема. *Пусть $G = Sz(q)$ и $q = 2^{2e+1} \ge 8$ или $G = {}^2G_2(q)$ и $q = 3^{2e+1} \ge 27$. Пусть B — подгруппа Бореля группы G, U — унипотентная подгруппа группы G, содержащаяся в B, K — подгруппа из B индекса $r = (q-1)_{2'}$, g — инволюция из $G - B$ и f — элемент порядка r из $B \cap B^g$. Пусть Ω — множество правых смежных классов группы G по K, $h_i = f^i$ и $h_{r+i} = gf^i$, где $i \in \{0, \ldots, r-1\}$. Для каждого $t \in \{0, \ldots, 2r-1\}$ зададим бинарное отношение R_t на Ω, полагая $(Kx, Ky) \in R_t$ в том и только том случае, если $xy^{-1} \in Kh_tK$. Тогда $\mathcal{X} = (\Omega, \{R_0, R_1, \ldots, R_{2r-1}\})$ — шурова схема отношений, множество базисных отношений которой совпадает с набором орбиталов G на Ω, и числа пересечений c_{ij}^t, где $0 \le i,j,t \le 2r-1$, схемы $\mathcal{X}$ таковы:*

$$c_{ij}^t = \begin{cases} |U|, & \text{если } t \le r-1, i,j \ge r \text{ и } j-i \equiv t \pmod r, \\ (|U|-1)/r, & \text{если } i,j,t \ge r, \\ 1, & \text{если } t \le r-1, i,j \le r-1 \text{ и } i+j \equiv t \pmod r, \\ 1, & \text{если } i \le r-1, t,j \ge r \text{ и } j-i \equiv t \pmod r, \\ 1, & \text{если } t,i \ge r, j \le r-1 \text{ и } i+j \equiv t \pmod r, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Кроме того, для каждого $t \geq r$ граф $\Gamma(R_t)$ базисного отношения R_t схемы $\mathfrak{X}$ является антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра 3 с массивом пересечений

$$\{|U|, (|U|-1)(r-1)/r, 1; 1, (|U|-1)/r, |U|\},$$

где $|U| = q^2$ при $G = Sz(q)$ и $|U| = q^3$ при $G = {}^2G_2(q)$, при этом $\Gamma(R_r) \simeq \Gamma(R_t)$ и $\mathrm{Aut}(\Gamma(R_t)) = \mathrm{Aut}(G)$.

Список литературы

[1] Л.Ю. Циовкина. Некоторые шуровы схемы отношений, связанные с группами Судзуки и Ри. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН **25** (2019), no. 4, 249–254.

[2] L.Yu. Tsiovkina. Two new infinite families of arc-transitive antipodal distance-regular graphs of diameter three with $\lambda = \mu$ related to groups $Sz(q)$ and ${}^2G_2(q)$. J. Alg. Comb. **41** (2015), no. 4, 1079–1087.

Нильпотентные порождающие симплектической алгебры Ли

А.И. Чистопольская[1]

НИУ ВШЭ, Москва, Россия

achistopolskaya@gmail.com

Поиск минимального набора порождающих алгебры является важной и активно изучаемой задачей в теории алгебр Ли. В 1951 году Кураниши показал, что любая полупростая алгебра Ли над полем нулевой характеристики порождается двумя элементами. Через 25 лет Ионеску доказал, что если $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то для любого ненулевого элемента $X \in \mathfrak{g}$ найдётся такой элемент $Y \in \mathfrak{g}$, что X и Y порождают $\mathfrak{g}$. В 2009 году Боа доказал, что полупростая алгебра Ли над полем характеристики, отличной от 2 и 3, порождается двумя элементами, а также перенёс результат Ионеску на случай основного поля характеристики, отличной от 2 и 3.

В 2018 году мы получили аналог результата Ионеску для нильпотентных порождающих алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ над бесконечным полем характеристики, не равной 2. Я расскажу про случай симплектической алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{K})$ над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль.

Теорема. Для любого ненулевого нильпотентного элемента $X \in \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{K})$ найдётся такой нильпотентный элемент $Y \in \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{K})$, что X и Y порождают $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{K})$.

Список литературы

[1] A. Chistopolskaya. On nilpotent generators of the symplectic Lie algebra. Linear and Multilinear Algebra, accepted, arXiv: `math.RA/1908.04065` (2019).

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 19–11–00172.

