САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

Седьмая школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов,

Самара, Россия
18–26 августа 2018 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

The Seventh School-Conference on

Lie Algebras, Algebraic Groups and Invariant Theory

Samara, Russia
August 18–26, 2018

ABSTRACTS

Инсома-пресс
Самара 2018

УДК 512.81+512.74+512.554.3
ББК 22.1
С28

С28 Седьмая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». Самара, Россия, 18–26 августа 2018 г. Тезисы докладов. — Самара: Изд-во «Инсома-пресс», 2018. — 56 с.

ISBN 978–5–4317–0300–3

Сборник содержит тезисы докладов участников Седьмой школы-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», проводившейся в Самаре с 18 по 26 августа 2018 года Самарским национальным исследовательским университетом имени академика С.П. Королева и Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова. Адресован научным работникам, преподавателям, студентам и аспирантам математических специальностей.

Организация и проведение школы-конференции были поддержаны грантом 18–01–20039–г Российского Фонда Фундаментальных Исследований.

УДК 512.81+512.74+512.554.3
ББК 22.1

ISBN 978–5–4317–0300–3

Предисловие

Седьмая школа-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» проходила в Самаре с 18 по 26 августа 2018 года. Её организаторами были Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева и Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. Информацию о предыдущих школах-конференциям см. на сайте `http://halgebra.math.msu.su/alg_conf/main.shtml`.

Программный комитет школы конференции: Э.Б. Винберг (МГУ им. М.В. Ломоносова, председатель), И.В. Аржанцев (НИУ ВШЭ), В.А. Артамонов (МГУ им. М.В. Ломоносова), Н.А. Вавилов (СПбГУ), М.Х. Гизатуллин (Самара), А.С. Клещёв (University of Oregon, США), А.Н. Панов (Самарский университет), В.И. Черноусов (University of Alberta, Канада), О.К. Шейнман (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН).

Организационный комитет школы-конференции: В.В. Сергеев (Самарский университет, председатель), И.В. Аржанцев (НИУ ВШЭ, зам. председателя), С.Я. Новиков (Самарский университет, зам. председателя), А.Н. Панов (Самарский университет, зам. председателя), М.В. Игнатьев (Самарский университет), В.В. Севостьянова (Самарский университет), Д.А. Тимашёв (МГУ им. М.В. Ломоносова), А.А. Шевченко (Самарский университет).

Участниками школы были студенты, аспиранты и молодые учёные из России и других стран. Им были прочитаны следующие лекционные курсы:

- *Группы автоморфизмов аффинных многообразий*
  (Иван Владимирович Аржанцев, НИУ ВШЭ, Россия);
- *Алгебры Гекке, бимодули Зоргеля и инварианты узлов*
  (Евгений Александрович Горский, University of California at Davis, США);
- *Максимальные подалгебры в исключительных алгебрах Ли над полями положительной характеристики*
  (Александр Аркадьевич Премет, University of Manchester, Великобритания);
- *Представления алгебраических групп и их алгебр Ли в положительной характеристике*
  (Дмитрий Анатольевич Румынин, University of Warwick, Великобритания);

- *Системы Калоджеро–Мозера и супералгебры Ли*
  (Александр Николаевич Сергеев, Саратовский государственный университет, Россия);

- *Бирациональные автоморфизмы алгебраических многообразий*
  (Константин Александрович Шрамов, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, НИУ ВШЭ, Россия).

Сборник содержит тезисы докладов участников школы-конференции, а также анонсы некоторых лекционных курсов.

Организация и проведение школы-конференции были поддержаны грантом 18–01–20039–г Российского Фонда Фундаментальных Исследований.

Оргкомитет

Группы автоморфизмов аффинных многообразий

И.В. Аржанцев
ФКН НИУ ВШЭ, Москва, Россия
arjantsev@hse.ru

С каждым алгебраическим многообразием связана его группа автоморфизмов, и возникающие так группы весьма разнообразны. Например, группы автоморфизмов проективного пространства, аффинного пространства и алгебраического тора — это группы принципиально разных типов. Для описания групп автоморфизмов аффинных многообразий в настоящее время разработано несколько эффективных методов. Изучению этих методов и посвящен данный курс.

В начале курса мы рассмотрим автоморфизмы аффинного пространства и связанные с ними нерешённые проблемы. Это знаменитая проблема якобиана, проблема сокращения, проблема линеаризации, проблема выпрямления, проблема ручных и диких автоморфизмов. Мы сформулируем эти проблемы и кратко обсудим их текущее состояние.

Известно, что связная линейная алгебраическая группа порождается своим максимальным тором и одномерными корневыми подгруппами. Это наблюдение использовано Демазюром (1970) для описания группы автоморфизмов компактного торического многообразия. В случае аффинного многообразия действию тора отвечает градуировка на алгебре регулярных функций, а действию корневой подгруппы — однородное локально нильпотентное дифференцирование. В курсе будут систематически изучаться градуированные аффинные алгебры и локально нильпотентные дифференцирования на них. Важную роль здесь играет понятие корня Демазюра градуированной алгебры. Также мы рассмотрим жесткие аффинные многообразия, охарактеризуем их группы автоморфизмов и получим классификацию аффинных алгебраических групп, которые реализуются как полные группы автоморфизмов аффинных многообразий.

На одной из лекций мы будем изучать группы автоморфизмов аффинных многообразий с точки зрения теории бесконечномерных алгебраических групп. Будут рассматриваться алгебраически порожденные группы и группы специальных автоморфизмов, гибкие многообразия и бесконечно транзитивные действия. На группах автоморфизмов будет введена ind-структура, определено понятие замкнутой подгруппы и изучены основные свойства замкнутых подгрупп. Мы приведем примеры вычислений замыканий подгрупп и обсудим некоторые наблюдения, касающиеся соответствия Ли в бесконечномерном случае.

В заключение мы планируем определить кольцо Кокса нормального алгебраического многообразия и показать, как теория колец Кокса позволяет сводить задачу описания группы автоморфизмов для достаточно широких классов многообразий к случаю аффинных многообразий или, более точно, к задаче описания группы однородных автоморфизмов определённых градуированных алгебр.

Список литературы

[1] S.S. Abhyankar, T.T. Moh. Embeddings of the line in the plane. J. Reine Angew. Math. **276** (1975), 148–166.

[2] I. Arzhantsev, U. Derenthal, J. Hausen, A. Laface. Cox rings. Cambridge Studies in Adv. Math. **144**, New York, 2015.

[3] I. Arzhantsev, H. Flenner, Sh. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. **162** (2013), 767–823.

[4] I. Arzhantsev, S. Gaifullin. The automorphism group of a rigid affine variety. Math. Nachrichten **290** (2017), no. 5–6, 662–671.

[5] D. Cox. The homogeneous coordinate ring of a toric variety. J. Algebraic Geometry **4** (1995), 17–50.

[6] M. Demazure. Sous-groupes algebriques de rang maximum du groupe de Cremona. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **3** (1970), 507–588.

[7] G. Freudenburg. Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations. Encyclopaedia Math. Sciences **136**, Springer, Berlin, 2006.

[8] H. Jung. Uber ganze birationale Transformationen der Ebene. J. Reine Angew. Math. **184** (1942), 161–174.

[9] H. Kraft. Challenging problems on affine n-space. Seminaire Bourbaki, Vol. 1994/95. Asterisque 237 (1996), Exp. No. 802, 5, 295–317.

[10] I.R. Shafarevich. On some infinite-dimensional groups. Rend. Mat. e Appl. (5) **25** (1966), 208–212.

[11] I.R. Shafarevich. On some infinite-dimensional groups II. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **45** (1981), 214–226.

[12] M. Suzuki. Proprietes topologiques des polynomes de deux variables complexes, et automorphismes algebriques de l'espace C^2. J. Math. Soc. Japan **26** (1974), 241–257.

[13] A. van den Essen. Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture. Progress in Math. **190**, Birkhauser Verlag, Basel, 2000.

[14] W. van der Kulk. On polynomial rings in two variables. Nieuw Arch. Wiskunde (3) **1** (1953), 33–41.

Коэффициенты Клебша–Гордана для алгебры $\mathfrak{gl}_3$ и гипергеометрические функции

Д.В. Артамонов
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
artamonov.dmitri@gmail.com

В 1963-м году в работе [1] Биденхарн и Бэрд привели построение базиса Гельфанда–Цетлина в конечномерном неприводимом представлении алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ и дали полный вывод формул для действия генераторов алгебры $\mathfrak{gl}_n$ в этом базисе.

При этом для случая $\mathfrak{gl}_3$ в [1] приведена очень интересная формула. Она может быть интерпретирована так. В реализации конечномерного неприводимого представления $\mathfrak{gl}_3$ на пространстве функций на группе GL_3 функция, соответствующая базисному вектору Гельфанда–Цетлина выражается через гипергеометрическую функцию Гаусса. Более того, в [1] намечен вывод формул для действия генераторов алгебры $\mathfrak{gl}_3$, основанный на использовании соотношений для этой гипергеометрической функции.

В докладе прежде всего будет дано более естественное представление для функции, соответствующей базисному вектору Гельфанда–Цетлина — через гипергеометрическую функцию Гельфанда–Капранова–Зелевинского. Используемая функция ГКЗ выражается через функцию Гаусса, так что это представление легко переводится в представление Биденхарна–Бэрда. Но представление именно через функцию ГКЗ оказывается чрезвычайно эффективным при решении задачи разложения тензорного произведения двух представлений на неприводимые, то есть нахождения коэффициентов Клебша–Гордана.

Основные шаги решения при вычислении коэффициентов Клебша–Гордана таковы.

1. Мы находим явные формулы для старших векторов неприводимых представлений, возникающих при разложении.

2. Мы берём один из таких векторов и находим результат применения к нему понижающих операторов. Таким образом, мы находим вид произвольного базисного вектора, лежащего в заданном неприводимом представлении, возникающем при разложении на неприводимые.

3. Разлагаем найденный вектор в сумму тензорных произведений базисных векторов в тензорных сомножителях.

Шаги 2 и 3 выполняются исключительно с помощью техники комплексного анализа. В частности, ключевую роль играет система Гельфанда–Капранова–

Зелевинского — система уравнений в частных производных, которой удовлетворяет функция ГКЗ. Также ключевую роль играют разложения этих функций в ряд вблизи сингулярного множества этой системы.

Задача вычисления коэффициентов Клебша-Гордана для $\mathfrak{gl}_3$ весьма важна в теории кварков. Поэтому имелись многочисленные работы, где вычислялись эти коэффициенты в тех или иных частных случаях, вычислялись разные производящие функции для них. Однако явная, замкнутая, обозримая формула для коэффициентов Клебша–Гордана для $\mathfrak{gl}_3$ до сих пор отсутствовала.

Список литературы

[1] G.E. Biedenharn, L.C. Baird. On the representations of semisimple Lie Groups II. J. Math. Phys. **4** (1963), no. 12, 1449–1466.

Деавтономизация кластерных интегрируемых систем

М.А. Берштейн

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Сколтех, НИУ ВШЭ, Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия

mbersht@gmail.com

Доклад основан на совместных работах с П. Гавриленко и А. Маршаковым [1] и [2].

Следуя работам [4] и [3], кластерные интегрируемые системы строятся по выпуклым многоугольникам Δ на решетке. Фазовым пространством системы является X-кластерное многообразие, скобка Пуассона является квадратичной и строится по колчану $\mathcal{Q}$. Количество коммутирующих гамильтонианов равно число целых точек внутри многоугольника Δ, количество элементов Казимира на три меньше числа целых точек на границе Δ.

С каждой кластерной интегрируемой системой связана некоторая дискретная группа $G_{\mathcal{Q}}$ — группа дискретных потоков (сохраняющая колчан подгруппа в группе, порождённой перестановками вершин и мутациями в вершинах). В случае, когда исходный многоугольник Δ имеет только одну целую внутреннюю точку, эта группа изоморфна расширенной аффинной группе Вейля.

После деавтономизации гамильтонианы начинают зависеть от времени и перестают сохраняться под действием дискретных потоков. При этом симметрия группы $G_{\mathcal{Q}}$ приводит к q-разностным уравнения Пенлеве.

Другим результатом является (гипотетическая) формула для решений этих уравнений при помощи объектов теории представлений — конформных блоков для q-деформированных вертексных алгебр.

Список литературы

[1] M. Bershtein, P. Gavrylenko, A. Marshakov. Cluster integrable systems, q-Painlevé equations and quantization. JHEP **02** (2018), 077, arXiv: `physics.math-ph/1711.02063`.
[2] M. Bershtein, P. Gavrylenko, A. Marshakov. Cluster Toda chains and Nekrasov functions, arXiv: `physics.math-ph/1804.10145`.
[3] V. Fock, A. Marshakov. Loop groups, clusters, dimers and integrable systems. In: L.A Consul, J.E. Andersen, I. Mundet i Riera (eds.). Geometry and quantization of moduli spaces. Birkhäuser, 2016, 1–65, arXiv: `math.AG/1401.1606`.
[4] A.B. Goncharov, R. Kenyon. Dimers and cluster integrable systems. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **46** (2013), no. 5, 747–813, arXiv: `math.AG/1107.5588`.

О структуре пространств параболических форм

Г.В. Воскресенская
Самарский университет, Самара, Россия
galvosk@mail.ru

Доклад основан на работах автора [4], [5].

Хорошо известна классическая теорема о том, что любая параболическая форма является произведением дельта-функции на модулярную форму меньшего веса. Эта идея может эффективно использоваться для изучения пространств высших уровней.

Пусть V — пространство модулярных форм. Рассматриваются подпространства вида $U = f(z)W$, где $f(z)$ — некоторая модулярная форма, а W — некоторое другое пространство модулярных форм. Функция $f(z)$ называется рассекающей, говорят, что имеет место точное рассечение пространства U функцией $f(z)$. Интересна роль таких подпространств в структуре пространства V. Для проведения исследований необходимо, чтобы дивизор рассекающей функции был хорошо известен. Поэтому важную роль играют эта-частные и эта-произведения, дивизор которых сосредоточен в параболических вершинах. Классическая дельта-функция является одной из 28 эта-произведений с мультипликативными коэффициентами Фурье, которые были открыты Дж. МакКеем в 1985 году (функции МакКея) [3]. Они в каждой параболической вершине имеют порядок 1. Для вычисления порядков эта-частных в параболических вершинах используется формула Антонии Биаджиоли [1], открытая в 1990 году. Размерности пространств вычисляются по формуле Коэна–Остерле [2].

Теорема 1. Пусть χ — квадратичный характер по модулю $N \neq 3,\ 17,\ 19$ такой, что $\chi(-1) = -1$, $k,\ l$ — натуральные числа. Тогда

$$S_k(\Gamma_0(N), \chi^k) = f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N), \chi^{k-l}),$$

где $f(z) \in S_l(\Gamma_0(N), \chi^l)$, в том и только в том случае, когда $f(z)$ — мультипликативное эта-произведение.

