Свободные пуассоновы и йордановы алгебры

Попов А.В.

Ульяновск

22 августа 2018 г.

Йордановы алгебры

Класс йордановых алгебр $\mathcal{J}ord$ определяется как многообразие алгебр, удовлетворяющих тождествам:

$$xy \equiv yx, \qquad x^2yx \equiv x^2(yx).$$

Пусть A — ассоциативная алгебра. Вводя новую операцию умножения $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, получаем йорданову алгебру $A^{(+)}$. Данная алгебра и ее подалгебры называются **специальными йордановыми алгебрами**. Йордановы алгебры, не являющиеся специальными, называются **исключительными**.

$\mathcal{S}Jord$ — класс всех специальных йордановых алгебр.
$\overline{\mathcal{S}Jord}$ — класс всех специальных йордановых алгебр и их гомоморфных образов.
Имеет место очевидное вложение классов:

$$\mathcal{S}Jord \subseteq \overline{\mathcal{S}Jord} \subseteq \mathcal{J}ord.$$

Алберт в 1934 г. привел пример исключительной йордановой алгебры A, т.е. $\mathcal{S}Jord \subset \mathcal{J}ord$.

В 1954 г. Кон привел примеры исключительных йордановых алгебр, являющихся гомоморфными образами специальных, т.е. $\mathcal{S}Jord \subset \overline{\mathcal{S}Jord}$.

В 1959 г. Алберт и Пейдж показали, что алгебра Алберта не является гомоморфным образом специальной йордановой алгебры, т.е. $\overline{\mathcal{S}Jord} \subset \mathcal{J}ord$.

В 1966 г. Глени нашел тождества 8 и 9 степени, выполненные в $\overline{\mathcal{S}Jord}$, но не в $\mathcal{J}ord$.

Конструкция Кантора

Алгебра Пуассона

P — алгебра Пуассона, если на ней заданы две билинейные операции $\cdot$ и $\{,\}$ такие, что:
1. $\langle P, \cdot \rangle$ — ассоциативная коммутативная алгебра с 1;
2. $\langle P, \{,\} \rangle$ — алгебра Ли;
3. Операции $\cdot$ и $\{,\}$ связаны тождеством Лейбница
$\{x, y \cdot z\} = \{x, y\} \cdot z + y \cdot \{x, z\}$.

Конструкция Кантора $K(P)$

[a]Пусть P — алгебра Пуассона. Обозначим $\bar{P}$ копию пространства P с противоположными четностями. Тогда $K(P) = P \oplus \bar{P}$. Умножение $*$ на $K(P)$ для однородных элементов f, g задается формулами:

$$a * b = a \cdot b, \quad f * \bar{g} = \overline{(f \cdot g)}, \quad \bar{f} * \bar{g} = \{f, g\}.$$

$K(P)$ — йорданова супералгебра, т.е. $G(K(P))$ — йорданова алгебра. Более того, $G(K(P)) \in \overline{SJord}$ [b].

[a] Kantor I.L. Connection between Poisson brackets and Jordan and Lie superalgebras. // in Lie Theory, Differential Equations and Representation Theory, (Montreal, 1989), Univ. Montreal, Montreal

[b] Шестаков И.П. Квантования супералгебр Пуассона и специальность йордановых супералгебр пуассонова типа. // Алгебра и Логика, 1993. Т. 32:5, С. 571–584

Алгебры Пуассона

Пусть L — алгебра Ли, $S(L)$ — симметрическая алгебра пространства L.
На алгебре $S(L)$ можно ввести скобку Пуассона $\{a, b\}$, совпадающую на L с лиевским умножением.

Алгебра $S(L)$ имеет $\mathbb{Z}$-градуировку относительно ассоциативной операции умножения:

$$S(L) = S(L)_0 \oplus S(L)_1 \oplus \ldots$$

Через $S_d(L)$ обозначим усеченную алгебру $S(L)$, в которой $a_1 \cdots a_{d+1} = 0$ для любых $a_1, \ldots, a_{d+1} \in L$. Можно считать

$$S_d(L) = S(L)_0 \oplus \ldots \oplus S(L)_d .$$

Свободная алгебра Пуассона

Пусть $L[X]$ — свободная алгебра Ли со счетным множеством порождающих X.
Тогда $S(X) = S(L[X])$ — свободная алгебра Пуассона.

Введем обозначение P_n^{pois} для подпространства $S(X)$, образованного полилинейными элементами от порождающих $x_1, \ldots, x_n$.

Подпространство P_n^{pois}, образованное элементами степени k относительно операции $\cdot$, будем обозначать ${}^kP_n^{pois}$.