Проективные гиперповерхности, допускающие аддитивное действие

А.А. Шафаревич[1]
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
shafarevich.a@gmail.com

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль и $\mathbb{G}_a$ — аддитивная группа поля $\mathbb{K}$. Мы будем говорить, что алгебраическое многообразие X над полем $\mathbb{K}$ размерности n допускает аддитивное действие, если на X существует регулярное действие группы $\mathbb{G}_a^n = \mathbb{G}_a \times \ldots \times \mathbb{G}_a$ с открытой орбитой. Обозначим через $\mathbb{G}_m$ мультипликативную группу поля $\mathbb{K}$. Многообразие X называется торическим, если на X существует регулярное действие группы $\mathbb{G}_m^n = \mathbb{G}_m \times \ldots \times \mathbb{G}_m$ с открытой орбитой. В работе [1] было дано описание полных торических многообразий, допускающих аддитивное действие.

В докладе будет рассказано про торические гиперповерхности, допускающие аддитивное действе, в частности, был получен следующий результат.

Теорема. Торическая гиперповерхность допускает аддитивное действие тогда и только тогда, когда это квадрика ранга 3 или квадрика ранга 4.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, E. Romaskevich. Additive actions on toric varieties. Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), no. 5, 1865–1879.

The Hochschild cohomology of the Chinese monoid algebra

H. Al Hussein
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
hassanalhussein2014@gmail.com

It is well known that the first cohomology group of an algebra is related to its derivations, and the elements of the second one describe its null extensions. Some believe that, in the theory of groups or algebras, we just need the first and the second groups of (co)homology, but it was shown that the elements of the third cohomology group can be applied to describe the obstacles to the construction of extensions. Homological algebra also introduces important numerical invariants in the group theory, e.g., (co)homological dimension and Euler characteristic. So we

[1]Работа сделана при поддержке гранта РНФ, грант no. 19–11–00172.

can say that homological methods allow us to get important information about the structure of an algebra.

The most important cohomology theory for associative algebras is the Hochschild cohomology. Given an associative algebra A over a field $\Bbbk$ and an A-bimodule W, the set of Hochschild cochains $C^m(A,W)$ consists of all linear maps $A^{\otimes m} \to W$, $m \geq 0$, and the mth Hochschild cohomology group is defined as $H^m(A,W) = \mathrm{Ker}\Delta_m/\mathrm{Im}\,\Delta_{m-1}$, where $\Delta_m\colon C^m(A,W) \to C^{m+1}(A,W)$ is the Hochschild differential

$$
\begin{aligned}
(\Delta_n f)(r_1,\dots,r_{n+1}) &= r_1 f(r_2,\dots,r_{m+1}) \qquad (1)\\
&+ \sum_{i=1}^{m}(-1)^i f(r_1,\dots,r_i r_{i+1},\dots,r_{m+1}) + (-1)^{m+1} f(r_1,\dots,r_m) r_{m+1},
\end{aligned}
$$

One of the most important features of the Hochschild cohomology groups is that the first one, $H^1(A,W)$, describes outer derivations from A to W. The elements of $H^2(A,W)$ are in one-to-one correspondence with the equivalence classes of null extensions

$$0 \to W \to E \to A \to 0, \quad W^2 = 0.$$

It is often a difficult problem to find the groups $H^m(A,W)$ for a given algebra A and an A-bimodule W. The first important step of solution is to find a long exact sequence of A-bimodules starting from A, a resolution of A. Next, one needs to calculate the derived functor to $\mathrm{Hom}(\cdot, W)$ to find the cohomology groups. The most natural resolution is known as the bar-resolution. It is easy to define but it is too bulky for the calculation of cohomologies. A smaller resolution was proposed by David J. Anick in 1986 [1]: he found a way to construct a free resolution for an associative algebra which is homotopy equivalent to the bar-resolution. The Anick resolution found numerous applications in combinatorial algebra, see [3]. This long exact sequence is more convenient for the calculation of cohomology groups, but the computation of differentials according to the original Anick algorithm described in [1] is extremely hard. In order to visualize the computation of differentials it is possible to use the discrete algebraic Morse theory based on the concept of a Morse matching (see, e.g., [6], [2]).

The Chinese monoid C_n appeared in the classification of monoids with the growth function coinciding with that of the plactic monoid. One of the motivations for study the Chinese monoid is based on the expectation that it might play a similar role as the plactic monoid in several aspects of representation theory, quantum algebras, and in algebraic combinatorics. If $n = 2$ then the Chinese and the plactic monoids coincide and both constructions are strongly related to

Young tableaux. Therefore, Chinese monoids are important in various aspects of representation theory, algebraic combinatorics, and in the area of classical Lie algebras [5].

In the present work, we apply the Morse matching theory to find the Anick resolution and calculate the groups of Hochschild m-cohomologies of the Chinese algebra $\Bbbk[C_n]$ for some $m \geq 1$ and some $n \geq 2$ with coefficients in various $\Bbbk[C_n]$-bimodules over a field $\Bbbk$ of characteristic zero. As an application, we derive explicit expressions for the Hilbert and Poincaré series of $\Bbbk[C_n]$. As a result of our computations, we can state the following hypothesis on the Poincaré series for $\Bbbk[C_n]$.