При $N = 3,\ 17,\ 19$ точное рассечение также имеет место, рассекающая функция не является эта-произведением, при этом должны выполняться условия

$$N = 17,\ k \equiv 2\ (4),\ k \geq 6,\ l = 2;$$
$$N = 19,\ k \equiv 2\ (6),\ k \geq 8,\ l = 2.$$

Теорема 2. Пусть $V = S_k(\Gamma_0(N), \chi),\ f(z) \in S_l(\Gamma_0(N), \psi),\ l \leq k, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — нули $f(z)$, включая параболические вершины. Тогда

$$S_k(\Gamma_0(N), \chi) = f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N), \chi \cdot \psi^{-1}) \oplus W,$$

где W — подпространство в V, состоящее из функций $g(z)$ таких, что

$$\exists j,\ 1 \leq j \leq s,\ \mathrm{ord}_{\alpha_j} g(z) < \mathrm{ord}_{\alpha_j} f(z).$$

Если такие функции не существуют, пространство W — нулевое, и имеет место точное рассечение.

Список литературы

[1] A.J.F. Biagioli. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function. Acta Arithm. **LIV** (1990), no. 4, 273–300.
[2] H. Cohen, J. Oesterle. Dimensions des espaces de formes modulaires. LNM **627** (1976), 69–78.
[3] D. Dummit, H. Kisilevsky, J. MacKay. Multiplicative products of η-functions. Contemp. Math. **45** (1985), 89–98.
[4] Г.В. Воскресенская. Разложение пространств модулярных форм. Мат. заметки **99** (2016), no. 6, 867–877.
[5] Г.В. Воскресенская. Точное рассечение в пространствах параболических форм с характерами. Мат. заметки **103** (2018), no. 6, 818–830.

Группы автоморфизмов жёстких аффинных многообразий с действием тора сложности один

С.А. Гайфуллин

МГУ им. М.В. Ломоносова, НИУ ВШЭ, Москва, Россия

sgayf@yandex.ru

Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраически замкнутое поле характеристики ноль. Рассмотрим неприводимое аффинное алгебраическое многообразие X над $\mathbb{K}$. Обозначим группу регулярных автоморфизмов многообразия X через $\mathrm{Aut}(X)$. Для произвольного многообразия X группа $\mathrm{Aut}(X)$ вообще говоря не является линейной алгебраической группой. Более точно, легко показать, что если на многообразии X есть нетривиальное регулярное действие группы $(\mathbb{K},+)$ и $\mathrm{dim}X \geq 2$, то $\mathrm{Aut}(X)$ не является линейной алгебраической группой. Многообразия, на которых нет нетривиальных $(\mathbb{K},+)$-действий, называются *жёсткими*. Таким образом, при $\dim X \geq 2$ жёсткость многообразия является необходимой для того, чтобы группа автоморфизмов была алгебраической, более того, в этом случае $\mathrm{Aut}(X)$ — это конечное расширение тора.

Требование жесткости многообразия не достаточно для алгебраичности $\mathrm{Aut}(X)$. Контрпримером может служить алгебраический тор $(\mathbb{K}^\times)^n$, группа автоморфизмов которого изоморфна $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \leftthreetimes (\mathbb{K}^\times)^n$. Однако примеров без непостоянных обратимых функций не известно. Следующий вопрос является открытым.

Вопрос. Верно ли, что группы автоморфизмов всех жёстких аффинных многообразий без непостоянных обратимых функций являются алгебраическими?

В докладе будет рассказано о решении этого вопроса для случая, когда X — нормальное многообразие с конечно порождённой группой классов дивизоров, допускающее действие алгебраического тора сложности один. В этом случае оказывается, что требование жёсткости является достаточным.

Теорема. Пусть X — жёсткое нормальное аффинное алгебраическое многообразие без непостоянных обратимых регулярных функций и с конечно порождённой группой классов дивизоров. Допустим, что X допускает действие алгебраического тора сложности один. Тогда группа регулярных автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ — это конечное расширение тора.

Основным техническим инструментом в доказательстве этой теоремы является реализация Кокса многообразия X. В работе [1] доказано, что тотальное координатное пространство $\overline{X}$ многообразия X задается системой триномиальных уравнений. Далее изучается многообразие $\overline{X}$, вид которого известен, и доказывается, что группа регулярных автоморфизмов многообразия $\overline{X}$ есть конечное расширение тора, что в частном случае триномиальной гиперповерхности без свободного члена сделано в работе [3]. В работе [2] доказано, что все автоморфизмы X поднимаются до автоморфизмов $\overline{X}$. Это завершает доказательство теоремы.

Список литературы

[1] J. Hausen, M. Wrobel. Non-complete rational T-varieties of complexity one. Math. Nachr. **290** (2017), no. 5–6, 815–826.

[2] И.В. Аржанцев, С.А. Гайфуллин. Кольца Кокса, полугруппы и автоморфизмы аффинных многообразий. Матем. сб. **201** (2010), no. 1, 1–21.

[3] I. Arzhantsev, S. Gaifullin. The automorphism group of a rigid affine variety. Math. Nachr. **290** (2017), no. 5–6, 662–671.

Два примера аффинных однородных многообразий

М.Х. Гизатуллин

Самара, Россия

gizmarat@yandex.ru

Речь идёт о двух многообразиях, ассоциированных с простыми исключительными группами типов E_6 и E_7. Эти многообразия однородны относительно действий соответствующих групп, более того, обладают гибкостью в смысле работы [1], где это свойство названо *flexibility*. У гибкого многообразия группа автоморфизмов бесконечномерная, в частности, она много шире выше отмеченной исключительной конечномерной подгруппы. В работе [2] доказывается, что эти группы автоморфизмов несвязны, точнее, предъявляются инволютивные автоморфизмы, не содержащиеся в связной компоненте единицы группы. Эти инволюции давно известны, одна открыта Фройденталем, другая — Брауном, но похоже, что их несвязанность с единичным элементом не привлекала внимания. Дополнительное свойство этих инволюций: они нормализуют максимальный тор группы автоморфизмов (этот тор также максимален в соответствующей простой группе), поэтому каждая из них определяет элемент группы Вейля для группы автоморфизмов. Здесь группа Вейля рассматривается как факторгруппа нормализатора тора по самому тору. Конечно, эта группа содержит в качестве подгруппы группу Вейля соответствующей исключительной линейной группы, поэтому объемлющая группа называется расширенной группой Вейля.

Для E_6 (соотв. E_7) многообразие определяется как дополнение в проективном пространстве $\mathbb{P}^{26}$ (соотв. $\mathbb{P}^{55}$) к множеству нулей специальной однородной формы F_3 третьей степени от 27 переменных, содержащей 45 одночленов (соотв. четвёртой степени F_4 от 56 переменных, содержащей 1036 одночленов). Число 27 (соотв. 56) переменных в форме связано с некоторой алгеброгеометрической комбинаторикой: 27 — число прямых на гладкой кубической поверхности (соотв. 56/2 — число двойных касательных к общей плоской кривой 4-го порядка), и эта связь используется при описании расширенной группы Вейля.

Хочу отметить, что моё внимание к кубической форме такого вида было привлечено на предыдущей нашей конференции на лекции Э.Б. Винберга, см. видеозапись [3] и финальную (после 43-й минуты) часть лекции. Там говорилось о *локальной транзитивности*, но было ясно, что речь идёт об однородности некоторого открытого по Зарисскому множества.

Что касается неисключительных групп, то в [2] рассматривается в качестве вводного модельного примера случай однородного пространства для группы A_n с нечётным n, соответствующей однородной формы (пфаффиана) и расширенной группы Вейля. Здесь тоже группа всех автоморфизмов однородного многообразия несвязна (при $n > 2$).

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Mathematical Journal **162** (2013), 767–823

[2] M. Gizatullin. Two examples of affine homogeneous varieties. European Journal of Mathematics (2018), `https://doi.org/10.1007/s40879-018-0228-y`.

[3] Э.Б. Винберг. Неабелевы градуировки простых алгебр Ли. Шестая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», лекция 3 от 4 февраля 2017 г., Москва, видеозапись `http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=16429`.

Полубесконечная конструкция твистованных представлений алгебры Динга–Йохара

Р.Р. Гонин
Факультет математики НИУ ВШЭ, Центр перспективных исследований, Сколтех, Москва, Россия
roma-gonin@yandex.ru

Доклад основан на незаконченной совместной работе с Михаилом Берштейном.

Полубесконечная конструкция — важный технический инструмент, успешно применяемый для построения и исследования представлений аффинных алгебр Ли [1]. Для аффинных квантовых групп $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ также имеется аналог (то есть q-деформация) полубесконечной конструкции (смотри, например, [1]). Известны некоторые обобщения для тороидальных алгебр ([3])

На алгебре Динга–Йохара $U_{q,t}(\hat{\hat{\mathfrak{gl}}}_1)$ действует группа $SL_2(\mathbb{Z})$. Поэтому любое представление M можно подкрутить на $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$ (то есть, прежде чем подействовать, мы теперь должны применить σ). Мы будем называть результат твистованным представлением M^σ. Наш интерес к полубесконечной конструкции для алгебры возник в связи с изучением явного действия образующих в твистованном фоковском модуле $\mathcal{F}^\sigma$.

При $q = t$ задача полностью решена. При общих значениях параметров разобран простейший нетривиальный случай. Мы ожидаем, что ответ будет выражаться через вертексные операторы $U_q(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$, где n — знаменатель тангенса угла наклона оси y после применения σ.

Список литературы

[1] V.G. Kac, A.Raina. Bombay lectures on highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras. Adv. Ser. Math. Phys. 2. World Scientific, 1987.
[2] M. Kashiwara, T. Miwa, E. Stern. Decomposition of q-deformed Fock spaces. Selecta Math. **1** (1996), 787.
[3] B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin. Quantum continuous $\mathfrak{gl}_\infty$: Semiinfinite construction of representations. Kyoto J. Math. **51** (2011), no. 2, 337–364.

Однородные локально нильпотентные дифференцирования триномиальных алгебр

Ю.И. Зайцева
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
yuliazaitseva@gmail.com

Доклад основан на совместной работе автора с С.А. Гайфуллиным, см. [2].

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль и R — алгебра над $\mathbb{K}$. Дифференцирование δ алгебры R называется локально нильпотентным, если для любого $f \in R$ существует такое натуральное число k, что $\delta^k(f) = 0$.

Пусть алгебра R градуирована абелевой группой K:

$$R = \bigoplus_{w \in K} R_w.$$

Дифференцирование δ называется однородным, если существует такой элемент $w_0 \in K$, что $\delta(R_w) \subseteq R_{w+w_0}$ для всех $w \in K$. Элемент w_0 называется степенью дифференцирования δ.

Эти алгебраические понятия имеют геометрическую интерпретацию. Обозначим через X неприводимое алгебраическое многообразие над $\mathbb{K}$, через $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$ — аддитивную группу поля $\mathbb{K}$. Известно, что локально нильпотентные дифференцирования алгебры $\mathbb{K}[X]$ регулярных функций на X биективно соответствуют регулярным $\mathbb{G}_a$-действиям на X. Пусть некоторый квазитор H действует на X. Этому действию соответствует градуировка группой характеров квазитора H. Можно доказать, что локально нильпотентное дифференцирование алгебры $\mathbb{K}[X]$ однородно относительно этой градуировки тогда и только тогда, когда соответствующее $\mathbb{G}_a$-действие нормализуется квазитором H. Описание однородных локально нильпотентных дифференцирований позволяет в некоторых случаях исследовать группу автоморфизмов многообразия, см., например, [1, Theorem 5.5].

Зафиксируем $n_0, n_1, n_1 \in \mathbb{N}$ и положим $n = n_0 + n_1 + n_2$. Зафиксируем также наборы $l_i = (l_{i_1}, \ldots, l_{i_{n_i}}) \in \mathbb{N}^{n_i}$, $i = 0, 1, 2$, и определим мономы

$$T_i^{l_i} = T_{i_1}^{l_{i_1}} \ldots T_{i_{n_i}}^{l_{i n_i}} \in \mathbb{K}[T_{ij} \mid i = 0, 1, 2,\ j = 1, \ldots, n_i].$$

Многочлен вида $g = T_0^{l_0} + T_1^{l_1} + T_2^{l_2} \in \mathbb{K}[T_{ij}]$ называется триномом, гиперповерхность $X(g) = \{g = 0\} \subset \mathbb{A}^n$ — триномиальной гиперповерхностью, алгебра $R(g) := \mathbb{K}[T_{ij}] \,/\, (g)$ регулярных функций на $X(g)$ — триномиальной алгеброй.

Мотивация к изучению триномов происходит из торической геометрии. Напомним, что сложностью действия называется коразмерность типичной орбиты. Нормальное многообразие является торическим, если оно допускает эффективное действие тора сложности нуль, то есть действие тора с открытой орбитой. Если X — торическое многообразие, то локально нильпотентные дифференцирования алгебры $\mathbb{K}[X]$, однородные относительно соответствующей данному действию градуировки, могут быть описаны в терминах корней Демазюра. Для многообразий X, допускающих действие тора сложности один, описание однородных локально нильпотентных дифференцирований на $\mathbb{K}[X]$ дано в работах Льендо в терминах собственных полиэдральных конусов.

Изучение торических многообразий связано с биномами. В то же время кольца Кокса устанавливают тесную связь между действиями тора сложности один и триномами. В частности, каждая триномиальная гиперповерхность $X(g)$ допускает действие тора сложности один. Оно соответствует «самой тонкой» градуировке триномиальной алгебры $R(g)$.

Я расскажу о том, что все однородные относительно этой градуировки локально нильпотентные дифференцирования триномиальной алгебры являются «элементарными» и могут быть явно описаны, см. [2, Theorem 1]. В статье [1, Theorem 4.3] это было доказано для примитивных дифференцирований, то есть для однородных дифференцирований со степенью, не лежащей в весовом конусе алгебры $R(g)$. В [3] этот результат получен для некоторого класса триномиальных алгебр $R(g)$, содержащего все нефакториальные триномиальные алгебры. В [2] оставшийся случай сводится к случаю $X = \{x + y + z^k = 0\}$.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, J. Hausen, E. Herppich, A. Liendo. The automorphism group of a variety with torus action of complexity one. Moscow Math. J. **14** (2014), no. 3, 429–471.

[2] S. Gaifullin, Yu. Zaitseva. All homogeneous locally nilpotent derivations of trinomial algebras are elementary. Preprint, 2018.

[3] Yu. Zaitseva. Homogeneous locally nilpotent derivations of non-factorial trinomial algebras, arXiv: `math.AG/1710.10610` (2017).