Конструкции $J(L)$ и $J_d(L)$

В йордановой алгебре $G(K(S_d(L)))$ выделим подалгебру

$$J_d(L) = 1 \otimes G_1 \oplus \left(S(L)_1 \otimes G\right) \oplus \ldots \oplus \left(S(L)_d \otimes G\right).$$

Введем обозначения:

$$J(L)_k^+ = S(L)_k \otimes G_0, \qquad J(L)_k^- = S(L)_k \otimes G_1,$$
$$J_d(L)^+ = J(L)_1^+ \oplus \ldots \oplus J(L)_d^+, \qquad J_d(L)^- = J(L)_1^- \oplus \ldots \oplus J(L)_d^-.$$

Тогда операция умножения $\circ$ в $J_d(L) = G_1 \oplus J_d(L)^+ \oplus J_d(L)^-$ задается правилами:

$$(a \otimes g) \circ h = a \otimes gh, \qquad \text{если } a \otimes g \in J_d(L)^+, h \in G_1,$$
$$(a \otimes g) \circ (b \otimes h) = ab \otimes gh, \qquad \text{если } a \otimes g \in J_d(L)^+ \text{ или } b \otimes h \in J_d(L)^+,$$
$$(a \otimes g) \circ (b \otimes h) = \{a, b\} \otimes gh, \qquad \text{если } a \otimes g, b \otimes h \in J_d(L)^-.$$

$\circ$	G_1	$J(L)_{k_2}^+$	$J(L)_{m_2}^-$
G_1	0	$J(L)_{k_2}^-$	0
$J(L)_{k_1}^+$	$J(L)_{k_1}^-$	$J(L)_{k_1+k_2}^+$	$J(L)_{k_1+m_2}^-$
$J(L)_{m_1}^-$	0	$J(L)_{m_1+k_2}^-$	$J(L)_{m_1+m_2-1}^+$

Многообразия $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}_d$

Пусть L — свободная алгебра Ли. Тогда $\mathcal{V}_d = \mathrm{var}\left(J_d\left(L\right)\right)$ (соответственно, $\mathcal{V} = \mathrm{var}\left(J\left(L\right)\right)$).

Введем обозначение для идеалов тождеств многообразий $\mathcal{V}_d$:

$$T_d = id\left(\mathcal{V}_d\right), \qquad T = id\left(\mathcal{V}\right).$$

Некоторые очевидные факты

1. Имеет место вложение многообразий $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{V} \subseteq \overline{SJord}$;
   Соответственно, $T_1 \supset T_2 \supset \ldots \supset T \supseteq id\left(\overline{SJord}\right)$.
   Гипотеза: $\mathcal{V} = \overline{SJord}$.
2. В многообразии $\mathcal{V}_d$ выполнено тождество
$$\left(x_1 y_1\right)\left(x_2 y_2\right)\cdots\left(x_{2d+1} y_{2d+1}\right) \equiv 0.$$

Теорема 1

Многообразие $\mathcal{V}_1$ порождается парой тождеств

$$\left(x_1 x_2\right)\left(y_1 y_2\right)\left(z_1 z_2\right) \equiv 0,$$
$$x^2 yx \equiv 0.$$

S-слова

Определение: Будем называть S-**словами** элементы $P_n(\mathcal{V}_1)$ вида

$$u = (\cdots)(\cdots)x_{i_1}(\cdots)\ldots x_{i_k}(\cdots)\widehat{x}_{i_{k+1}},$$

где $(\cdots)$ — подслова с левонормированной расстановкой скобок степени не меньше двух. При этом:

- Через $B(u)$ будем обозначать множество букв, расположенных в u:
  - в подсловах $(\cdots)$ четной степени на нечетных позициях начиная с 3-ей;
  - в подсловах $(\cdots)$ нечетной степени на 1, 2 и на четных позициях начиная с 4-ой;
- Через $\deg_s u$ будем обозначать количество подслов $(\cdots)$ четной степени;
- Для произвольного S-слова u обозначим через $R(u)$ множество букв, стоящих в u на первых позициях в подсловах $(\cdots)$ четной степени.

Замечания

1. если $\deg u = n$, то $\deg_s u \le N_n = \left[\frac{n+2}{3}\right]$;
2. если $\deg u = n$, $\deg_s u = l$, то $|B(u)| = \left[\frac{n-3l+2}{2}\right]$;
3. выбор множества $R(u)$ неоднозначен.

Определение: Линейная комбинация (ЛК) S-слов одинаковой степени и s-степени с одинаковыми множествами B называется S-**полиномом**.

Через $PS_n^l(B)$ будем обозначать соответствующее подпространство из S-полиномов.