Conjecture. For every $n \geq 2$,

$$P_{\Bbbk[C_n]}(z) = (1+z)^n.$$

We prove the conjecture for $n = 2, 3$ and partially confirm for $n \leq 7$.

References

[1] D.J. Anick. On the homology of associative algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **296** (1986), no. 2, 641–659.
[2] V. Lopatkin. Cohomology rings of the plactic monoid algebra via a Gröbner–Shirshov basis. J. Algebra Appl. **15** (2016), no. 5, 1650082, 30 pp.
[3] V.A. Ufnarovsky. Combinatorial and asymptotic methods in algebra (in Russian). In: Current problems in mathematics. Fundamental directions **57** (in Russian), 5–177, Moscow, 1990.
[4] Yu. Bai, Yu. Chen. Gröbner–Shirshov bases for the Chinese monoid. J. Algebra Appl. **7** (2008), no. 5, 623–628, arXiv: `math.GR/0804.0972`.
[5] J. Cassaigne, M. Espie, D. Krob, J.C. Novelli, F. Hivert. The Chinese monoid. International Journal of Algebra and Computation **11** (2001), no. 3, 301–334.
[6] R. Forman. A user's guide to discrete Morse theory. Sem. Loth. de Comb. **48** (2002), Article B48c.

2-Local derivations on generalized Witt algebras

Sh.A. Ayupov[1], K.K. Kudaybergenov[2], B.B. Yusupov[1]
[1]**National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan,**
[2]**Karakalpak State University, Nukus, Uzbekistan**
sh_ayupov@mail.ru, karim2006@mail.ru, baxtiyor_yusupov_93@mail.ru

The notions of 2-local derivations and 2-local automorphisms on algebras were introduced in 1997 by Šemrl [9]. The main problems concerning the above notions are to find conditions on the underlying algebra under which every 2-local derivation (respectively, 2-local automorphism) on this algebra automatically becomes a derivation (respectively, automorphism), and also to present examples of algebras with 2-local derivations (respectively, 2-local automorphism) that are not derivations (respectively, not automorphism). In the present paper we consider such problem in the framework of Lie algebras. Let $\mathcal{L}$ be a Lie algebra. A *derivation* on a Lie algebra $\mathcal{L}$ is a linear map $D\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ which satisfies the Leibniz law, that is, $D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$ for all $x, y \in \mathcal{L}$. A map $\Delta\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (which is not assumed to be linear) is called a 2-*local derivation* if for every $x, y \in \mathcal{L}$, there exists a derivation $D_{x,y}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (depending on x, y) such that $\Delta(x) = D_{x,y}(x)$ and $\Delta(y) = D_{x,y}(y)$. The notion of 2-local automorphism is defined in a similar way. These problems have been solved in the finite dimensional case by Ayupov, Kudaybergenov and Rakhimov in [2] where they proved that every 2-local derivation on a finite-dimensional semi-simple Lie algebra over an algebraically closed field of characteristic zero is a derivation, and every finite-dimensional nilpotent Lie algebra with dimension larger than two admits a 2-local derivation which is not a derivation. Further in [1] it was proved that every 2-local automorphism on a finite-dimensional semi-simple Lie algebra $\mathcal{L}$ over an algebraically closed field of characteristic zero is an automorphism. Similar results concerning 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras were obtained in [3]. Recently, in [4] the authors studied 2-local derivations of infinite-dimensional Lie algebras over a field of characteristic zero and proved that all 2-local derivations of the Witt algebra as well as of the positive Witt algebra and the classical one-sided Witt algebra are (global) derivations.

In the present paper, we consider the above problem for a larger class of infinite dimensional Lie algebras. Namely, we show that all 2-local derivations on the algebras $W_n(\mathbb{F})$, $W = W(G, I)$ and $B(\mathbb{Z}^n, I)$ are derivations.

The proof of the main result is based on the following properties of the considered Witt algebras:

- these algebras are finitely generated;
- maximal Cartan subalgebras are finite-dimensional.

Our proof is essentially different from the proof for finite-dimensional semisimple Lie algebra. In the finite dimensional case one of the main ingredient of the proof was so-called non-degenerate Killing form. In the infinite-dimensional case the existence of non-degenerate Killing form on Lie algebras is not true in general. Moreover, in the reference [11] it is proved that any invariant symmetric bilinear form on simple generalized Jacobson-Witt algebras vanishes.

Generalized Witt algebras, over a field $\mathbb{F}$ of characteristic 0, were defined by Kawamoto in [8]. In [5] Dokovič and Zhao gave another equivalent definition of generalized Witt algebras. More detailed information concerning generalized Witt algebras one can find in the references [5], [6], [7], [8].