Метод орбит для бесконечномерных алгебр Ли

М.В. Игнатьев[1]
Самарский университет, Самара, Россия
mihail.ignatev@gmail.com

Обозначим через $\mathfrak{n}$ конечномерную нильпотентную алгебру Ли над полем комплексных чисел, а через $U(\mathfrak{n})$ — её универсальную обёртывающую алгебру. Идеал в $U(\mathfrak{n})$ называется примитивным, если он является аннулятором простого $\mathfrak{n}$-модуля. На множестве примитивных идеалов $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{n})$ вводится естественная топология Джекобсона. Классический метод орбит А.А. Кириллова [7] описывает неприводимые унитарные представления группы $N = \exp \mathfrak{n}$ в терминах коприсоединённых N-орбит на двойственном пространстве $\mathfrak{n}^*$. Алгебраическая версия этого метода [4] позволяет описать пространство примитивных идеалов в терминах этих же орбит.

А именно, для произвольной формы $\lambda \in \mathfrak{n}^*$ обозначим через $\mathfrak{p}$ какую-то её поляризацию — подалгебру в $\mathfrak{n}$, одновременно являющуюся максимальным изотропным подпространством относительно кососимметрической формы $x, y \in \mathfrak{n} \mapsto \lambda([x, y])$. Ограничение формы λ на $\mathfrak{p}$ является одномерным представлением этой подалгебры; обозначим через J аннулятор индуцированного $\mathfrak{n}$-модуля. Оказывается, идеал J примитивен и не зависит от выбора поляризации (обозначим его поэтому через $J(\lambda)$). Более того, любой примитивный идеал в $U(\mathfrak{n})$ имеет вид $J(\lambda)$ для некоторой формы λ, причём $J(\lambda) = J(\lambda')$ тогда и только тогда, когда коприсоединённые N-орбиты форм λ и λ' совпадают. Полученное отображение $\lambda \mapsto J(\lambda)$ называется отображением Диксмье; оно индуцирует гомеоморфизм между пространством орбит $\mathfrak{n}^*/N$ и пространством примитивных идеалов $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{n})$.

В докладе я расскажу, какие получены результаты в случае, когда $\mathfrak{n}$ — произвольная счётномерная локально нильпотентная алгебра Ли, а также рассмотрю некоторые специальные классы таких алгебр, для которых эти результаты удаётся усилить (так называемые цокольные алгебры Ли). Кроме того, я опишу картину для нильрадикалов расщепляющих борелевских подалгебр простых бесконечномерных алгебр Ли (точные определения см., к примеру, в [1], [2], [3]). Ранее частичные результаты для этих нильрадикалов были получены мной совместно с И. Пенковым [5], [6].

Доклад основан на совместной работе с А.В. Петуховым.

Список литературы

[1] A. Baranov. Finitary simple Lie algebras. J. Algebra **219** (1999), 299–329.

[1] Работа была выполнена в НИУ ВШЭ при поддержке РНФ, грант no. 16–41–01013.

[2] I. Dimitrov, I. Penkov. Weight modules of direct limit Lie algebras. Int. Math. Res. Notes **5** (1999), 223–249.
[3] I. Dimitrov, I. Penkov. Locally semisimple and maximal subalgebras of the finitary Lie algebras $\mathfrak{gl}(\infty)$, $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_\infty(\mathbb{C})$, and $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{C})$. J. Algebra **322** (2009), 2069–2081.
[4] J. Dixmier. Enveloping algebras. Grad. Stud. in Math. **11**. AMS, 1996.
[5] M.V. Ignatyev, I. Penkov. Infinite Kostant cascades and centrally generated primitive ideals of $U(\mathfrak{n})$ in types A_∞, C_∞. J. Algebra **447** (2016), 109–134, arXiv: `math.RT/1502.05486`.
[6] M.V. Ignatyev. Centrally generated primitive ideals of $U(\mathfrak{n})$ in types B and D. Transformation Groups, to appear, arXiv: `math.RT/1709.09543`.
[7] A.A. Kirillov. Lectures on the orbit method. Grad. Studies in Math. **64**. AMS, 2004.

Деформации пар клейновых особенностей

Д.С. Клюев
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
klyevdanya@yandex.ru

Доклад основан на работе автора [4].

Клейнова особенность — это аффинное многообразие, соответствующее алгебре $\mathbb{C}[x,y]^G$, где G — конечная подгруппа $SL(2,\mathbb{C})$, естественно действующая на $\mathbb{C}[x,y]$.

Действие G сохраняет степени однородных многочленов, поэтому алгебра $\mathbb{C}[x,y]^G$ градуирована.

Определение.

1. Пусть A — градуированная алгебра. Фильтрованная деформация алгебры A — это пара $(\mathcal{A},\chi)$, где $\mathcal{A}$ — фильтрованная алгебра, а $\chi\colon\ gr\,\mathcal{A}\to A$ — изоморфизм градуированных алгебр.

2. Пусть $A_2\subset A_1$ — вложение градуированных алгебр. Фильтрованная деформация вложения $A_2\subset A_1$ — это пара $(\mathcal{A}_2\subset\mathcal{A}_1,\chi)$, где $\mathcal{A}_2\subset\mathcal{A}_1$ — вложение фильтрованных алгебр, а $\chi\colon\ gr\,\mathcal{A}_1\to A_1$ — изоморфизм градуированных алгебр такой, что $\chi(gr\,\mathcal{A}_2)=A_2$

Понятие изоморфизма фильтрованных деформаций вводится естественным образом.

Классификация коммутативных фильтрованных деформаций клейновых особенностей — результат Брискорна [1]. Произвольные фильтрованные деформации были описаны Лосевым в работе [3].

В работе Кроули-Буви и Холланда [2] по элементу c центра групповой алгебры $\mathbb{C}[G]$ строится деформация $\mathcal{O}_c$ алгебры $\mathbb{C}[x,y]^G$. В работе [3] доказывается, что этим исчерпываются все фильтрованные деформации алгебры $\mathbb{C}[x,y]^G$.

Пусть $G_1 \triangleleft G_2$ — нормальное вложение конечных подгрупп $SL(2,\mathbb{C})$. В этом случае алгебра $\mathbb{C}[x,y]^{G_2}$ вложена в алгебру $\mathbb{C}[x,y]^{G_1}$.

Пусть c — элемент пересечения центров $Z(\mathbb{C}[x,y]^{G_1}) \cap Z(\mathbb{C}[x,y]^{G_2})$. В таком случае по c можно построить две алгебры Кроули-Буви–Холланда, $\mathcal{O}_c^1$, $\mathcal{O}_c^2$. Оказывается, алгебру $\mathcal{O}_c^2$ можно вложить в алгебру $\mathcal{O}_c^1$ и получившееся вложение вместе с $\chi\colon\ gr\,\mathcal{O}_c^1 \cong \mathbb{C}[x,y]^{G_1}$ является деформацией вложения $\mathbb{C}[x,y]^{G_2} \subset \mathbb{C}[x,y]^{G_1}$.

Основной результат заключается в следующем:

Теорема. Пусть $(\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1, \chi)$ — деформация вложения $\mathbb{C}[x,y]^{G_2} \subset \subset \mathbb{C}[x,y]^{G_1}$. Тогда существует элемент c алгебры $Z(\mathbb{C}[G_1]) \cap Z(\mathbb{C}[G_2])$ такой, что эта деформация изоморфна деформации $\mathcal{O}_c^2 \subset \mathcal{O}_c^1$.

Список литературы

[1] E. Brieskorn. Singular elements of semisimple algebraic groups, In: Actes Congres Int. Math. **2** (1970), Nice, 279–284.

[2] W. Crawley-Boevey, M.P. Holland. Noncommutative deformations of Kleinian singularities. Duke Math. J. **92** (1998), no. 3, 605–635.

[3] I. Losev. Deformations of symplectic singularities and orbit method for semisimple Lie algebras, arXiv: `math.RT/1605.00592`.

[4] D. Klyuev. Deformations of pairs of Kleinian singularities, arXiv: `math.RT/1805.08197`.

Об обобщённых конгруэнц-подгруппах

В.А. Койбаев

Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова, Владикавказ, Россия

`koibaev-K1@yandex.ru`

В Коуровской тетради [1, вопрос 15.46] сформулирован вопрос В.М. Левчука о допустимости (замкнутости) ковров (элементарных сетей). Этот вопрос (точнее, его SL-вариант) звучит следующим образом. Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ —

элементарная сеть (ковер) порядка $n \geq 3$ над полем K. Верно ли, что для допустимости ковра (элементарной сети) $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leq i \neq j \leq n$, необходимо и достаточно допустимости подковров (подсетей) $\begin{pmatrix} * & \sigma_{ji} \\ \sigma_{ij} & * \end{pmatrix}$ второго порядка (для любых $i \neq j$)? Этот вопрос тесно связан с вопросом справедливости равенства

$$E(\sigma) \cap \langle t_{ij}(K) \colon i, j \in J \rangle = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : i, j \in J \rangle, \tag{1}$$

где $\sigma = (\sigma_{ij})$ — замкнутая элементарная сеть степени $n \geq 3$ над полем K, $E(\sigma) = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) \colon 1 \leq i \neq j \leq n \rangle$ — элементарная сетевая подгруппа, $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, а через J обозначается подмножество множества I_n, при этом будем считать, что для числа $|J| = m$ элементов множества J выполнено условие $2 \leq m \leq n - 1$. Очевидно, что правая часть формулы (1) содержится в левой. В настоящей заметке для произвольного m, $2 \leq m \leq n - 1$, и произвольной коммутативной области целостности R (отличной от поля) мы строим неприводимую элементарную сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ порядка n над кольцом R, для которой левая часть формулы (1) не содержится в правой. Отметим, что при $m = 2$ мы получаем результат [2].

Напомним вначале известные определения, которыми мы пользуемся в настоящей заметке. Система аддитивных подгрупп $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$ кольца (поля) K называется *сетью* (*ковром*) порядка n над кольцом K, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Такая же система, но без диагонали, называется *элементарной сетью* (*элементарным ковром*) [3], [4]. Элементарную сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ мы называем *неприводимой*, если все σ_{ij} отличны от нуля. Назовем элементарную сеть σ *замкнутой* (*допустимой*), если элементарная сетевая подгруппа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций. Не умаляя общности, мы считаем, что $J = \{1, 2, \ldots, m\}$, $2 \leq m \leq n - 1$, далее, R — область целостности, которая не является полем, K — поле частных кольца R. Рассмотрим в R (и зафиксируем) произвольный необратимый элемент $x \in R \setminus R^*$ (в этом случай цепочка главных идеалов $(x) \supset (x^2) \supset (x^3) \ldots$ является строгой).

Приступим к построению искомой элементарной сети. Для главных идеалов $(x) = xR$, $(x^2) = x^2R$ мы рассматриваем неприводимую, дополняемую (в частности, замкнутую) элементарную сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$: для любых $i \neq j$ положим $\sigma_{ij} = (x^2)$ при $i, j \leq m$ и $\sigma_{ij} = (x)$ если $i > m$ или $j > m$.

Теорема. Пусть R — коммутативная область целостности, $1 \in R$, далее, $2 \leq m \leq n - 1$. Для построенной элементарной сети σ мы имеем

$$E(\sigma) \cap \langle t_{ij}(K) \colon i, j \in J \rangle \neq \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) \colon i, j \in J \rangle.$$

Точнее, левая часть формулы (1) не содержится в правой.

Работа выполнена в рамках темы НИР ЮМИ ВНЦ РАН.

Список литературы

[1] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Издание 17-е. — Новосибирск, 2010.

[2] V.A. Koibaev. On a question about generalized congruence subgroups. Журнал СФУ. Сер. Математика. Физика **11** (2018), no. № 1, 66–69.

[3] З.И. Боревич. О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями. Зап. науч. семинаров ЛОМИ **75** (1978), 22–31.

[4] В.М. Левчук. Замечание к теореме Л. Диксона. Алгебра и логика **22** (1983), no. 5, 504–517.

Унитарная K_1-группа алгебры срезанных многочленов

В.И. Копейко
Калмыцкий государственный университет им. Б.Б. Городовикова, Элиста, Россия
kopeiko52@mail.ru

В [1] для произвольного кольца R и целых $n \geq 0$, s была введена группа $CK_s(R)$, называемая (типичной) кривой степени n и определяемая как ядро (расщепляющегося) эпиморфизма $K_s(R[X]/(X^{n+1})) \to K_s(R)\colon \overline{X} \to 0$. Целью доклада является введение и рассмотрение унитарного K_1-аналога данной группы.

В докладе мы используем определения и обозначения унитарной K-теории [2]. Пусть (R, λ, Λ) — унитарное кольцо, где R — ассоциативное кольцо с 1, на котором задана инволюция $x \to \bar{x}$, λ — центральный элемент кольца R, удовлетворяющий условию $\lambda \cdot \bar{\lambda} = 1$, Λ — аддитивная подгруппа R такая, что $\Lambda_{min} = \{x - \lambda\bar{x}, x \in R\} \leq \Lambda \leq \Lambda_{max} = \{x \in R\colon x = -\lambda\bar{x}\}$, причем $\bar{x}\Lambda x \subseteq \Lambda$ для любого $x \in R$. Пусть $K_1U^\lambda(R, \Lambda)$ — унитарная K_1-группа унитарного кольца R. Продолжим тривиально инволюцию на алгебру многочленов $R[X]$: $\bar{X} = X$. Тогда для любого целого $n \geq 0$ главный двусторонний идеал (X^{n+1}) является инволютивным, пара $((X^{n+1}), (X^{n+1}) \cap \Lambda[X] = X^{n+1}\Lambda[X])$ является унитарным идеалом унитарного кольца $(R[X], \lambda, \Lambda[X])$ и мы можем рассмотреть унитарное кольцо $(R[X]/(X^{n+1}), \lambda, \Lambda[X]/X^{n+1}\Lambda[X])$. В дальнейшем $\overline{X}$ обозначает смежный класс X по идеалу (X^{n+1}). Определим (типичную) унитарную кривую $CK_1U^\lambda(R, \Lambda)$ степени n как ядро (расщепляющегося) эпиморфизма $K_1U^\lambda(R[X]/(X^{n+1}), \Lambda[X]/X^{n+1}\Lambda[X]) \to K_1U^\lambda(R, \Lambda)\colon \overline{X} \to 0$. Так как $K_1U^\lambda(R[X]/(X^{n+1}), \Lambda[X]/X^{n+1}\Lambda[X]) = K_1U^\lambda(R,\Lambda) \oplus CK_1U^\lambda(R,\Lambda)$, то изучение группы $K_1U^\lambda(R[X]/(X^{n+1}), \Lambda[X]/X^{n+1}\Lambda[X])$ сводится к изучению группы $CK_1U^\lambda(R,\Lambda)$, если мы знаем структуру группы $K_1U^\lambda(R,\Lambda)$. Нетрудно проверить, что гиперболический гомоморфизм $H\colon K_1(R[X]/(X^{n+1})) \to K_1U^\lambda(R[X]/(X^{n+1}), \Lambda[X]/X^{n+1}\Lambda[X])\colon [\alpha] \to [diag(\alpha, (\alpha^*)^{-1})]$ переводит группу $CK_1(R)$ в группу $CK_1U^\lambda(R,\Lambda)$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Группа $CK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ совпадает с образом $H(CK_1(R))$ относительно гиперболического гомоморфизма H.