Пусть R — подмножество $\{x_1, \dots, x_n\}$ из l элементов и S-полином f удовлетворяет следующим условиям:

- Для всех S-слов, образующих f можно выбрать $R(u) = R$;
- $Alt_{\{x_1,\dots,x_n\}\setminus(B\cup R)} f = \alpha \cdot f$ для $\alpha \neq 0$ [1].

Тогда через $PS_n^l(B, R)$ будем обозначать подпространство $PS_n^l(B)$ из S-полиномов, удовлетворяющих данным условиям.

Замечания

1. Обозначим $k = |B|$. Пространство $PS_n^l(B)$ наделяется структурой $\mathbb{F}S_k \times S_{n-k}$-модуля, если положить, что S_k действует на индексах букв из B, а S_{n-k} на $\{x_1, \dots, x_n\} \setminus B$;
2. Аналогично пространство $PS_n^l(B, R)$ наделяется структурой $\mathbb{F}S_k \times S_l \times S_{n-k-l}$-модуля, если положить, что S_k действует на B, S_l на R, а S_{n-k-l} на $\{x_1, \dots, x_n\} \setminus (B \cup R)$;

[1] Здесь Alt_K – оператор кососимметризации полинома f по буквам из K

Определение: Будем называть **элементарным** M-**полиномом** следующий полином из $P_n(\mathcal{V}_1)$:

$$f_k^M = Alt_{\{x_k, x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}} Alt_{\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}\}} \left(x_k x_{i_1} x_{j_1} x_{i_2} \cdots x_{j_{m-1}} x_{i_m} \widehat{x}_{j_m} \right), \tag{1}$$

где $i_1 = \min\{k, i_1, \ldots, i_m\}$.

При этом будем использовать обозачение $B\left(f_k^M\right)$ для множества $\left\{x_k, x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\right\}$.

Определение: Линейная комбинация элементарных M-полиномов одинаковой степени с одинаковыми множествами B называется M-**полиномом**.

Через $PM_n(B)$ будем обозначать соответствующее подпространство из M-полиномов.

Описание $P_n(\mathcal{V}_1)$

Теорема 2

Пусть $\mathscr{B}_n^l$ *— множество подмножеств множества* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *мощности* $\left[\frac{n-3l+2}{2}\right]$.
Тогда

$$P_n(\mathcal{V}_1) = \Big(\bigoplus_{\substack{l=0..N_n,\\ B\in\mathscr{B}_n^l}} PS_n^l(B)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{B\in\mathscr{B}_n^0} PM_n(B)\Big).$$

Теорема 3

Пусть характер $\mathbb{F}S_k \times S_l \times S_{n-k-l}$-модуля $PS_n(B,R)$ имеет разложение:

$$\chi_n^l(B,R) = \sum_{\substack{\lambda\vdash k,\\ \mu\vdash l}} m_{\lambda\mu}\cdot\chi_\lambda \boxtimes \chi_\mu \boxtimes \chi_{(1^{n-k-l})}.$$

Тогда характер $\mathbb{F}S_k \times S_{n-k}$-модуля $PS_n^l(B)$ имеет следующее разложение:

$$\chi_n^l(B) = \sum_{\substack{\lambda\vdash k,\\ \mu\vdash l}} m_{\lambda\mu}\cdot\chi_\lambda \boxtimes \chi_{(1^{n-k-l}|\mu)},$$

где $(1^m|\mu)$ — диаграмма Юнга, получаемая из μ добавлением слева столбца (1^m).

Связь $PS_n^0(B,R)$ и $PS_n^1(B,R)$ с ${}^1P_k^{pois}$

Всякий элемент алгебры $L[X]$ можно представить как ЛК мономов с левонормированной расстановкой скобок. Используя это обстоятельство, определим линейные отображения $\Psi_0^+ : {}^1P_k^{pois} \to PS_n^0(B) \oplus PM_n(B)$ (для $n = 2k-2$) и $\Psi_0^- : {}^1P_k^{pois} \to PS_n^0(B) \oplus PM_n(B)$ (для $n = 2k-1$), задав значения на мономах:

$$\Psi_0^+\left(x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(k)}\right) = (-1)^{\sigma}\, Alt_{\{z_1,\ldots,z_{k-2}\}} y_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} z_1 y_{\sigma(3)} \cdots z_{k-2} y_{\sigma(k)},$$

$$\Psi_0^-\left(x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(k)}\right) = (-1)^{\sigma}\, Alt_{\{z_1,\ldots,z_{k-1}\}} y_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} z_1 y_{\sigma(3)} \cdots z_{k-2} y_{\sigma(k)} z_{k-1}.$$