Let $\mathcal{A}$ be an abelian group, $\mathbb{F}$ be a field with $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$ and let T be a vector space over $\mathbb{F}$. The group algebra $\mathbb{F}\mathcal{A}$ of $\mathcal{A}$ over $\mathbb{F}$ generated by the basis elements t^J, $J \in \mathcal{A}$, and the multiplication of $\mathbb{F}\mathcal{A}$ is defined by $t^J t^K = t^{J+K}$. The unit of $\mathbb{F}\mathcal{A}$ is the element t^0.

Let us consider the tensor product

$$W = \mathbb{F}\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} T = \mathrm{span}_{\mathbb{F}} \left\{ t^J \otimes \partial : J \in \mathcal{A},\, \partial \in T \right\}.$$

The elements of W are also denoted as $t^J \otimes \partial := t^J \partial$. Now, if a given map $(\partial, J) \to \partial(J)\colon T \otimes A \to \mathbb{F}$ is $\mathbb{F}$-linear in the first variable and additive in the second variable, then the bracket

$$\left[t^J \partial_1, t^K \partial_2\right] := t^{J+K} \left(\partial_1(K)\partial_2 - \partial_2(J)\partial_1\right),\ J, K \in \mathcal{A}, \partial_1, \partial_2 \in T, \tag{1}$$

defines an infinite dimensional Lie algebra on the tensor product W. The Lie algebra W with the Lie multiplication (1) is called a generalized Witt algebra over the vector space T graded by the abelian group $\mathcal{A}$ (see [5]).

If $\mathcal{A}$ is the additive group of $\mathbb{Z}^n$ with $n > 0$, then the group algebra $\mathbb{F}\mathcal{A}$ is isomorphic to the Laurent polynomial algebra $\mathbb{F}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ over $\mathbb{F}$. For an n-tuple $J = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$ we write $t^J = t_1^{j_1} \dots t_n^{j_n}$. Let T be the linear span $T = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{F}\partial_i$ of the operators $\partial_i = t^i \dfrac{\partial}{\partial t_i}$. If the map $(\partial, J) \to \partial(J)\colon T \otimes \mathcal{A} \to \mathbb{F}$ satisfies $\partial_i(J) = j_i$ then the corresponding generalized Witt algebra $W = W_n(\mathbb{F})$ can be identified with the Lie algebra $\mathrm{Der}_{\mathbb{F}} \left(\mathbb{F}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]\right)$ of derivations of the Laurent polynomial algebra $\mathbb{F}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ over $\mathbb{F}$, consisting of the Laurent polynomial vector fields

$$w(J; i) = w(j_1, \dots, j_n; i) = t_1^{j_1} \dots t_n^{j_n} \frac{\partial}{\partial t_i},$$

where $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{F}^n$ are the canonical coordinates in $\mathbb{F}^n$. A Lie algebra which is isomorphic to the Lie algebra $W^n(\mathbb{F})$ of Laurent polynomial vector fields is called a Witt algebra over the vector space $\mathbb{F}^n$. The Lie algebra $W_n(\mathbb{F})$ has a basis $\{w(\mathbf{a}, i)\colon \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n,\ i \in I\}$ such that the multiplication rule (1) can be rewritten as

$$[w(\mathbf{a}, i), w(\mathbf{b}, j)] = \mathbf{a}_j w(\mathbf{a}+\mathbf{b}, i) - \mathbf{b}_i w(\mathbf{a}+\mathbf{b}, j), \tag{2}$$

where $i, j \in I$ and $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_i)$, $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i) \in \mathbb{Z}^n$ (see [8]).

Theorem. Any 2-local derivation Δ on $W_n(\mathbb{F})$ is a derivation.

References

[1] Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. 2-Local automorphisms on finite-dimensional Lie algebras. Linear Algebra Appl. **507** (2016), 121–131.
[2] Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, I.S. Rakhimov. 2-Local derivations on finite-dimensional Lie algebras. Linear Algebra Appl. **474** (2015), 1–11.
[3] Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, B.A. Omirov. Local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras. Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 2019, `https://doi.org/10.1007/s40840-019-00799-5`.
[4] Sh.A. Ayupov, B.B. Yusupov. 2-Local derivations of infinite-dimensional Lie algebras. Journal of Algebra and Its Applications, `doi.org/10.1142/S0219498820501005`.
[5] D. Dokoviȅ, K. Zhao. Derivations, isomorphisms and second cohomology of generalized Witt algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), 643–664.
[6] T. Ikeda. Projective double Lie algebras on a Lie algebra. In: Non-Associative Algebra and its Applications. Kluwer Academic Publishers, 1994, 183–187.
[7] T. Ikeda, N. Kawamoto. On the derivations of generalized Witt algebras over a field of characteristic zero. Hiroshima Math. J. **20** (1990), 47–55.
[8] N. Kawamoto. Generalizations of Witt algebras over a field of characteristic zero. Hiroshima Math. J. **16** (1986), 417–426 .
[9] P. Šemrl. Local automorphisms and derivations on $B(H)$. Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2677–2680.
[10] Y. Wang, H. Chen, J. Nan. 2-Local superderivations on basic classical Lie superalgebras. Journal of Mathematical Research with Applications **37** (2017), 527–534.
[11] P. Zusmanovich. Nonexistence of invariant symmetric forms on generalized Jacobson–Witt algebras revisited. Comm. Algebra **39** (2011), 548–554.