В дальнейшем, для сокращения обозначений, группу

$$K_1U^\lambda(R[X]/(X^n), \Lambda[X]/X^n\Lambda[X])$$

мы будем записывать как $K_1U^\lambda(R[X]/(X^n), \Lambda[X]/X^n)$. Для произвольного натурального n определен естественный гомоморфизм групп

$$(i_n)^*\colon K_1U^\lambda(R,\Lambda) \to K_1U^\lambda(R[X]/(X^n),\ \Lambda[X]/X^n),$$

индуцированный вложением $i_n\colon R \to R[X]/(X^n)$. Как отмечено выше, $(i_n)^*$ является расщепляющимся мономорфизмом групп. Кроме того, так как $R[X]/(X^n)$ является свободным $R-$модулем ранга n, то определен трансфер $(i_n)_*\colon K_1U^\lambda(R[X]/(X^n), \Lambda[X]/X^n) \to K_1U^\lambda(R,\Lambda)$. Более точно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Для любого натурального n существует трансфер

$$(i_n)_*\colon K_1U^\lambda(R[X]/(X^n), \Lambda[X]/X^n) \to K_1U^\lambda(R,\Lambda)$$

такой, что композиция $(i_n)_* \circ (i_n)^*$ совпадает с $id + kH$, если $n = 2k+1$, и совпадает с kH, если $n = 2k$, где id обозначает тождественный гомоморфизм группы $K_1U^\lambda(R,\Lambda)$, kH обозначает k-кратное гиперболического гомоморфизма $H\colon K_1U^\lambda(R,\Lambda) \to K_1U^\lambda(R,\Lambda)$.

Построение трансфера и вычисление композиции проводятся аналогично соответствующим утверждениям из [3].

Автор поддержан грантом РФФИ (проект no. 16–01–00148).

Список литературы

[1] S. Bloch. Algebraic K-theory and crystalline cohomology. Publ. Math. IHES **47** (1977), 187–268.

[2] H. Bass. Unitary algebraic K-theory. Lecture Notes Math. **343** (1973), 57–265.

[3] В.И. Копейко. Трансфер унитарного K_1-функтора при полиномиальных расширениях колец. Алгебра и анализ **29** (2017), no. 3, 34–60.

О группах точек на абелевых многообразиях над конечным полем

Ю.С. Котельникова
НИУ ВШЭ, Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия
yuliakotelnikova@gmail.com

Доклад основан на работе автора [2] и посвящён вычислению групп точек на абелевых многообразиях размерности 3 над конечным полем.

Проективное алгебраическое многообразие с заданной на нём структурой абелевой группы называется абелевым многообразием. Интерес к группам точек на многообразиях над конечным полем возник в конце прошлого века (см. [5], [6], [7]). Совершенно новый взгляд на задачу предложил С. Рыбаков в [3], его результаты будут освещены в моем выступлении.

Если абелево многообразие A определено над конечным полем $\mathbb{F}_q$, то группа $A(\mathbb{F}_q)$ конечна. В частности, все точки суть точки кручения, поэтому удобным инструментом послужат модули Тейта. А именно, l-компонента группы $A(\mathbb{F}_q)$ как абелева группа равна коядру оператора $1 - \mathrm{Frob}$ на модуле Тейта $T_l(A)$.

Как вычислять коядро такого оператора с помощью теорем Р. Томпсона [4] и при чём здесь знаменитые соты А. Кнутсона и Т. Тао [1], я расскажу в своём докладе.

Список литературы

[1] A. Knutson, T. Tao. The honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products I: proof of the saturation conjecture. J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), 1055–1090.
[2] Yu. Kotelnikova. Groups of points on abelian threefolds over finite fields, in preparation.
[3] S. Rybakov. The groups of points on abelian varieties over finite fields. Cent. Eur. J. Math. **8** (2010), no. 2, 282–288, arXiv: `math.AG/0903.0106`.
[4] R. Thompson. Smith invariants of a product of integral matrices. Contemp. Math. **47** (1985), 401–435.
[5] M. Tsfasman. The group of points of an elliptic curve over a finite field. In: Theory of numbers and its applications. Tbilisi, 1985, 286–287.
[6] Ch. Xing. The structure of the rational point groups of simple abelian varieties of dimension two over finite fields. Arch. Math. **63** (1994), 427–430.
[7] Ch. Xing. On supersingular abelian varieties of dimension two over finite fields. Finite Fields Appl. **2** (1996), no. 4, 407–421.

Нерасщепимые торические коды

Д.И. Кошелев
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Московский физико-технический институт, Москва, Россия
dishport@yandex.ru

Имеется хорошо разработанная теория так называемых *торических кодов* [2, ch. 8], то есть алгеброгеометрических кодов [2, ch. 7] на торических многообразиях (размерности N над конечным полем $\mathbb{F}_q$). Данные коды были открыты Й. Хансеном в [4], [5] как обобщение кодов Рида–Соломона [1, ch. 10] (при $N = 1$). К сожалению, достаточно быстрые алгоритмы декодирования торических кодов неизвестны. Неэффективные представлены в [6, §5].

Кроме обычных (то есть расщепимых) алгебраических торов и торических многообразий также имеются нерасщепимые (над $\mathbb{F}_q$). Поэтому естественно рассматривать алгеброгеометрические коды в том числе и на последних. Мы называем их *нерасщепимыми торическими кодами*. Они обладают рядом преимуществ. Во-первых, группы $\mathbb{F}_q$-точек нерасщепимых торов часто оказываются циклическими, поэтому ожидается, что соответствующие коды также циклические [1, ch. 7]. Хорошо известно, что циклические коды могут быть декодированы достаточно быстро [10, §3.3.2]. Во-вторых, нерасщепимые торы содержат больше $\mathbb{F}_q$-точек, чем расщепимый, то есть больше, чем $(q-1)^N$. Другими словами, нерасщепимые торические коды длиннее расщепимых, поэтому они могут обладать лучшей корректирующей способностью. Наконец, многие классические коды, такие как дважды расширенные коды Рида–Соломона [3, §4.4.1], циклические [7] (или проективные [9]) коды Рида–Маллера, эквивалентны некоторым нерасщепимым торическим кодам.

Доклад основан на работе автора [8]. В нем будут даны эквивалентные определения, базовые свойства и полная классификация нерасщепимых торических кодов (с точностью до эквивалентности) на таких торических поверхностях, как $\mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и поверхности Хирцебруха $\mathbb{F}^m$, где $m > 0$. В частности, будут предъявлены явно заданные примеры новых циклических нерасщепимых торических кодов с точно вычисленными параметрами.

Список литературы

[1] F. MacWilliams, N. Sloane. The theory of error-correction codes. Amsterdam, North Holland Publishing, 1977.
[2] E. Martinez-Moro, C. Munuera, D. Ruano. Advances in algebraic geometry codes. Singapore, World Scientific Publishing, 2008.

[3] M. Tsfasman, S. Vladut, D. Nogin. Algebraic geometric codes: Basic notions. Providence, American Mathematical Society, 2007.
[4] J. Hansen. Toric surfaces and error-correcting codes. Coding Theory, Cryptography and Related Areas, 2000, 132–142.
[5] J. Hansen. Toric varieties, Hirzebruch surfaces and error-correcting codes. Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing **13** (2002), 289–300.
[6] D. Joyner. Toric codes over finite fields. Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing **15** (2004), 63–79.
[7] T. Kasami, S. Lin, W. Peterson. New generalizations of the Reed-Muller codes. Part I. Primitive Codes. IEEE Transactions on Information Theory **14** (1968), 189–199.
[8] D. Koshelev. Non-split toric codes. Preprint, available online at `https://www.researchgate.net/profile/Dima_Koshelev/contributions`, 2018.
[9] G. Lachaud. The parameters of projective Reed–Muller codes. Discrete Mathematics **81** (1990), 217–221.
[10] C. Tinnirello. Cyclic codes: Low-weight codewords and locators. PhD dissertation. University of Trento, Trento, 2016.

Фильтрованные обобщённые гамильтоновы алгебры Ли в характеристике 2

М.И. Кузнецов, А.В. Кондратьева, Н.Г. Чебочко
ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия
`kuznets-1349@yandex.ru, alisakondr@mail.ru, chebochko@mail.ru`

Строится комплекс симметрических дифференциальных форм в разделённых степенях над алгеброй разделённых степеней $A = \mathcal{O}(n, \overline{m})$ над алгебраически замкнутым полем F характеристики $p = 2$. Рассматриваются обобщённые гамильтоновы алгебры Ли $P = P(n, \overline{m}, \omega)$, состоящие из специальных дифференцирований алгебры разделённых степеней A, сохраняющих замкнутую невырожденную симметрическую дифференциальную 2-форму ω (в разделённых степенях) с коэффициентами из A. Авторы установили, что в случае, когда высоты переменных больше 1, фильтрованная алгебра Ли P изоморфна своей ассоциированной градуированной алгебре $P(n, \overline{m}, \omega(0))$. Получена полная система инвариантов невырожденных симметрических 2-форм с постоянными коэффициентами. Для случая, когда высоты переменных равны 1, найдены простейшие виды 2-форм с постоянными коэффициентами, которым соответствуют нетривиальные фильтрованные деформации градуированной обобщённой гамильтоновой алгебры Ли.

Полубесконечные соотношения Плюккера и модули Вейля

Е.А. Македонский
Киотский университет, Киото, Япония
rmakedonskii_e@mail.ru

Доклад основан на совместной работе автора с Евгением Фейгиным [1].

Классические соотношения Плюккера — это определяющие соотношения однородного координатного кольца многообразия флагов типа A_n. Это кольцо как представление группы изоморфно прямой сумме всех неприводимых представлений. Также оно изоморфно кольцу, порождённому некоторыми минорами матрицы из формальных переменных z_{ij}. Мы изучаем однородное кольцо полубесконечного многообразия флагов $\mathbb{W}$, которое является прямой суммой двойственных глобальных модулей Вейля. Мы определяем аналогичное кольцо миноров и доказываем, что оно изоморфно $\mathbb{W}$, находим определяющие соотношения этого кольца. Также мы находим формулу для характеров модулей Вейля в терминах таблиц Юнга.

Список литературы

[1] E. Feigin, I. Makedonskyi. Semi-infinite Pluecker relations and Weyl modules, IMRN, arXiv: math.RT/1709.05674.

Формула Ахиезера–Гичева–Казарновского и оценки сверху чисел Морса матричных элементов неприводимых представлений простых компактных связных групп Ли

М.В. Мещеряков
Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, Россия
mesh@math.mrsu.ru

На основе дифференциально-топологического подхода к анализу свойств матричных элементов вещественных неприводимых представлений связных компактных простых групп Ли G ранее были классифицированы их упругие представления [1], [2]. Оказалось, что только компактные группы Ли $O(n)$,

$U(n)$ и $Sp(n)$ в их стандартных представлениях реализуют упругие представления и минимальное число критических точек морсовских матричных элементов равно полному числу Бетти указанных групп G. Числа Морса матричных элементов остальных вещественных неприводимых представлений $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^N)$ строго больше полного числа Бетти группы G. Наша цель — указать оценки сверху на минимальное число критических точек морсовских матричных элементов из пространства матричных элементов $M(\rho)$ представления ρ в терминах старшего веса λ представления и геометрические характеристики группы Ли G, опираясь на интегрально-геометрические формулы работ [3], [4].

Функции из пространства матричных элементов $M(\rho_\lambda)$ представления со старшим весом λ суть собственные функции биинвариантного оператора Лапласа на G, принадлежащие собственному значению $E_\lambda = \langle \lambda+\delta, \lambda+\delta\rangle - \langle \delta, \delta\rangle$, где δ — полусумма положительных корней алгебры Ли группы G и $\langle\ ,\ \rangle$ — форма Картана–Киллинга.

Теорема. *Минимальное число критических точек $\gamma(\rho_\lambda)$ морсовских матричных элементов из пространства матричных элементов $M(\rho_\lambda)$ вещественного неприводимого представления $\rho_\lambda\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^N)$ связной компактной простой группы Ли G со старшим весом λ оценивается сверху числом $2/\sigma_n(E_\lambda/n)^{n/2}\mathrm{vol}(G)$, где σ_n — объём n-мерной сферы радиуса 1, $n = \dim G$, E_λ — собственное значение оператора Лапласа, отвечающее старшему весу λ, и $\mathrm{vol}(G)$ — объём группы Ли G относительно риманова элемента объема метрики Картана—Киллинга.*

Отметим, что правая часть неравенства $\gamma(\rho_\lambda) \leqslant 2/\sigma_n(E_\lambda/n)^{n/2}\mathrm{vol}(G)$ не зависит от нормировки метрики. Для односвязных групп Ли G серий A–D–E имеется [5] следующая формула объёма $\mathrm{vol}(G)$:

$$\mathrm{vol}(G) = (2\pi)^{r+k}(2h)^{n/2}f^{1/2}\left(\prod\nolimits_1^r m_i\right)^{-1},$$

где r — ранг группы G, k — число положительных корней, h — число Кокстера, f — индекс связности и m_i, $i = 1, \ldots, r$ — показатели группы G. При переходе к накрытиям объём делится на число листов накрытия. Несколько иная формула объёма для всех типов простых групп получена Кацем–Петерсоном. Именно:

$$\mathrm{vol}(G)^2 = (8\pi^2)^{\dim G}\prod\nolimits_{\alpha\in\Delta}\frac{\sin 2\pi\langle\delta,\alpha\rangle}{2\pi\langle\delta,\alpha\rangle},$$

где Δ — система корней группы G.

Замечания. 1) Указанная в теореме оценка точная и достигается на группах $SU(2)$ или $SO(3)$ в представлениях минимальной размерности.

2) В декабре 2017 года в тезисах конференции к 80-летию В.И. Арнольда Х. Кожасов [6] анонсировал следующий результат, касающийся точной оценки сверху числа критических точек $C_{d,n}(f)$ гармонических многочленов f на сфере S^{n-1}, отвечающих собственному значению $-\,d(d+n-2)$ сферического оператора Лапласа:

$$C_{d,n}(f) \leqslant 2[(d-1)^{n-1} + (d-1)^{n-2} + \cdots + (d-1) + 1].$$

Следствие. *При увеличении номера собственного значения биинвариантного оператора Лапласа на связной компактной простой группе Ли G число критических значений неограниченного возрастает.*

Следствие доказывает одну гипотезу Яо о числе критических точках собственных функций операторов Лапласа в рассматриваемом нами случае.

Список литературы

[1] C. Gorodski. Taut representation of compact simple Lie group. Illinois J. Math. **52** (2008), no. 1, 121–143.