Отображения $\Psi_1^+ : {}^1P_{k+1}^{pois} \to PS_n^1(B,R) \oplus PM_n(\{z_1,\ldots,z_k,t_1\})$ (для $n = 2k+1$) и $\Psi_1^- : {}^1P_{k+1}^{pois} \to PS_n^1(B,R) \oplus PM_n(\{z_1,\ldots,z_k,t_1\})$ (для $n = 2k+2$) определяются по формулам:

$$\Psi_1^+(f)(y_1,\ldots,y_k,t_1,z_1,\ldots,z_k) = \\ = Alt_{\{z_1,\ldots,z_k\}} \Psi_0^+(f)(y_1,\ldots,y_k,t_1 z_k,z_1,\ldots,z_{k-1}),$$

$$\Psi_1^-(f)(y_1,\ldots,y_k,t_1,z_1,\ldots,z_{k+1}) = \\ = Alt_{\{z_1,\ldots,z_{k+1}\}} \Psi_0^-(f)(y_1,\ldots,y_k,t_1 z_{k+1},z_1,\ldots,z_k).$$

Связь $PS^l_n(B,R)$ с ${}^1P^{pois}_k$

При $l>1$ отображения $\Psi^+_l : {}^1P^{pois}_{k+l} \to PS^l_n(B,R)$ (для $n=2k+3l-2$) и $\Psi^-_l : {}^1P^{pois}_k \to PS^l_n(B,R)$ (для $n=2k+3l-1$) определяются по индукции:

$$\Psi^+_l(f)(y_1,\ldots,y_k,t_1,\ldots,t_l,z_1,\ldots,z_{k+2l-2}) =$$
$$= Alt_{\{z_1,\ldots,z_{k+2l-2}\}}\Psi^+_{l-1}(f)(y_1,\ldots,y_k,t_l z_{k+2l-2},t_1,\ldots,t_{l-1},z_1,\ldots,z_{k+2l-3}),$$

$$\Psi^-_l(f)(y_1,\ldots,y_k,t_1,\ldots,t_l,z_1,\ldots,z_{k+2l-1}) =$$
$$= Alt_{\{z_1,\ldots,z_{k+2l-1}\}}\Psi^-_{l-1}(f)(y_1,\ldots,y_k,t_l z_{k+2l-1},t_1,\ldots,t_{l-1},z_1,\ldots,z_{k+2l-2}).$$

Свойства отображений Ψ_l^+ и Ψ_l^-

Теорема 4

1. Отображения Ψ_l^+ и Ψ_l^- определены корректно;
2. Отображения Ψ_l^+ и Ψ_l^- биективны.

Рассмотрим пространство ${}^1P_{k+l}^{pois}$ как $\mathbb{F}S_k \times S_l$-модуль. Выполнено следующее свойство:

Теорема 5

Пусть характер $\mathbb{F}S_k \times S_l$-модуля ${}^1P_{k+l}^{pois}$ имеет разложение в сумму неприводимых:

$$\chi\left({}^1P_{k+l}^{pois}\right) = \sum_{\substack{\lambda\vdash k,\\ \mu\vdash l}} m_{\lambda\mu}\cdot\chi_\lambda\boxtimes\chi_\mu.$$

Тогда характер $\mathbb{F}S_k \times S_l \times S_{n-k-l}$-модуля $PS_n\left(B\right)$ имеет следующее разложение в сумму неприводимых:

$$\chi_n^l\left(B, R\right) = \sum_{\substack{\lambda\vdash k,\\ \mu\vdash l}} m_{\lambda\mu}\cdot\chi_{\lambda^*}\boxtimes\chi_\mu\boxtimes\chi_{\left(1^{n-k-l}\right)}.$$

Свойства отображений Ψ_l^+ и Ψ_l^-

Теорема 6

Пусть $f \in {}^1P_k^{pois}$. *Тогда имеет место граф следствий тождеств*

$$\begin{tikzcd} \Psi_0^+(f) \arrow[r] \arrow[d] & \Psi_1^+(f) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \Psi_k^+(f) \arrow[d] \\ \Psi_0^-(f) \arrow[r] & \Psi_1^-(f) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \Psi_k^-(f) \end{tikzcd}$$

Теорема 7

Для любых $f \in {}^1P_{k_1}^{pois}$ *и* $g \in {}^1P_{k_2}^{pois}$ *таких, что* $g \in id(f)$, *имеет место следующий граф следствий:*

$$\begin{tikzcd} \Psi_0^+(f) \arrow[r] \arrow[d] & \Psi_0^+(g) \arrow[d] \\ \Psi_0^-(f) \arrow[r] & \Psi_0^-(g) \end{tikzcd}$$

ω-индекс

Пусть L — свободная алгебра Ли. Обозначим через $\Phi^+(f)$ множество подстановок φ базисных элементов $J(L)$ в $f \in P_n(\mathcal{V})$ таких, что $\varphi(f) \in J^+(L)$ и $\varphi(f) \neq 0$.
Аналогично определяется $\Phi^-(f)$.