Pfaffians and hafnians as dihedral invariants

A.S. Dzhumadil'daev
Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan
dzhuma@hotmail.com

The determinant of a skew-symmetric matrix is a complete square. Namely, it vanishes if matrix has odd size and a square of pfaffian if size is even. Let $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ and n is even. Perfect matchings of complete graph K_n is a system consisting of $n/2$ edges such that no two different edges have common vertex and union of endpoints of edges cover whole set of vertices $[n]$. Let $\mathcal{M}_n$ is a set of perfect matchings. For a perfect matching $m = \{(i_1, j_1), \ldots, (i_{n/2}, j_{n/2})\} \in \mathcal{M}_n$, $i_1 < j_1, \ldots, i_{n/2} < j_{n/2}$, $i_1 < i_2 < \cdots i_{n/2}$, let us define its sign as a sign of the permutation $i_1 j_1 \ldots i_{n/2} j_{n/2} \in S_n$. This definition is correct: sign does not depend from permutation of edges. Let $\mathcal{M}_{n,0}$ and $\mathcal{M}_{n,1}$ are subsets of even and odd perfect matchings.

Let $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ be generic matrix. Let $a_m = a_{i_1,j_1} \ldots a_{i_{n/2},j_{n/2}}$ be Pfaff aggregate of $m \in \mathcal{M}_n$. Then pfaffian is defined as a polynomial with variables $a_{i,j}, 1 \le i < j \le n$, by the following way:

$$pf_n(A) = pf_{n,0}(A) - pf_{n,1}(A),$$

where

$$pf_{n,0}(A) = \sum_{m\in\mathcal{M}_{n,0}} a_m, \quad pf_{n,1}(A) = \sum_{m\in\mathcal{M}_{n,1}} a_m.$$

Similarly, hafnian is defined as signless version of pfaffian,

$$hf_n(A) = pf_{n,0}(A) + pf_{n,1}(A).$$

It is well known that the automorphism group of the graph K_n is isomorphic to the permutation group S_n and, moreover, S_n induces action on a set of perfect matchings $\mathcal{M}_n$. In terms of pfaffians and hafnians this fact gives us the following results.

If A is skew-symmetric, then a group of skew-symmetries of the pfaffian polynomial $pf_n(A)$ is isomorphic to S_n and pfaffian is a skew-symmetric invariant of permutation group. If A is symmetric, then a group of symmetries of the hafnian polynomial $hf_n(A)$ is isomorphic to S_n and pfaffian is a symmetric invariant of permutation group.

Theorem. *If A is symmetric matrix, then the group of symmetries of pfaffian polynomial $pf_n(A)$ is isomorphic to dihedral group D_n and the polynomial $pf_n(A)$*

is dihedral invariant,

$$\sigma(pf_n(A)) = pf_n(A), \quad \forall \sigma \in D_n.$$

If A is skew-symmetric matrix, then the group of skew-symmetries of hafnian polynomial $hf_n(A)$ is isomorphic to dihedral group D_n and the polynomial $hf_n(A)$ is skew-symmetric dihedral invariant,

$$\sigma(hf_n(A)) = sign\,\sigma\ hf_n(A), \quad \forall \sigma \in D_n.$$

Theorem. *Let $A = (b_{i,j}^2)_{1\le i,j\le n}$ be symmetric matrix constructed by generic skew-symmetric matrix $B = (b_{i,j})_{1\le i,j\le n}$. Then*

$$pf_n(A) = (-1)^{n/2} 2^{n/2-1} \prod_{1\le i\le n} b_{i,i+1}$$

if and only if $pf_4 B = 0$. Here we put $b_{n,n+1} = b_{n,1}$.

Theorem. *Let $\psi(x,y)$ be symmetric function and $\psi(x+k, y+k) = \psi(x,y)$ for any constant k. Let $A = (\psi(x_i, x_j))_{1\le i,j\le n}$. Then $pf_n(A)$ as polynomial on $x_1, \ldots, x_n$ is dihedral invariant such that*

$$pf_n(x_1, \ldots, x_{i-2}, x_i, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = c\, pf_{n-2}(x_1, \ldots, x_{i-2}, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

$1 \le i \le n$, where $c = \psi(0,0)$.