[2] М.В. Мещеряков. Классификация упругих линейных неприводимых представлений компактных связных групп Ли. Четвёртая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». Москва, Россия. 27 января – 1 февраля 2014 г. Тезисы докладов. — М: Изд-во Московского университета, 2014. — с. 29.

[3] V.M. Gichev. Metric properties in the mean of polynomials on compact isotropy irreducible homogeneous spaces. Anal. Math. Phys. **3** (2013), no. 2, 119–144.

[4] D. Akhiezer, B. Kazarnovskii. On common zeros of eigenfunctions of the Laplace operator. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. **87** (2017), no. 1, 105–111.

[5] Н. Бурбаки. Группы и алгебры Ли, гл. IX. — М.: Мир, 1986.

[6] K. Kozhasov. On spherical harmonics with maximum number of critical points. International Conference “Contemporary Mathematics”. Moscow, Russia. December 18–23, 2017.

Полиномиальные алгебры Ли–Рейнхарта и рост бесконечномерных алгебр Ли

Д.В. Миллионщиков
Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
million@higeom.math.msu.su

Пусть R — коммутативное кольцо с единицей и A является коммутативной R-алгеброй. Пара $(A, \mathcal{L})$ называется алгеброй Ли–Рейнхарта, если

1) $\mathcal{L}$ является алгеброй Ли над кольцом R, которая действует слева на алгебре A дифференцированиями, то есть

$$X(ab) = X(a)b + aX(b), \forall a, b \in A, \forall X \in \mathcal{L};$$

2) алгебра Ли $\mathcal{L}$ является A-модулем.

При этом пара $(A, \mathcal{L})$ должна удовлетворять следующим условиям согласованности:

$$[X, aY] = X(a)Y + a[X, Y], \forall X, Y \in \mathcal{L}, \forall a \in A;$$
$$(aX)(b) = a(X(b)),\ \forall a, b \in A, \forall X \in \mathcal{L}.$$

В.М. Бухштабер предложил в [2], [3] изучать важный специальный подкласс градуированных алгебр Ли–Рейнхарта $(A, \mathcal{L})$, когда $A = R[t_1, t_2, \dots, t_p]$ является градуированной полиномиальной алгеброй над R такой, что

1) $\mathcal{L}$ является свободным левым модулем ранга N над $R[t_1, t_2, \dots, t_p]$.

2) $\mathcal{L} = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}_i$ является $\mathbb{Z}$-градуированной алгеброй Ли $[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] \subset \mathcal{L}_{i+j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, и её градуировка совместима с градуировкой алгебры $R[t_1, t_2, \dots, t_p]$:

$$p(t)L \in \mathcal{L}_{i+\deg(p(t))},\ \deg(L(q(t)) = \deg(q(t)) + i, L \in \mathcal{L}_i,$$

где $p(t), q(t)$ являются однородными полиномами $R[t_1, t_2, \dots, t_p]$ градуировок $\deg(p(t))$ и $\deg(q(t))$ соответственно. Градуировка алгебры $R[t_1, t_2, \dots, t_p]$ задается на образующих

$$\deg(t_1) = m_1, \dots, \deg(t_p) = m_p, m_i \in \mathbb{Z}.$$

Мы будем обсуждать рост подалгебр Ли (над R), порождённых базисом левого свободного модуля $\mathcal{L}$ над алгеброй $R[t_1, t_2, \dots, t_p]$. Скорость роста таких алгебр связана с интегрируемостью некоторых систем гиперболических уравнений в частных производных [3], [4].

Исследование выполнено за счёт гранта РНФ № 14–11–00414.

Список литературы

[1] G. Rinehart. Differential forms for general commutative algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 195–222.
[2] В.М. Бухштабер, Д.В. Лейкин. Полиномиальные алгебры Ли. Функц. анализ и его прил. **36** (2002), no. 4, 18–34.
[3] В.М. Бухштабер. Полиномиальные алгебры Ли и теорема Зельманова–Шалева. УМН **72** (2017), no. 6, 199–200.
[4] Д.В. Миллионщиков. Характеристические алгебры Ли уравнений Синус–Гордона и Цицейки. УМН **72** (2017), no. 6, 203–204.

$\mathbb{A}^1$-локальная замена мотивного пространства $Y/(Y-Z)$

А.А. Мингазов
Самара, Россия
mingazov88@gmail.com

В статье [1] построена $\mathbb{A}^1$-локальная замена в категории $SH^{\mathbb{A}^1}(k)$ для гладких многообразий, что позволяет, например, вычислять $\mathbb{A}^1$-гомотопические группы на спектрах полей в геометрических терминах. Более точно, для гладкого многообразия Y в геометрических терминах построено мотивное пространство $M_{fr}(Y)$ такое, что

$$Hom_{SH^{\mathbb{A}^1}(k)}(\Sigma^\infty_{\mathbb{G}}\Sigma^\infty_{S^1}X_+, \Sigma^\infty_{\mathbb{G}}\Sigma^\infty_{S^1}Y_+[n]) = Hom_{SH_{S^1}(k)}(\Sigma^\infty_{S^1}X_+, M_{fr}(Y)[n])$$

для всех $n \geq 0$.

В докладе будет рассказано об обобщении этого результата на случай, когда в качестве Y фигурирует не гладкое многообразие, а мотивное пространство $\dfrac{Y}{Y-Z}$, где Y — гладкое многообразие, $Z \subset Y$ — его замкнутое подмножество.

Список литературы

[1] G. Garkusha, I. Panin. Framed motives of algebraic varieties (after V. Voevodsky), arXiv: math.KT/1409.4372v4 (2018).

Алгебра и геометрия функций Уиттекера

С.В. Облезин[2].
Ноттингемский университет, Ноттингем, Великобритания
oblezin@gmail.com

Начиная с работ А. Сельберга, (некоммутативный) гармонический анализ является неотъемлемым инструментом современной теории чисел; при этом есть ряд специальных функций на группах, имеющих фундаментальное значение для теории автоморфных (модулярных) форм. Одним из примеров таких функций являются коэффициенты Фурье автоморфных форм на редуктивных группах; возникающие функции называются функциями Уиттекера. Новый интерес к функциям Уиттекера во многом связан с тем, что они являются производящими функциями квантовых когомологий многообразий флагов.

Доклад посвящен алгебраической конструкции функций Уиттекера для вещественных групп Ли, возникшей при работе над совместным проектом с А.А. Герасимовым и Д.Р. Лебедевым. Конструкция имеет ряд важных приложений к теории автоморфных форм и к зеркальной симметрии на многообразиях флагов. Случай группы $GL_n(\mathbb{R})$ разобран в [1], [2], и обобщен на произвольные редуктивные группы в [3].

§1. Пусть G — редуктивная вещественная группа Ли, $H \subset G$ — картановская подгруппа, $B_\pm \subset G$, $B_- \cap B_+ = H$ — пара борелевских подгрупп, отвечающих положительным и отрицательным корням соответствующей системы корней: $\Phi = \Phi_+ \sqcup \Phi_-$, и пусть $N_\pm \subset B_\pm$ — пара соответствующих (максимальных в G) унипотентных подгрупп таких, что $B_\pm = HN_\pm$. Пусть $W = W(\Phi) = N_G(H)/H$ — группа Вейля, порожденная отражениями s_i, $i \in I$, относительно простых корней $\alpha_i \in \Phi_+$, где I — множество вершин диаграммы Дынкина. Тогда, выбрав представителей $\dot{w} \in N_G(H)$ для всех $w \in W$, имеем разложение Брюа:

$$G = \coprod_{w\in W} B_-\dot{w}B_+ ,$$

и рассматриваем большую клетку в разложении, отвечающую $w = 1$:

$$G_0 = B_-N_+ = N_-HN_+ , \qquad \dim G_0 = \dim G . \tag{1}$$

Для общего характера (то есть тривиального на унипотентном

[2]Работа выполнена при частичной поддержке гранта РНФ 16–11–10075

радикале $N_- \subset B_-$)

$$\chi_\lambda \colon B_- \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \quad \chi_\lambda(an) = \prod_{i\in I} a_i^{\imath\lambda_i-\rho_i}, \quad a \in H,\, n \in N_-\,, \tag{2}$$

рассмотрим индуцированное (бесконечномерное) представление $(\pi_\lambda, \mathcal{V}_\lambda)$:

$$\begin{gathered} \mathcal{V}_\lambda = \mathrm{Ind}_{B_-}^G \chi_\lambda = \big\{ f \in \mathrm{Fun}(G)\colon f(bg) = \chi_\lambda(b) f(g)\,, \forall b \in B_- \big\}\,, \\ (\pi_\lambda(h)\cdot f)(g) = f(gh), \quad \forall f \in \mathcal{V}_\lambda\,; \end{gathered} \tag{3}$$

для общего $\lambda = (\lambda_i,\, i \in I) \in \mathbb{R}^{\mathrm{rk}(G)}$ представление $(\pi_\lambda, \mathcal{V}_\lambda)$ унитарно и неприводимо. Выберем теперь невырожденный характер

$$\psi \colon N_+ \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \quad \psi(n) = \prod_{i\in I} e^{n_i},$$

где n_i — i-я координата унипотентного элемента n, отвечающая простому корню α_i.

Определение: *Функцией Уиттекера* $\Psi_\lambda(g)$ *на группе* G *называется гладкая функция, удовлетворяющая следующему условию эквивариантности*:

$$\Psi_\lambda(bgn) = \chi_\lambda(b)\psi(n)\Psi_\lambda(g), \quad \forall b \in B_-, \quad \forall n \in N_+\,. \tag{4}$$

Функция (4) является матричным элементом оператора $\pi_\lambda(g)$ в представлении $\mathcal{V}_\lambda$:

$$\Psi_\lambda(g) = \big\langle \psi^\iota,\, \pi_\lambda(g)\cdot\psi \big\rangle_{\mathcal{V}_\lambda}\,, \tag{5}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}_\lambda}$ – невырожденное эрмитово скалярное произведение в $\mathcal{V}_\lambda$, а ψ^ι – характер N_-, определенный с помощью сплетающего автоморфизма:

$$\iota : N_- \longrightarrow N_+, \quad n \longmapsto \dot{w}_0 n \dot{w}_0^{-1}, \quad \psi^\iota(n) := \psi\big([n\dot{w}_0^{-1}]_+\big)\,; \tag{6}$$

здесь $[\cdot]_+$ — проекция на N_+ в разложении (1), а w_0 — элемент максимальной длины в W.

§2. Основой нашей конструкции является алгебраическое вычисление характеров ψ, ψ^ι с помощью обобщенных миноров. Пусть (π_i, V_i), $i \in I$ – набор фундаментальных представлений и пусть $\xi_i^+ \in V_i$ – набор векторов старшего веса; тогда $\xi_i^- = \dot{w}_0\xi_i^+$ – векторы младшего веса. Выбрав инвариантное эрмитово скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в каждом V_i, определим следующие обобщенные миноры группового элемента $g \in G$:

$$\Delta_i(g) = \langle \xi_i^-,\, \pi_i(g)\xi_i^+ \rangle\,, \qquad \Delta_i'(g) = \langle \xi_i^-,\, \pi_i(g)\dot{s}_i\xi_i^+ \rangle\,, \qquad i \in I\,. \tag{7}$$

Теорема, [3]. (i) *Унипотентные характеры* ψ, ψ^ι *имеют следующий вид*:

$$\psi(n) = \exp\Big\{\sum_{i\in I}\Delta'_i(n)\Big\}, \qquad \psi^\iota(n) = \prod_{i\in I}\Delta_i(n\dot{w}_0^{-1})^{(\imath\lambda-\rho,\,\alpha_i^\vee)}\exp\Big\{\frac{\Delta'_i(n\dot{w}_0^{-1})}{\Delta_i(n\dot{w}_0^{-1})}\Big\}. \tag{8}$$

(ii) *Ограничение* G*-функции Уиттекера* (4), (5) *на картановскую подгруппу* $H\subset G$ *обладает следующим интегральным представлением*:

$$\Psi_\lambda(e^x) = \int_C d\mu_{N_+}(v)\prod_{i\in I}\Delta_i(n\dot{w}_0^{-1})^{(\imath\lambda-\rho,\,\alpha_i^\vee)}\exp\Big\{\sum_{i\in I}\Big(\frac{\Delta'_i(n\dot{w}_0^{-1})}{\Delta_i(n\dot{w}_0^{-1})}-\Delta'_i(n)e^{(\alpha_i,x)}\Big)\Big\}; \tag{9}$$

здесь аргументом функции является $x\in\mathrm{Lie}(H)$, *интегрирование берется по подмногообразию* $C\subset N_+(\mathbb{C})$ *половинной размерности, а* $d\mu_{N_+}(v)$ *— ограничение на* $N_+(\mathbb{R})$ *меры Хаара на* G *с помощью* (1).

Интегральная формула (9) играет важную роль в теории представлений и имеет ряд замечательных приложений; в частности, при выборе в качестве $C\subset N_+(\mathbb{C})$ подмножества вполне положительных унипотентных матриц (9) обобщает интеграл Гивенталя для $GL_n(\mathbb{R})$ на случай остальных классических групп.

Список литературы

[1] A. Gerasimov et al. Liouville type models in the group theory framework I. Finite-dimensional algebras. Int. J. Mod. Phys. **A 12** (1997), no. 14, 2523–2583.

[2] A. Gerasimov, S. Kharchev, D. Lebedev, S. Oblezin. On a Gauss-Givental representation of quantum Toda chain wave function. Int. Math. Res. Notices, 2006, Article ID 96489, см. также arXiv: `math/0505310` (2005).

[3] А.А. Герасимов, Д.Р. Лебедев, С.В. Облезин. Новые интегральные представления функций Уиттекера для классических групп Ли. УМН **67** (2012), no. 1, 3–96, см. также arXiv: `math.RT/0705.2886` (2007).

Группы аделей на арифметических поверхностях

Осипов Д.В.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, НИУ ВШЭ, НИУ МИСиС, Москва, Россия

d_osipov@mi.ras.ru

Группы аделей для числовых полей и алгебраических кривых были введены К. Шевалле и А. Вейлем в середине XX-го века.

Группы аделей на алгебраических поверхностях были определены А.Н. Паршиным в 1976 году. В 1980 году А.А. Бейлинсон определил группы аделей для произвольных нётеровых схем.

Рассмотрим арифметическую поверхность, то есть регулярную двумерную нётерову схему X, сюръективно расслоенную над $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ с проективными слоями. Простейшим примером арифметической поверхности является $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$, то есть проективная прямая над $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Группа аделей Паршина–Бейлинсона $\mathbb{A}_X$ арифметической поверхности X не учитывает слой арифметической поверхности над «бесконечной точкой» схемы $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, то есть над архимедовым нормированием кольца $\mathbb{Z}$.