Определение: Пусть $f \in P_n(\mathcal{V})$. Тогда $\omega(f) := (n, m)$, где
$n = max\left\{ k | \forall\varphi \in \Phi^+(f) \quad \varphi(f) \in J(L)^+_k \oplus J(L)^+_{k+1} \oplus \ldots \right\}$;
$m = max\left\{ k | \forall\varphi \in \Phi^-(f) \quad \varphi(f) \in J(L)^-_k \oplus J(L)^-_{k+1} \oplus \ldots \right\}$;

Утверждение: Пусть $f(x_1, \ldots, x_{k_1})$ и $g(y_1, \ldots, y_{k_2})$ — полилинейные элементы из $\mathbb{F}\{X, V\}$ такие, что fg снова полилинейный элемент и буква z не в ходит в f и g. При этом $\omega(f) = (n_1, m_1)$, $\omega(g) = (n_2, m_2)$. Тогда:

1. $\omega(fx) = (min\{n_1 + 1, m_1\}, min\{n_1, m_1 + 1\})$;
2. $\omega(fg) = (min\{n_1 + n_2, m_1 + m_2 - 1\}, min\{n_1 + m_2, n_2 + m_1\})$;
3. Если $n = min\{n_2, m_2\}$, то $\omega\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, g, x_{i+1}, \ldots, x_{i_{k_1}}\right) = (n_3, m_3)$, где $n_3 \geq n_1 + n - 1$ и $m_3 \geq m_1 + n - 1$.

Очевидные следствия:

1. $\mathbb{F}\{X, \mathcal{V}_d\}$ состоит в точности из полиномов, у которых хотя бы одна из компонент ω-индекса меньше или равна d;
2. T_d состоит из T и полиномов, у которых обе компоненты ω-индекса больше d.

Тождества многообразия $\mathcal{V}_2$

Приведем неполный список тождеств, порождающих многообразие $\mathcal{V}_2$:

$$
\begin{gathered}
(x_1 y_1)(x_2 y_2)(x_3 y_3)(x_4 y_4)(x_5 y_5) \equiv 0, \\
(x_1 y_1)(x_2 y_2)(x_3 y_3)[(x_4 y_4)(x_5 y_5)] \equiv 0, \\
[(x_1 y_1)(x_2 y_2)][(x_3 y_3)(x_4 y_4)](x_5 y_5) \equiv 0, \\
x^2 yx (z_1 t_1)(z_2 t_2) \equiv 0, \\
x^2 yx [(z_1 t_1)(z_2 t_2)] \equiv 0, \\
x^2 yx \left(z^2 tz\right) \equiv 0, \\
(y_1 z_1)(y_2 z_2)(y_3 z_3) x^2 x \equiv 0, \\
yx^2 xz^2 z \equiv 0, \\
2z^2 tzxyx + z^2 tz \left(x^2 y\right) \equiv 0, \\
2(z_1 t_1)(z_2 t_2)(z_3 t_3) xyx + (z_1 t_1)(z_2 t_2)(z_3 t_3)\left(x^2 y\right) \equiv 0, \\
x^2 y_1 x y_2 (z_1 t_1)(z_2 t_2) \equiv 0, \\
x^2 y_1 x y_2 [(z_1 t_1)(z_2 t_2)] \equiv 0, \\
xzy^2 x^2 z^2 \equiv 0.
\end{gathered}
$$

$P_n(\mathcal{V}_2)$

Теорема 8

Пространство $P_n(\mathcal{V}_2)$ образовано ЛК элементов следующего типа:

1. M-полиномы;
2. S-полиномы;
3. Произведения S-полиномов, один из которых имеет ω-индекс $(1,2)$;
4. Произведения вида fx, где f — элемент типа 3;
5. Произведения S-полиномов ω-индекса $(1,2)$ на M-полином;
6. Произведения вида fx, где f — элемент типа 5;
7. Элементы вида $(fx)(gy)+(fy)(gx)$, где f и g — M-полиномы;
8. Произведения вида fx, где f — элемент типа 7;
9. Полиномы вида $f(xy)z+f(xz)y+f(yz)x \equiv 0$, где f — M-полином или буква.