Let $A_{n,m}(x,y) = ((x_i - y_j)^m)_{1\le i,j\le n}$. G. Torelli calculated $det\, A_{n,m}$ for the case $m = n-1$. We calculate it in general case. Let $P_{n,m}$ be set of sequences $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, such that $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_n \le m+1-n$, and $\tilde{P}_{n,m}$ its subset of self-dual sequences, $\alpha_k + \alpha_{n+1-k} = m-n+1$, for any $1 \le k \le n$. For $\alpha \in P_{n,m}$ we define its dual $\tilde{\alpha}$ by $\tilde{\alpha}_i = m-n+1-\alpha_{n+1-i}$. We set

$$N_\alpha = (-1)^{\binom{n}{2}} (-1)^{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \prod_{i=1}^n \binom{m}{\alpha_i + i - 1}, \ \alpha \in P_{n,m},$$

$$\tilde{N}_\alpha = (-1)^{\binom{n/2}{2}} (-1)^{\sum_{i=1}^{n/2} \alpha_i} \prod_{i=1}^{n/2} \binom{m}{\alpha_i + i - 1}, \text{ if } n \text{ is even and } \alpha \in \tilde{P}_{n,m}\ .$$

Theorem. *For any non-negative integers n, m*

$$\det A_{n,m}(x,y) = \sum_{\alpha\in P_{n,m}} N_\alpha s_\alpha(x) s_{\tilde{\alpha}}(y) \prod_{1\le i<j\le n} (x_i - x_j)(y_i - y_j).$$

For even n and odd m,

$$pf\, A_{n,m}(x,x) = \sum_{\alpha \in \tilde{P}_{n,m}} \tilde{N}_\alpha s_\alpha(x) \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j).$$

Here by $s_\alpha(x)$ we denote Shur polynomial on variables $x_1, \ldots, x_n$.

Examples. $pf\ (\cos(x_i - x_j))_{1 \le i < j \le n} = \cos(x_1 - x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_n)$,

$$pf\ ((x_i - x_j)^2)_{1 \le i < j \le n} = (-1)^{n/2} 2^{n/2-1} (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \cdots (x_{n-1} - x_n)(x_n - x_1),$$

$$pf\ A_{n,n+1}(x,x) = \sum_{l=0}^{n/2} (-1)^l \prod_{i=0}^{n/2} \binom{n+1}{i} \frac{s_{1^{2l} 2^{n/2-l}}(x)}{\binom{n+1}{n/2-l}}.$$

$$det\ A_{n,n}(x,x) = c_n\, pf\ A_{n,n-1}(x) \cdot pf\ A_{n,n+1}(x),$$

where

$$c_n = (-1)^{\binom{n/2+1}{2}} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n/2-1} \frac{n}{n/2+1}.$$

In our talk we will discuss similar applications for hafnians also.

On the pronormality of subgroups of odd index in some direct products of finite groups

N.V. Maslova, D.O. Revin

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, Russia

butterson@mail.ru, danila.revin@gmail.com

Throughout the text we consider only finite groups, and thereby the term "group" means "finite group". Our terminology and notation are mostly standard and could be found, for example, in [1], [4].

A subgroup H of a group G is said to be *pronormal* in G if H and H^g are conjugate in $\langle H, H^g \rangle$ for each $g \in G$. Some of well-known examples of pronormal subgroups are the following: normal subgroups; maximal subgroups; Sylow subgroups; Sylow subgroups of proper normal subgroups; Hall subgroups of solvable groups.

In 2012, E. Vdovin and the second author [10] proved that the Hall subgroups (when they exist) are pronormal in all simple groups and, guided by the analysis in their proof, they conjectured that any subgroup of odd index of a simple group is pronormal in this group. This conjecture was disproved in [6], [7]. In [5], [6], [7],

[8] finite simple groups in which all the subgroups of odd index are pronormal were studied. A more detailed survey of investigations on pronormality of subgroups of odd index in finite (not necessary simple) groups can be found in survey papers [3], [9]. These surveys contain new results and some conjectures and open problems. One such open problem involves the classification of direct products of nonabelian simple groups in which the subgroups of odd index are pronormal. Note that there are examples of nonabelian simple groups G such that all the subgroups of odd index are pronormal in G, but the group $G \times G$ contains a non-pronormal subgroups of odd index (see [2, Proposition 1]).

We prove the following theorem.

Theorem. Let $G = \prod\limits_{i=1}^{t} G_i$, where for each $i \in \{1, ..., t\}$, $G_i \cong Sp_{n_i}(q_i)$ for odd q_i. Then the following statements are equivalent:

(1) all the subgroups of odd index are pronormal in G;

(2) for each $i \in \{1, ..., t\}$, all the subgroups of odd index are pronormal in G_i;

(3) for each $i \in \{1, ..., t\}$, if $q_i \equiv \pm 3 \pmod 8$, then n_i is either a power of 2 or is a number of the form $2^w(2^{2k} + 1)$.