В своем докладе я расскажу про арифметические адели $\mathbb{A}_X^{\mathrm{ar}}$ для арифметической поверхности X, так что эти адели учитывают слой над архимедовым нормированием кольца $\mathbb{Z}$. Я расскажу про различные естественно определенные подгруппы группы $\mathbb{A}_X^{\mathrm{ar}}$. Полученные результаты для арифметических поверхностей имеют аналогию с ранее известными результатами для проективной алгебраической поверхности, определенной над конечным полем и расслоенной над проективной прямой. Будет явно разобран также простейший случай $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$.

В докладе будут использованы результаты из статьи [1].

Список литературы

[1] Д.В. Осипов. Арифметические поверхности и адельные факторгруппы. Изв. РАН. Сер. матем. **82** (2018), no. 4, 2018 (в печати), см. также arXiv: `math.AG/1801.02282v2` (2018).

Теория суперхарактеров для полупрямых произведений групп

А.Н. Панов
Самарский университет, Самара, Россия
apanov@list.ru

Понятие теории суперхарактеров конечной группы было введено П. Диаконисом и И.М. Айзексом в работе [1]. Априори каждая группа имеет несколько теорий суперхарактеров. По определению теория суперхарактеров заданной группы G — это пара $(\mathfrak{S}, \mathcal{K})$, где $\mathfrak{S} = \{\chi_1, \ldots, \chi_m\}$ — система попарно ортогональных характеров группы G и $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_m\}$ — разбиение группы G такие, что каждый характер χ_i постоянен на каждом классе K_j и $\{1\} \in \mathcal{K}$. Характеры из $\mathfrak{S}$ называются суперхарактерами, а подмножества из $\mathcal{K}$ — суперклассами. Заметим, что число суперклассов равно числу суперхарактеров.

Пусть J — ассоциативная конечномерная нильпотентная алгебра. Группа $U = 1 + J$ называется алгебра-группой. Группа U действует на J^* слева и справа по формулам $u\lambda(x) = \lambda(xu)$ и $\lambda u(x) = \lambda(ux)$. Для $\lambda \in J^*$ определен стабилизатор $U_{\lambda,\mathrm{right}}$ относительно правого действия U на J^*. Зафиксируем нетривиальный характер $t \to \varepsilon^t$ аддитивной группы $\mathbb{F}_q$ со значением в $\mathbb{C}^*$. Определен линейный характер стабилизатора $\xi_\lambda(u) = \varepsilon^{\lambda(x)}$, где $u = 1 + x$. Суперхарактеры группы U — это характеры χ_λ, индуцированные с характеров ξ_λ подгрупп $U_{\lambda,\mathrm{right}}$. Суперклассы в U — это подмножества вида $K(1 + x) = 1 + UxU$. Согласно работе [1] система характеров $\{\chi_\lambda\}$ и подмножеств $\{K(1 + x)\}$, где λ и x пробегают множества представителей $U \times U$ орбит в J^* и J, соответственно, задают теорию суперхарактеров для алгебра-группы U.

Пусть L — конечная группа. Предположим, что определены левое и правое действия L на J такие, что для любых $h \in L$ и $x, y \in J$ выполняются условия $h(xy) = (hx)y,\ \ (xy)h = x(yh),\ x(hy) = (xh)y$. Определен гомоморфизм $\mathrm{Ad}\colon L \to \mathrm{Aut(U)}$ по формуле $\mathrm{Ad}_h(1 + x) = 1 + hxh^{-1}$. Образуем полупрямое произведение $G = L \ltimes U$. Примерами таких полупрямых произведений являются параболические подгруппы в $\mathrm{GL}(n)$ и группы обратимых элементов ассоциативных конечномерных алгебр над конечным полем. В случае, если L – абелева группа и $|L|$ не делит $\mathrm{char}\,\mathbb{F}_q$, такие группы рассматривались в работе [2] и назывались конечными группами треугольного типа.

Наша цель — предложить теорию суперхарактеров для полупрямых произведений вида $G = L \ltimes U$. Группа G действует на J и J^* слева и справа. Для любого $\lambda \in J^*$ определена двойная орбита $G\lambda G$. Рассмотрим подгруппу $H_{G\lambda G}$, состоящую из $h \in L$ таких, что Ad^*_h стабилизирует все элементы из $G\lambda G$. Подгруппа $H_{G\lambda G}$ является нормальной подгруппой в L. Рассмотрим множество пар $\mathcal{A} = \{(\theta, \lambda)\}$, где λ пробегает множество множество представителей $G \times G$ орбит в J^*, а θ — множество L-неприводимых характеров подгруппы $H_{G\lambda G}$. Для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ рассмотрим подгруппу $G_\alpha = H_{G\lambda G} \ltimes U_{\lambda,\mathrm{right}}$ и ее характер $\xi_\alpha(g) = \theta(h) \sum_{r\in L} \varepsilon^{r\lambda(x)}$, где $g = h(1 + x)$. Определен индуцированный характер $\chi_\alpha = \mathrm{Ind}(\xi_\alpha, G_\alpha, G)$.

Для любого $h \in L$ обозначим через J_h наименьший $L \times L$ инвариантный двусторонний идеал в J такой, что $h \in H_{G\lambda G}$ для любого $\lambda \in J_h^\perp$. Рассмотрим множество пар $\mathcal{B} = \{(h, \omega)\}$, где h пробегает множество представителей классов сопряженных элементов в L, а ω пробегает множество $G \times G$ орбит в J/J_h. Для $\beta = (h, \omega) \in \mathcal{B}$ рассмотрим подмножество $K_\beta = Cl_L(h)(1+\omega+J_h)$, где $Cl_L(h)$ — класс сопряженных элементов для h в L.

Теорема. Система характеров $\{\chi_\alpha\colon \alpha \in \mathcal{A}\}$ и система подмножеств $\{K_\beta\colon \beta \in \mathcal{B}\}$ задают теорию суперхарактеров для группы $G = L \ltimes U$.

Список литературы

[1] P. Diaconis, I.M. Isaacs. Supercharacters and superclasses for algebra groups. Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 2359–2392.
[2] A.N. Panov. Supercharacters for finite groups of triangular type. Comm. Algebra **46** (2018), no. 3, 1032–1046.

Аннуляторы ограниченных $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модулей и симплектическая геометрия

А.В. Петухов
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия
alex--2@yandex.ru

Доклад основан на работе автора [4]. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, а $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ — её редуктивная подалгебра. Мы будем говорить, что $\mathfrak{g}$-модуль M является *ограниченным* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-*модулем*, если M есть прямая сумма конечномерных $\mathfrak{k}$-модулей и число изоморфных $\mathfrak{k}$-модулей в этой прямой сумме ограничено одной и той же константой для всех классов изоморфизма (равномерно ограничено).

Основным результатом, который я бы хотел обсудить в докладе, является то, что свойство «ограниченности» для простого $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модуля эквивалентно $\mathfrak{k}$-коизотропности ассоциированного многообразия аннулятора M (теорема Джозефа гарантирует что ассоциированное многообразие является замыканием нильпотентной коприсоединённой орбитой в $\mathfrak{g}^*$) в предположении, что основное поле алгбраически замкнуто и имеет характеристику 0. В частности, отсюда следует, что если M_1, M_2 — это два простых $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модуля таких, что M_1 ограничен и ассоциированные многообразия аннуляторов M_1 и M_2 совпадают, то M_2 также ограничен. Это утверждение является геометрическим аналогом чисто алгебраического факта, доказанного И. Пенковым и В. Сергановой [2]. Утверждение было сформулировано в виде гипотезы в моей кандидатской диссертации [3].

Доказательство сформулированной выше гипотезы основано на том, что M можно сопоставить коизотропное подмногообразие в ассоциированном многообразии аннулятора M, а далее на достаточно свежих результатах И. Лосева [1], В. Жгуна и Д. Тимашёва [5]. В докладе будут более детально обсуждаться введённые выше концепции, а также доказательство основного результата.

Список литературы

[1] I. Losev. Algebraic Hamiltonian actions. Math. Z. **263** (2009), 685–723.
[2] I. Penkov, V. Serganova. On bounded generalized Harish-Chandra modules. Annales de l'Institut Fourier **62** (2012), 477–496.
[3] A. Petukhov. A geometric approach to $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-modules of finite type (Геометрический подход к $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модулям конечного типа), Ph.D. thesis (диссертация), см. также arXiv: `math.RT/1105.5020`.
[4] A. Petukhov. On annihilators of bounded $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-modules, arXiv: `math.RT/1710.03737`.
[5] D. Timashev, V. Zhgun. Hamiltonian actions on symplectic varieties with invariant Lagrangian subvarieties, arxiv: `math.SG/1109.5239`, см. также: Симплектические многообразия с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями. Доклады РАН **85** (2012), 243–246.

Исчерпаемые группы автоморфизмов

А.Ю. Перепечко
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Московский физико-технический институт (государственный университет), Москва, Россия
`perepeal@gmail.com`

Доклад основан на совместных работах автора с М.Г. Зайденбергом, С. Коваленко и А. Регетой, см. [1], [3], [2]. Как известно, группы автоморфизмов аффинных многообразий допускают структуру прямого предела замкнутых алгебраических подмножеств. Будем называть подгруппу автоморфизмов *исчерпаемой*, если она допускает структуру прямого предела алгебраических подгрупп. Также напомним, что *специальной* группой автоморфизмов называется подгруппа, порождённая однопараметрическими унипотентными подгруппами.

Мы выдвигаем гипотезу, что *связная компонента группы автоморфизмов исчерпаема тогда и только тогда, когда специальная группа автоморфизмов абелева.* Ранее она была доказана нами в размерности 2. В докладе мы представим доказательство данной гипотезы для подгруппы, порождённой связными алгебраическими подгруппами.

Список литературы
[1] S. Kovalenko, A. Perepechko, and M. Zaidenberg. On automorphism groups of affine surfaces. In: Algebraic Varieties and Automorphism Groups. Advanced Studies in Pure Mathematics **75** (2017), 207—286.
[2] A. Perepechko, A. Regeta. Automorphism groups of affine varieties with only algebraic elements, in preparation.
[3] A. Perepechko, M. Zaidenberg. Automorphism groups of affine ML_2 surfaces: dual graphs and Thompson groups, in preparation.

Свободные пуассоновы и йордановы алгебры

А.В. Попов
Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия
klever176@rambler.ru

Как известно класс специальных йордановых алгебр $\mathcal{S}Jord$ не совпадает с многообразием всех йордановых алгебр $\mathcal{J}ord$. Более того, $\mathcal{S}Jord$ не образует многообразия алгебр, а минимальное многообразие $\overline{\mathcal{S}Jord}$, содержащее в себе $\mathcal{S}Jord$, также не совпадает с $\mathcal{J}ord$, т.е. имеют место строгие вложения:

$$\mathcal{S}Jord \subset \overline{\mathcal{S}Jord} \subset \mathcal{J}ord.$$

Одной из важнейших задач в теории йордановых алгебр является описание тождеств, определяющих многообразие $\overline{\mathcal{S}Jord}$ [1], [2].

Будем предполагать, что основное поле $\mathbb{F}$ имеет нулевую характеристику.

Пусть L — алгебра Ли, $S(L)$ — симметрическая алгебра пространства L. На алгебре $S(L)$ можно ввести скобку Пуассона $\{a, b\}$, совпадающую на L с лиевским умножением. Известно, что если $L[X]$ — свободная алгебра Ли над множеством образующих X, то $S(L[X])$ — свободная алгебра Пуассона над множеством X [3].

Будем обозначать через $S_d(L)$ факторалгебру, получающуюся из $S(L)$, если принять $a_1 \cdots a_{d+1} = 0$. Используя конструкцию Кантора [4], из алгебры $S_d(L)$ можно построить йорданову алгебру $J_d(L) = S_d(L) \otimes G \oplus G_1$, где G — алгебра Грассмана счётного ранга, определив коммутативную операцию умножения $\circ$, заданную правилами:

$$\begin{aligned} &(a_1 \otimes g_1) \circ h_1 = a_1 \otimes g_1 h_1, && (a_1 \otimes g_1) \circ (a_2 \otimes g_2) = a_1 a_2 \otimes g_1 g_2, \\ &(a_1 \otimes g_1) \circ (a_2 \otimes h_1) = a_1 a_2 \otimes g_1 h_1, && (a_1 \otimes h_1) \circ (a_2 \otimes h_2) = \{a_1, a_2\} \otimes h_1 h_2, \end{aligned}$$

где $a_1, a_2 \in S_d(L)$, $g_1, g_2 \in G_0$, $h_1, h_2 \in G_1$. Все остальные произведения нулевые.

Обозначим $\mathcal{V}_d = \operatorname{var}(J_d(L))$, где L — свободная алгебра Ли.

Утверждение 1. Многообразия $\mathcal{V}_d$ обладают следующими свойствами:

1. Имеет место вложение многообразий $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{V} \subseteq \overline{\mathcal{S}Jord}$.

2. Алгебры многообразия $\mathcal{V}_d$ удовлетворяют тождествам:

$$x_1^2 \cdots x_d^2 y x_d \cdots x_1 \equiv 0,$$

$$(x_1 y_1)(x_2 y_2) \cdots (x_{2d-1} y_{2d-1}) \equiv 0.$$

   При $d = 1$ данные тождества составляют базис тождеств многообразия $\mathcal{V}_1$.

3. Равенство многообразий $\operatorname{var}(J_d(L)) = \operatorname{var}(J_d(M))$ имеет место тогда и только тогда, когда $\operatorname{var}(L) = \operatorname{var}(M)$.

4. Вложение многообразий $\operatorname{var}(J_d(L)) \subset \operatorname{var}(J_d(M))$ имеет место тогда и только тогда, когда $\operatorname{var}(L) \subset \operatorname{var}(M)$.

Вложение $\mathcal{V} \subseteq \overline{\mathcal{S}Jord}$ естественно приводит к вопросу: верно ли, что $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{S}Jord}$? В случае утвердительного ответа описание порождающих тождеств многообразий $\mathcal{V}_d$ позволит также указать базис тождеств многообразия $\overline{\mathcal{S}Jord}$.

В докладе будет рассказано про связь между свободной пуассоновой алгеброй $S[X]$ и свободными алгебрами $\mathbb{F}\{X, \mathcal{V}_d\}$.

Список литературы

[1] A.A. Albert, J. Paige. On a homomorphism property of certain Jordan algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 20–29.

[2] K. McCrimmon. A taste of Jordan algebras. New York, Springer–Verlag, 2004.

[3] И.П. Шестаков. Квантования супералгебр Пуассона и специальность йордановых супералгебр пуассонова типа. Алгебра и логика **32** (1993), no. 5, 571–584.

[4] I.L. Kantor. Connection between Poisson brackets and Jordan and Lie superalgebras. In: Lie theory, differential equations and representation theory (Montreal, 1989). Univ. Montreal, Montreal, QC, 1990, 213–225.