Moreover, guided by the analysis in the proof of the Theorem we conclude that deciding of pronormality of a subgroup H of odd index in the direct product

$$G = \prod_{i=1}^{t} Sp_{n_i}(q_i)$$

of symplectic groups over fields of odd characteristics is reducible to deciding of pronormality of some subgroup H_1 of odd index in some group

$$K \leq \prod_{i=1}^{t} \mathbb{Z}_3 \wr Sym_{n_i} = L$$

such that $H_1 \leq K \leq L$ and H_1 projects onto $\prod\limits_{i=1}^{t} Sym_{n_i}$. Thus, additionally we obtain a criterium of pronormality of such a subgroup in such a group.

This work was supported by the Russian Science Foundation (project 19–71–10067).

References

[1] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. Atlas of finite groups. Clarendon Press, Oxford, 1985.

[2] W. Guo, N.V. Maslova, D.O. Revin. On the pronormality of subgroups of odd index in some extensions of finite groups. Siberian Math. J. **59** (2018), no. 4, 610–622.

[3] W. Guo, N.V. Maslova, D.O. Revin. Pronormality and submaximal $\mathfrak{X}$-subgroups in finite groups. Communications in Mathematics and Statistics **6** (2018), no. 3, 289–317.
[4] P.B. Kleidman, M. Liebeck. The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
[5] A.S. Kondrat'ev, N.V. Maslova, D.O. Revin. On the pronormality of subgroups of odd index in finite simple groups. Siberian Math. J. **56** (2015), no. 6, 1101–1107.
[6] A.S. Kondrat'ev, N.V. Maslova, D.O. Revin. A pronormality criterion for supplements to abelian normal subgroups. Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.) **296** (2017), Suppl. 1, S145–S150.
[7] A.S. Kondrat'ev, N.V. Maslova, D.O. Revin. On the pronormality of subgroups of odd index in finite simple symplectic groups. Siberian Math. J. **58** (2017), no. 3, 467–475.
[8] A.S. Kondrat'ev, N.V. Maslova, D.O. Revin. On pronormal subgroups in finite simple groups. Doklady Mathematics **98** (2018), no. 2, 405–408.
[9] A.S. Kondrat'ev, N.V. Maslova, D.O. Revin. On the pronormality of subgroups of odd index in finite simple groups. In: C.M. Campbell, M.R. Quick, C.W. Parker, E.F. Robertson, C.M. Roney-Dougal, eds. Groups St Andrews 2017 in Birmingham, (Birmingham, 5th–13th August 2017), London Mathematical Society Lecture Note Series **455**, Cambridge University Press, Cambridge, 2019, 406–418.
[10] E.P. Vdovin, D.O. Revin. Pronormality of Hall subgroups in finite simple groups. Siberian Math. J. **53** (2012), no. 3, 419–430.

Nil Lie algebras of oscillating growth

V. Petrogradsky
University of Brasilia, Brasilia, Brazil
`petrogradsky@rambler.ru`

The Grigorchuk and Gupta–Sidki groups play fundamental role in modern group theory. They are natural examples of self-similar finitely generated periodic groups. The author constructed their analogue in case of restricted Lie algebras of characteristic 2 [3], Shestakov and Zelmanov extended this construction to an arbitrary positive characteristic [6].

In characteristic zero, similar examples of Lie algebras do not exist [1]. But there are analogues of the Grigorchuk and Gupta–Sidki groups in the world of Lie superalgebras of an arbitrary characteristic [4]. In these examples, $\operatorname{ad} a$ is nilpotent, a being even or odd with respect to $\mathbb{Z}_2$-grading as Lie superalgebras. This property is an analogue of periodicity of the Grigorchuk and Gupta–Sidki groups. So, we get an example of a nil finely-graded Lie superalgebra of slow polynomial growth, which shows that an extension of a theorem due to Martinez and Zelmanov [1] for the Lie superalgebras of characteristic zero is not valid.

The author constructed a family of 2-generated restricted Lie algebras of slow polynomial growth with a nil p-mapping, a field of positive characteristic being arbitrary. In particular, we obtain a continuum subfamily of nil restricted Lie algebras having Gelfand–Kirillov dimension one but the growth is not linear [5].