Аналог теоремы Фаркаша для алгебр Лейбница–Пуассона

С.М. Рацеев[1], О.И. Череватенко[2]
[1]Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия
[2]Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, Ульяновск, Россия
ratseevsm@mail.ru

Векторное пространство A над полем K с двумя K-билинейными операциями умножения $\cdot$ и $\{,\}$ называется алгеброй Лейбница–Пуассона, если относительно операции $\cdot$ пространство A является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции $\{,\}$ — алгеброй Лейбница, и данные операции связаны правилами

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \quad \{c, a \cdot b\} = a \cdot \{c, b\} + \{c, a\} \cdot b,$$

где $a, b, c \in A$. При этом алгебра Лейбница $A(+, \{,\}, K)$ над полем K определяется тождеством

$$\{\{x, y\}, z\} = \{\{x, z\}, y\} + \{x, \{y, z\}\}.$$

Алгебры Лейбница–Пуассона являются обобщениями алгебр Пуассона, которые возникают естественным образом в некоторых разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физики и т.д. Обзоры работ по PI-алгебрам Пуассона и Лейбница–Пуассона можно найти в работах [1], [2].

Обозначим через T_{2n} множество всех перестановок τ из S_{2n}, для которых выполнено условие

$$\tau(1) < \tau(3) < \ldots < \tau(2n-1).$$

Следующая теорема является аналогом теоремы Фаркаша для случая алгебр Пуассона [3].

Теорема. Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие алгебр Лейбница–Пуассона над полем нулевой характеристики, в котором выполнено нетривиальное тождество. Тогда в $\mathbf{V}$ выполняется нетривиальное тождество вида

$$\sum_{\tau \in T_{2n}} \alpha_\tau \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \{x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{\tau(2n-1)}, x_{\tau(2n)}\} \equiv 0, \;\; \alpha_\tau \in K.$$

Список литературы

[1] С.М. Рацеев. Числовые характеристики многообразий алгебр Пуассона. Фундаментальная и прикладная математика **21** (2016), no. 2, 217–242.

[2] С.М. Рацеев, О.И. Череватенко. Числовые характеристики алгебр Лейбница–Пуассона. Чебышевский сборник **18** (2017), no. 1, 143–159.
[3] D.R. Farkas. Poisson polynomial identities. Comm. Algebra **26** (1998), no. 2, 401–416.

О K_2-аналоге проблемы Серра для групп Шевалле

С.С. Синчук
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
sinchukss@yandex.ru

Для произвольного коммутативного кольца R и неприводимой системы корней Φ определим нестабильные группы $\mathrm{K}_i(\Phi, R)$, $i = 1, 2$, как ядро и коядро канонического отображения между соответствующими группой Стейнберга и односвязной группой Шевалле:

$$0 \longrightarrow \mathrm{K}_2(\Phi, R) \longrightarrow \mathrm{St}(\Phi, R) \longrightarrow G_{sc}(\Phi, R) \longrightarrow \mathrm{K}_1(\Phi, R) \longrightarrow 1. \tag{1}$$

Пусть теперь $\mathcal{F}\colon \mathcal{R}ings \to \mathcal{S}ets_*$ произвольный функтор из категории коммутативных колец в категорию множеств с отмеченной точкой. Мы говорим, что для функтора $\mathcal{F}$ и коммутативного кольца R решается аналог проблемы Серра, если $\mathcal{F}(R[t_1, \ldots t_m]) \cong \mathcal{F}(R)$ для любого $m \geq 1$. Если взять в качестве $\mathcal{F}(R)$ множество $K_{0,n}(R)$ проективных модулей постоянного ранга n с модулем R^n в качестве отмеченной точки, то получившееся частное утверждение превращается в классическую проблему Серра о проективных модулях, решение которой известно для регулярных колец размерности Крулля $d \leq 2$, а также при $n \geq d + 1$ (см., напр., [2, Th. V.3.6]).

А. Суслиным и М. Туленбаевым (в 1977 и 1982 годах соответственно) были доказаны следующие результаты.

Теорема (Суслин). *Аналог проблемы Серра решается для функтора $\mathcal{F}_n = \mathrm{K}_1(\mathsf{A}_{n-1}, -)$ и коммутативного регулярного кольца R размерности d при $n \geq \max(3, d + 2)$.*

Теорема Суслина впоследствии была обобщена в [1] на случай произвольной группы Шевалле ранга $\Phi \geq 2$.

Теорема (Туленбаев (см. [5])). *Аналог проблемы Серра решается для функтора $\mathcal{F}_n = \mathrm{K}_2(\mathsf{A}_{n-1}, -)$ и коммутативного регулярного кольца R размерности d при $n \geq \max(5, d + 3)$.*

В докладе планируется рассказать о недавних работах [3], [4], в которых в четном ортогональном и симплектическом случае ($\Phi = \mathsf{C}_\ell, \mathsf{D}_\ell$) доказывается

K_2-аналог локально-глобального принципа Квиллена — одного из двух основных ингредиентов, необходимых для решения K_2-аналога проблемы Серра в этих случаях. Также предполагается рассказать о другом ингредиенте — K_2-аналоге теоремы Хоррокса.

Список литературы

[1] E. Abe. Whitehead groups of Chevalley groups over polynomial rings. Comm. Algebra **11** (1983), no. 12, 1271–1307.

[2] T.-Y. Lam. Serre's problem on projective modules. Springer, 2010.

[3] A. Lavrenov. A local-global principle for symplectic K_2, arXiv: `math.KT/1606.06548`, to appear in Doc. Math.

[4] A. Lavrenov, S. Sinchuk. On centrality of even orthogonal K_2. J. Pure Appl. Alg. **221** (2017), 1134–1145.

[5] M.S. Tulenbaev. The Steinberg group of a polynomial ring. Math. USSR Sb. **117**(**159**) (1982), no. 1, 131–144.

Коммутант силовских 2-подгрупп знакопеременной и симметрической групп, их минимальная система образующих

Р.В. Скуратовский

ИКИТ МАУП, Киев, Украина

ruslcomp@mail.ru

Рассматривается сплетение циклических p-групп [1], [2]. Пусть $cw(G)$ — ширина по коммутанту [3] группы G. Нами найдено $cw(G)$ и структура коммутанта силовских p-подгрупп $p \geq 2$ знакопеременной A_{2^k} и симметрической групп S_{p^k}. Также найдена мощность минимальной системы образующих этих подгрупп. Доказано, что ширина по коммутанту [3] сплетения циклических групп как групп перестановок C_{p_i}, $p_i \in \mathbb{N}$, равна 1.

Лемма 1. Для произвольной группы B и целого $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$, если $w \in (B \wr C_p)'$, то w может быть представлен в виде венечной рекурсии

$$w = (r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}, r_1^{-1} \ldots r_{p-1}^{-1} \prod_{j=1}^{k} [f_j, g_j]),$$

где $r_1, \ldots, r_{p-1}, f_j, g_j \in B$ и $k \leq cw(B)$.

Лемма 2. Произвольный элемент $(g_1, g_2)\sigma^i \in G_k'$ если и только если $g_1, g_2 \in G_{k-1}$ и $g_1 g_2 \in B_{k-1}'$.

Лемма 3. Для произвольной группы B и целого $p \geq 2$ ширина по коммутанту удовлетворяет неравенству

$$cw(B \wr C_p) \leq \max(1, cw(B)).$$

Следствие 1. Если $W = C_{p_k} \wr \ldots \wr C_{p_1}$, то $cw(W) = 1$ для $k \geq 2$.

Следствие 2. Для простого p и $k > 1$ имеем $cw(Syl_p(S_{p^k})) = 1$, и для простого $p > 2$ и $k > 1$ имеем ширину по коммутанту $cw(Syl_p(A_{p^k})) = 1$.

Теорема 1. Элементы группы $Syl_2 S'_{2^k}$ имеют следующую форму представления: $Syl_2 S'_{2^k} = \{[f, l] \mid f \in B_k, l \in G_k\} = \{[l, f] \mid f \in B_k, l \in G_k\}$.

Теорема 2. Ширина по коммутанту группы $Syl_2 A_{2^k}$ равна 1 для $k \geq 2$.

Утверждение 1. Произвольная минимальная система образующих подгруппы $(syl_2 A_{2^k})'$ состоит из $2k - 3$ элементов.

Список литературы

[1] R.V. Skuratovskii. Structure and minimal generating sets of Sylow 2-subgroups of alternating groups. Sao Paulo J. Math. Sci. (2018), no. 1, 1–19. Source: `https://link.springer.com/article/10.1007/s40863-018-0085-0`.

[2] R. Skuratovskii. Generators and relations for Sylows p-subgroup of group S_n. Naukovi Visti KPI. no. 4, 2013, 94–105.

[3] A. Muranov. Finitely generated infinite simple groups of infinite commutator width, arXiv: `math.GR/0608688v4` (2009).

Слайд-многочлены и комплексы подслов

Е.Ю. Смирнов

НИУ ВШЭ, Независимый Московский университет, Москва, Россия

esmirnov@hse.ru

Многочлены Шуберта — это базис $\{\mathfrak{S}_w\}$ в кольце многочленов от счетного числа переменных $R = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]$, элементы которого занумерованы финитными перестановками $w \in S_\infty$. Они представляют классы соответствующих многообразий Шуберта $[X_w] \in H^*(\mathrm{GL}(n)/B)$ в кольце когомологий многообразия полных флагов в $\mathbb{C}^n$ при эпиморфизме Бореля $R \to H^*(\mathrm{GL}(n)/B)$. Эти многочлены были определены в работах И.Н. Бернштейна, И.М. Гельфанда и С.И. Гельфанда [2] и независимо А. Ласку и М.-П. Шютценберже [5] на рубеже 1970-х и 80-х гг. и с тех пор являются объектами постоянного интереса как геометров, так и специалистов по алгебраической комбинаторике. Так, например, их коэффициенты неотрицательны, и им можно придать комбинаторный смысл (см., например, [3]). С другой стороны, до сих пор неизвестно комбинаторное доказательство положительности структурных констант c^u_{wv} («коэффициентов Литтлвуда–Ричардсона») для умножения в этом базисе; при этом геометрическое доказательство этого факта легко следует из теоремы Клеймана о трансверсальности.

Кроме того, многочлену Шуберта для данной перестановки $w \in S_\infty$ можно сопоставить некоторый симплициальный комплекс, называемый *комплексом подслов*, гиперграни которого нумеруются мономами многочлена $\mathfrak{S}_w$. Этот комплекс, как показали А. Кнутсон и Э. Миллер [4], оказывается гомеоморфен диску или сфере.

Недавно С. Ассаф и Д. Сирлз [1] определили новое семейство многочленов с похожими на многочлены Шуберта свойствами — *слайд-многочлены*, которые также образуют базис в кольце R. Многочлены Шуберта получаются как их положительные линейные комбинации; более того, положительность структурных констант для произведения слайд-многочленов также удается доказать. Есть надежда, что с помощью этого базиса получится найти комбинаторное описание коэффициентов Литтлвуда–Ричардсона.

В нашей работе мы определяем симплициальные комплексы для слайд-многочленов, которые получаются как подкомплексы в соответствующем комплексе подслов, и показываем, что они оказываются всегда гомеоморфны дискам.

Доклад основан на совместной работе с А.А. Тутубалиной.

Список литературы

[1] S. Assaf, D. Searles. Schubert polynomials, slide polynomials, Stanley symmetric functions and quasi-Yamanouchi pipe dreams. Adv. Math. **306** (2017), 89–122.

[2] I.N. Bernstein, I.M. Gelfand, S.I. Gelfand. Schubert cells, and the cohomology of the spaces G/P. Uspehi Mat. Nauk **28** (1973), no. 3(171), 3–26.

[3] S. Fomin, A. Kirillov. The Yang-Baxter equation, symmetric functions, and Schubert polynomials. In: Proceedings of the 5th Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Florence, 1993) **153** (1996), 123–143.

[4] A. Knutson, E. Miller. Subword complexes in Coxeter groups. Adv. Math. **184** (2004), no. 1, 161–176.

[5] A. Lascoux, M.-P. Schützenberger. Polynômes de Schubert. (French) [Schubert polynomials]. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **294** (1982), no. 13, 447–450.

Об изоморфизме между двумя реализациями янгиана странной супералгебры Ли $Q(n)$

В.А. Стукопин
Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Россия
stukopin@mail.ru

Янгианы, один из двух, наряду с квантовыми аффинными алгебрами, самых важных для приложений примеров квантовых групп, были определены В.Г. Дринфельдом ([1]), который ввёл в употребление и сам термин «янгиан». Но фактически янгианы были определены ранее в рамках алгебраического анзатца Бёте ленинградской школой математической физики, возглавляемой Л. Фаддевым. В. Дринфельд доказал эквивалентность этих двух определений. Позднее были определены также янгианы некоторых супералгебр Ли и в некоторых случаях была доказана эквивалентность упомянутых выше двух подходов. Наиболее интересный пример янгианов супералгебр Ли, не имеющий аналогов в случае простых и редуктивных алгебр Ли, связан со странной супералгеброй Ли, поскольку янгиан в этом случае появляется как квантование скрученной бисупералгебры токов, каковые отсутствуют в случае алгебр Ли. Янгиан $Y(Q(n))$ странной супералгебры Ли $Q(n)$ был определён М. Назаровым (см. [2]), используя подход Н. Решетихина – Л. Фаддеева – Л. Тахтаджяна. Можно также определить $Y_D(Q(n))$ странной супералгебры $Q(n)$ следуя подходу В. Дринфельда (см. [1]), что сделано в работах [3], [4]. В квазиклассическом пределе обоих янгианов $Y(Q(n))$ и $Y_D(Q(n))$ получается (с некоторыми оговорками) одна и таже бисупералгебра Ли. Изоморфны ли янгианы $Y(Q(n))$ и $Y_D(Q(n))$? Ввиду отсутствия теоремы о единственности квантования бисупералгебр Ли это вопрос, требующий отдельного рассмотрения. Мы строим явный изоморфизм между этими двумя реализациями: $Y(Q(n))$ и $Y_D(Q(n))$, используя треугольное разложение и теорию некоммутативных определителей, развитую И.М. Гельфандом с соавторами ([5]).

Список литературы

[1] V. Drinfeld. Quantum groups. Proc. Int. Cong. Math., 1988.
[2] M. Nazarov. Yangian of the queer Lie superalgebra. Commun. Math. Phys. **208** (1999), 195–223.
[3] V. Stukopin. The Yangian of the strange Lie superalgebra and its quantum double. Theoret. and Math. Phys. **174** (2013), no. 1, 122–133.

[4] V. Stukopin. Yangian of the strange Lie superalgebra Q_{n-1}, Drinfeld's approach. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications **3** (2007), no. 069, 1–12.
[5] I. Gelfand, S. Gelfand, V. Retakh. Quasideterminants. Adv. Math. **193** (2005), no. 1, 56–141.

Групповые методы в динамике вихревых нитей

С.В. Талалов
Тольяттинский государственный университет, Тольятти, Россия
svt_19@mail.ru

Пусть $\boldsymbol{z}(\tau,\xi)$ — замкнутая эволюционирующая кривая в пространстве E_3 вида

$$\boldsymbol{z}(\tau,\xi) = \boldsymbol{z}_0 + R_0 \int\limits_0^{2\pi} [(\xi-\eta)/2\pi]\, \boldsymbol{j}(\tau,\eta)d\eta\,,$$

где скобки $[\ldots]$ обозначают целую часть числа, а 2π-периодическая векторная функция $\boldsymbol{j}(\tau,\eta)$ удовлетворяет уравнению магнетика Гейзенберга [1]

$$\partial_\tau \boldsymbol{j}(\tau,\xi) = \boldsymbol{j}(\tau,\xi) \times \partial_\xi^2 \boldsymbol{j}(\tau,\xi)\,. \tag{1}$$

Известно, что такая динамическая система описывает вихревую нить в приближении локальной индукции. Исходная группа пространственно-временно́й симметрии системы — это группа $E(3)\times E_\tau$, где $E(3)$ — группа движений пространства E_3 и E_τ — группа «временных» сдвигов $\tau\to\tau+c$.

Предлагается гамильтоново описание данной динамической системы в терминах расширенного фазового пространства, фундаментальными координатами в котором являются (нестандартные для гидродинамики) переменные $(\boldsymbol{z}_0;\, \boldsymbol{p}\,;\, \boldsymbol{j}(\xi)\,)$. Расширение (то есть добавление «лишних» степеней свободы) компенсируется связями Ω. Введение в качестве фундаментальных переменных импульсов $\boldsymbol{p}$ позволяет рассматривать в качестве группы пространственно-временно́й симметрии центрально расширенную (с параметром m_0) группу Галилея $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ — вместо исходной группы $E(3)\times E_\tau$. Алгебра группы $\widetilde{\mathcal{G}}_3$, как известно, имеет три функции Казимира. Одна из них используется в представленном докладе для определения энергии вихря нулевой толщины, что, как известно, является проблемой.

После вычисления всех скобок Пуассона и с учётом связей итоговая формула для энергии имеет вид:

$$\mathcal{E} = H\Big|_{\Omega} = \frac{1}{2m_0}\Big(\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{n}_f\Big)^2 + \frac{\mathcal{E}_0}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\big(\partial_\xi \boldsymbol{j}(\xi)\big)^2 d\xi\,,$$

где $\boldsymbol{n}_f = \boldsymbol{f}/|\boldsymbol{f}|$ и, в свою очередь, $\boldsymbol{f} = \frac{1}{2}\iint\limits_0^{2\pi}\left[(\xi-\eta)/2\pi\right]\,\boldsymbol{j}(\xi)\times\boldsymbol{j}(\eta)d\xi d\eta\,.$

Подход, использованный при построении гамильтоновой структуры теории, был развит автором ранее и применялся при построении струнных моделей [2].

Список литературы

[1] Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. Гамильтонов подход в теории солитонов. — М.: Наука, 1986.
[2] S.V. Talalov. The System of Interacting Anyons: A Visual Model Inspired by String Theory. In: F.P. Davis (Ed.). Progress in String Theory Research, Nova Science Publishers, 2016, 53–88.

Нильпотентные порождающие алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$

А.И. Чистопольская
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
achistopolskaya@gmail.com

Доклад основан на работе автора [1].

Теорема. Пусть $\mathbb{K}$ — бесконечное поле и $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$. Тогда для любой ненулевой нильпотентной матрицы $X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ найдётся нильпотентная $Y \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, такая что X и Y порождают $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$.

Список литературы

[1] A. Chistopolskaya. On nilpotent generators of the Lie algebra $\mathfrak{sl}_n$, arXiv: math.RA/1804.09457v1 (2018).

Гибкость нормальных S-многообразий
А.А. Шафаревич
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
shafarevich.a@gmail.com

Доклад основан на работе [1].

Алгебраическое многообразие X называется гибким, если касательное пространство в каждой его регулярной точке порождено касательными векторами к орбитам различных действий одномерных унипотентных групп. В статье [2] было показано, что для аффинных многообразий, имеющих размерность больше единицы, гибкость эквивалентна бесконечной транзитивности действия группы регулярных автоморфизмов на множестве гладких точек.

В 1972 году Э.Б. Винберг и В.Л. Попов ввели класс аффинных S-многообразий, т.е. таких многообразий, на которых действует связная алгебраическая группа G с открытой орбитой, причем стационарная подгруппа любой точки этой орбиты содержит максимальную унипотентную подгруппу группы G.

В нашей работе мы доказываем, что нормальные аффинные S-многообразия, у которых нет обратимых регулярных функций, за исключением констант, являются гибкими.

Список литературы

[1] S. Gaifullin, A. Shafarevich. Flexibility of normal affine horospherical varieties, arXiv: `math.AG/1805.05024` (2018).

[2] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. **162** (2013), no. 4, 767–823.

Касательные конусы к многообразиям Шуберта
для особого типа E
А.А. Шевченко[3]
Самарский университет, Самара, Россия
shevchenko.alexander.1618@gmail.com

Пусть G — комплексная редуктивная алгебраическая группа, T — максимальный тор, B — содержащая его борелевская подгруппа, W — группа Вейля G относительно T. Обозначим через $F = G/B$ многообразие флагов. Оно распадается в объединение клеток Шуберта $F = \bigsqcup_{w \in W} X_w^o$. Замыкание

[3]Работа поддержана грантом РФФИ 16–01–00154а.

клетки Шуберта X_w^o обозначается X_w и называется многообразием Шуберта, соответствующим элементу w. Обозначим через C_w касательный конус к X_w в точке $p = eB$, рассматриваемый как подсхема в касательном пространстве $T_pX_w \subset T_pF$. Описание касательных конусов — сложная задача теории алгебраических групп [1]. В 2011 году Д.Ю. Елисеев и А.Н. Панов [2] вычислили касательные конусы в явном виде для $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $n \leqslant 5$. На основании полученных результатов А.Н. Панов выдвинул следующую гипотезу.

Гипотеза. Пусть w_1, $w_2 \in W$ — различные инволюции, тогда $C_{w_1} \neq C_{w_2}$.

Легко показать, что гипотезу достаточно проверить для групп Вейля, соответствующих неприводимым системам корней. В 2013 году гипотеза была доказана Д.Ю. Елисеевым и М.В. Игнатьевым [3] для групп Вейля, соответствующих неприводимым системам корней типов A_n, F_4, G_2. В 2015 году гипотеза была доказана для так называемых базисных инволюций совместно М.В. Игнатьевым и автором [4] для групп Вейля, соответствующих неприводимым системам корней типа D_n. В 2016 году гипотеза была доказана совместно М.А. Бочкарёвым, М.В. Игнатьевым и автором [5] для групп Вейля, соответствующих неприводимым системам корней типов B_n и C_n.

В докладе будут рассказаны полученные результаты на пути к доказательству для особых групп Вейля типа E.

Список литературы

[1] S. Billey, V. Lakshmibai. Singular loci of Schubert varieties. Progr. in Math. **182**, Birkhäuser, 2000.

[2] Д.Ю. Елисеев, А.Н. Панов. Касательные конусы многообразий Шуберта для A_n малого ранга. Записки научных семинаров ПОМИ **394** (2011), 218–225.

[3] Д.Ю. Елисеев, М.В. Игнатьев. Многочлены Костанта–Кумара и касательные конусы к многообразиям Шуберта для инволюций в A_n, F_4, G_2. Записки научных семинаров ПОМИ **414** (2013), 82–105.

[4] М.В. Игнатьев, А.А. Шевченко. О касательных конусах к многообразиям Шуберта типа D_n. Алгебра и анализ, **27** (2015), no. 4, 28–49, arXiv: `math.AG/1410.4025`.

[5] M.A. Bochkarev, M.V. Ignatyev, A.A. Shevchenko. Tangent cones to Schubert varieties in types A_n, B_n and C_n. J. Algebra **465** (2016), 259–286, arXiv: `math.RT/1310.3166`.

Некоторые интегрируемые системы алгебраического происхождения и разделение переменных

О.К. Шейнман
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
sheinman@mi.ras.ru

Плоская алгебраическая кривая, носитель которой содержит d целочисленных точек, полностью определяется заданием d точек на плоскости, через которые она проходит. Оказывается, ее коэффициенты, рассматриваемые как функции наборов координат этих точек, коммутируют относительно скобок Пуассона, соответствующих любым парам координат, относящимся к одной и той же точке. Этот факт, и некоторые его вариации, был обнаружен в 2002–03 гг. математическими физиками (Бабелон и Талон, Энрикес и Рубцов). Как частный случай мы получаем, что коэффициенты интерполяционного полинома с простыми узлами интерполяции (известного как интерполяционный полином Лагранжа) коммутируют относительно скобок Пуассона, заданных на данных интерполяции. Мы сформулируем и докажем более общее утверждение, из которого, в частности, следуют сформулированные выше результаты. Оно таково: каждая (невырожденная) система n гладких функций от $n+2$ переменных порождает интегрируемую систему с n степенями свободы. Примеры, кроме уже упомянутого, включают версию интерполяционного полинома Эрмита, системы, связанные с моделями Вейерштрасса кривых (или, что то же, — миниверсальными деформациями особенностей). Я также планирую объяснить, как на этой основе задавать системы Хитчина.

Доклад частично основан на работах [1], [2], [3], [4].

Список литературы

[1] O.K. Sheinman. Some integrable systems of algebraic origin and separation of variables, arXiv: physics.math-ph/1712.04422.
[2] O. Babelon, M. Talon. Riemann surfaces, separation of variables and classical and quantum integrability, arXiv: physics.hep-th/0209071.
[3] B. Enriquez, V. Rubtsov. Commuting families in skew fields and quantization of Beauville's fibration. Duke Math. J. **119** (2003), no. 2, 197–219.
[4] D.Talalaev. Riemann bilinear form and Poisson structure in Hitchin-type systems, arXiv: physics.hep-th/0304099.

Надгруппы блочно-диагональных подгрупп гиперболической унитарной группы над квази-конечным кольцом

А.В. Щеголев
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
a.shchegolev@spbu.ru

Доклад является кратким изложением материалов кандидатской диссертации автора [1]. Задача описания надгрупп блочно-диагональных (подсистемных) подгрупп в полной линейной группе над коммутативными кольцами и кольцами, удовлетворяющими условиям стабильного ранга, была впервые рассмотрена в работах З.И. Боревича, Н.А. Вавилова и В. Наркевича. Позднее та же задача была решена А. Баком и А.В. Степановым над квази-конечными кольцами с использованием локализационных методов. Случай классических групп над коммутативными кольцами с обратимой 2 был рассмотрен в главе V докторской диссертации Н.А. Вавилова. Во всех указанных случая ответ дан в терминах сетей идеалов.

Отсутствие обратимости 2 даже в случае классических групп не только существенно усложняет доказательство аналогичной классификации, но и меняет саму формулировку ответа. В этом случае надгруппы блочно-диагональных подгрупп описываются не сетями идеалов, а форменными сетями идеалов (аналог форменного идеала) в духе работ Е.В. Дыбковой 1998–2008 годов. Данный доклад посвящён развернутой формулировки и обсуждению следующих двух основых результатов из [1].

Теорема. Пусть ν — унитарное отношение эквивалентности на $2n$-элементном множестве индексов такое, что минимальный размер несамосопряжённого класса эквивалентности ν не меньше 5, а самосопряжённого — не меньше 4. Пусть H — подгруппа гиперболической унитарной группы $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ над квази-конечным форменным кольцом (R, Λ), содержащая блочно-диагональную подгруппу $\mathrm{EU}(\nu, R, \Lambda)$ типа ν. Тогда существует единственная точная форменная сеть идеалов $(\sigma, \Gamma) \geq [\nu]_{(R,\Lambda)}$ такая, что

$$\mathrm{EU}(\sigma, \Gamma) \leq H \leq \mathrm{N}_{\mathrm{U}(2n,R,\Lambda)}(\mathrm{U}(\sigma, \Gamma)).$$

Теорема. Пусть ν — унитарное отношение эквивалентности на $2n$-элементном множестве индексов, такое, что минимальный размер класса эквивалентности ν не меньше трёх. Пусть (σ, Γ) — форменная сеть идеалов над квази-конечным форменным кольцом (R, Λ) такая, что $[\nu]_{(R,\Lambda)} \leq (\sigma, \Gamma)$.

В этом случае нормализатор $\mathrm{N}_{\mathrm{U}(2n,R,\Lambda)}(\mathrm{U}(\sigma,\Gamma))$ совпадает с транспортером

$$\begin{aligned}\mathrm{Transp}_{\mathrm{U}(2n,R,\Lambda)}&(\mathrm{EU}(\sigma,\Gamma),\mathrm{U}(\sigma,\Gamma)) =\\ &= \{a\in \mathrm{U}(2n,R,\Lambda) \mid \forall \tau\in \mathrm{EU}(\sigma,\Gamma)\ a\tau a^{-1}\in \mathrm{U}(\sigma,\Gamma)\}\end{aligned}$$

и состоит в точности из матриц a в $\mathrm{U}(2n,R,\Lambda)$, удовлетворяющих следующим трём условиям:

(T1) $a_{ij}\sigma_{jk}a'_{kl}\le\sigma_{il}$ для любых $i,j,k,l\in I$,

(T2) $a_{ij}\xi S_{k,-k}(a^{-1})\lambda^{(\varepsilon(k)-1)/2}\bar{\xi}\lambda^{(1-\varepsilon(j))/2}a'_{-j,-i}\in\Gamma_i$ для любых $i,j,k\in I,\xi\in\sigma_{jk}$,

(T3) $a_{ij}\Gamma_j a'_{-j,-i}\le\Gamma_i$ для любых $i,j\in I$.

При наличии времени также будут упомянуты основные ингредиенты доказательства.

Список литературы

[1] A. Shchegolev. Overgroups of elementary block-diagonal subgroups in even unitary groups over quasi-finite rings. Ph.D. thesis, Universität Bielefeld, 2015.
[2] А.В. Щеголев. Надгруппы блочно-диагональных подгрупп гиперболической унитарной группы над квази-конечным кольцом: основные результаты. Зап. научн. сем. ПОМИ **443** (2016), 222–233.
[3] А.В. Щеголев. Overgroups of elementary block-diagonal subgroups in the classical symplectic group over an arbitrary commutative ring. Алгебра и анализ (2018), принята к печати.

Содержание

Для заметок

Научное издание

Седьмая школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов,

Самара, Россия
18–26 августа 2018 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка в пакете LaTeX, макет М.В. Игнатьев

Подписано в печать 08.08.2018.
Гарнитура Times New Roman. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Печать оперативная. Усл.-печ. л. 3,5.
Тираж 120 экз. Заказ № 48.

Отпечатано в типографии издательства «Инсома-пресс»
443080, г. Самара, ул. Санфировой, д. 110А, тел. (846) 222–92–40