The present research is motivated by a recent construction of groups of oscillating intermediate growth [2], (where nothing is claimed on periodicity). Now, for any prime $p \geq 2$, we construct a family of 3-generated restricted Lie algebras of intermediate oscillating growth. We call them *Phoenix algebras* because, for infinitely many periods, the algebra is "almost dying" by having "almost linear" growth, more precisely, the lower Gelfand–Kirillov dimension is one. On the other hand, for infinitely many n the growth function behaves like $\exp(n/(\ln n)^\lambda)$, λ being a constant, for such periods the algebra is "resuscitating". These restricted Lie algebras have a nil p-mapping.

References

[1] C. Martinez, E. Zelmanov. Nil algebras and unipotent groups of finite width. Adv. Math. **147** (1999), no. 2, 328–344.

[2] M. Kassabov, I. Pak. Groups of oscillating intermediate growth. Ann. Math. (2) **177** (2013), no. 3, 1113–1145.

[3] V.M. Petrogradsky. Examples of self-iterating Lie algebras. J. Algebra **302** (2006), no. 2, 881–886.

[4] V. Petrogradsky. Fractal nil graded Lie superalgebras. J. Algebra **466** (2016), 229–283.

[5] V. Petrogradsky. Nil Lie p-algebras of slow growth. Comm. Algebra **45** (2017), no. 7, 2912–2941.

[6] I.P. Shestakov, E. Zelmanov. Some examples of nil Lie algebras. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **10** (2008), no. 2, 391–398.

Special Gelfand–Dorfman algebras and non-Koszulity of Gelfand–Dorfman operad

B. Sartayev
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
baurjai@gmail.com

A linear space V with two binary operations $\circ$ and $[\cdot,\cdot]$ is called *Gelfand–Dorfman algebra* if $\circ$ is a Novikov algebra and $[\cdot,\cdot]$ is a Lie algebra and additional identity holds:

$$b\circ[a,c]=[a,b\circ c]-[c,b\circ a]+[b,a]\circ c-[b,c]\circ a,$$

where *Novikov algebra* is a linear space with bilinear operation $\circ : A\times A\to A$, which satisfies the following identities:

$$(a\circ b)\circ c-a\circ(b\circ c)=(b\circ a)\circ c-b\circ(a\circ c),$$

$$(a\circ b)\circ c=(a\circ c)\circ b.$$

Denote by Pois the variety of all Poisson algebras, and let PoisDer stand for the variety of differential Poisson algebras with a derivation d. In [1], we determined a functor from PoisDer to GD corresponding to the following morphism of operads:

$$\begin{aligned}&\delta\colon \mathrm{GD}\to\mathrm{PoisDer},\\&x_1\circ x_2\mapsto x_1d(x_2),\\&[x_1,x_2]\mapsto\{x_1,x_2\}.\end{aligned}$$

Let us say that a GD-algebra A is *special* if there exists $V\in$ Pois such that A is a subalgebra of $V^{(\delta)}$.

Theorem 1. Let A be a special GD-algebra. Then every homomorphic image of A is special.

Therefore, the class of all special GD-algebras is a variety.

Theorem 2. Every 2-dimensional GD-algebra is special.

The variety of GD-algebras is defined by identities of degree 2 or 3. Therefore, the corresponding operad is a quadratic one [2]. The Koszul dual operad $\mathrm{GD}^!$ is generated by two operations $\mu^\vee(x_1,x_2)=x_1*x_2$ and $\nu^\vee(x_1,x_2)=x_1\star x_2$, where

$$x*y=y*x,\quad x*(y*z)=(x*y)*z,$$

i.e., $*$ is associative and commutative,

$$(x\star y)\star z-x\star(y\star z)=(x\star z)\star y-x\star(z\star y),$$

$$x \star (y \star z) = y \star (x \star z),$$

i.e., $\star$ is a right Novikov product, and

$$x \star (y * z) = (x \star y) * z,$$

$$x \star (y * z) + y \star (x * z) = (x * y) \star z.$$

By using a method in [3] we proved the following theorem.

Theorem 3. The operad GD (and $GD^!$) is not Koszul.

References

[1] P. S. Kolesnikov, B. Sartayev, A. Orazgaliev. Gelfand–Dorfman algebras, derived identities, and the Manin product of operads. J. Algebra **539** (2019), 260–284.

[2] V. Ginzburg, M. Kapranov. Koszul duality for operads. Duke Math. J. **76** (1994), no. 1, 203–272.

[3] A.S. Dzhumadil'daev, P. Zusmanovich. The alternative operad is not Koszul. Experimental Mathematics **20** (2011), no. 2, 138–144.

Содержание

Для заметок

Научное издание

Восьмая школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов,

Москва, Россия
27 января – 1 февраля 2020 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка в пакете LaTeX, макет М.В. Игнатьев

Подписано в печать 20.01.2020.
Гарнитура Times New Roman. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Печать оперативная. Усл.-печ. л. 5,5.
Тираж 130 экз.

Отпечатано в типографии «Белый ветер»
г. Москва, ул. Щипок, д. 28