МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЁВА
НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
СОВМЕСТНАЯ РУССКО-ФРАНЦУЗСКАЯ ЛАБОРАТОРИЯ
ИМ. Ж.-В. ПОНСЕЛЕ
МЕЖДУНАРОДНАЯ ЛАБОРАТОРИЯ ЗЕРКАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ
И АВТОМОРФНЫХ ФОРМ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ ЭКОНОМИКИ

Шестая школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов

Москва, Россия
30 января – 4 февраля 2017 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

The Sixth School-Conference on

Lie Algebras, Algebraic Groups and Invariant Theory

Moscow, Russia
January 30 – February 4, 2017

ABSTRACTS

Москва 2017

УДК 512.81+512.74+512.554.3
ББК 22.1

Шестая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». Москва, Россия, 30 января – 4 февраля 2017 г. Тезисы докладов. — Москва: МЦНМО, 2017. — 96 с.
ISBN 978–5–4439–0988–2

Сборник содержит тезисы докладов участников Шестой школы-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», проводившейся в Москве с 30 января по 4 февраля 2017 года Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова, Самарским национальным исследовательским университетом имени академика С.П. Королёва, Независимым Московским университетом, Совместной Русско-Французской лабораторией им. Ж.-В. Понселе и Международной лабораторией зеркальной симметрии и автоморфных форм Высшей школы экономики.

Адресован научным работникам, преподавателям, студентам и аспирантам математических специальностей.

ISBN 978–5–4439–0988–2

Предисловие

Шестая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» проходила в Москве с 30 января по 4 февраля 2017 года. Её организаторами были Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, Совместная Русско-Французская лаборатория им. Ж.-В. Понселе и Международная лаборатория зеркальной симметрии и автоморфных форм Высшей школы экономики. Информацию о предыдущих школах-конференциях см. на сайте `http://halgebra.math.msu.su/alg_conf/main.shtml`.

Программный комитет школы-конференции: Э.Б. Винберг (МГУ, председатель), И.В. Аржанцев (НИУ ВШЭ), В.А. Артамонов (МГУ), Н.А. Вавилов (СПбГУ), М.Х. Гизатуллин (Самара), М.В. Зайцев (МГУ), А.С. Клещёв (Университет Орегона, США), А.Н. Панов (Самарский университет), Д.А. Тимашёв (МГУ), В.И. Черноусов (Университет Альберты, Канада), О.К. Шейнман (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН).

Организационный комитет школы-конференции: В.Н. Чубариков (МГУ, сопредседатель), Э.Б. Винберг (МГУ, сопредседатель), А.Н. Панов (Самарский университет, зам. председателя), Д.А. Тимашёв (МГУ, зам. председателя), И.В. Аржанцев (НИУ ВШЭ), С.А. Гайфуллин (МГУ), М.В. Игнатьев (Самарский университет), Н.Ю. Медведь (МГУ), С.А. Локтев (НИУ ВШЭ).

Участниками школы были студенты, аспиранты и молодые учёные из России и других стран. Им были прочитаны следующие лекционные курсы:

- *Неабелевы градуировки простых алгебр Ли*
  (Э.Б. Винберг, МГУ, Москва);
- *Многогранники Ньютона–Окунькова и представления классических групп*
  (В.А. Кириченко, НИУ ВШЭ, ИППИ РАН, Москва);
- *Асимптотическая теория характеров*
  (Г.И. Ольшанский, ИППИ РАН, НИУ ВШЭ, Москва);
- *Комбинаторика и геометрия кристаллов Кашивары*
  (Л.Г. Рыбников, НИУ ВШЭ, Москва);
- *Редуктивные группы над кольцами*
  (А.В. Степанов, СПбГУ, Санкт-Петебург)

Сборник содержит аннотации лекционных курсов и тезисы докладов участников школы-конференции.

Оргкомитет

Аннотации лекционных курсов

Неабелевы градуировки простых алгебр Ли

Э.Б. Винберг
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
evinberg@gmail.com

С каждой редуктивной абелевой группой Γ автоморфизмов (полу)простой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ связана градуировка алгебры $\mathfrak{g}$, градуирующими подпространствами которой служат весовые подпространства группы Γ. Таким образом получаются корневое разложение, обобщённое корневое разложение (ассоциированное с внешним автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$), различные циклические градуировки и пр.

Интересно, однако, рассматривать и «неабелевы градуировки», под которыми я понимаю разложение алгебры $\mathfrak{g}$ на изотипные компоненты относительно некоторой редуктивной неабелевой группы автоморфизмов. В этом случае коммутатор двух градуирующих подпространств, вообще говоря, не лежит в каком-либо одном градуирующем подпространстве. Тем не менее, при некоторых дополнительных предположениях формулы для коммутаторов выглядят достаточно просто и доставляют полезную информацию о строении алгебры Ли. В частности, таким образом могут быть получены различные модели особых простых алгебр Ли.

В лекциях будет рассказано о нескольких типах таких неабелевых градуировок — коротких SL(2)-структурах, коротких SO(3)-структурах и коротких SL(3)-структурах.

Короткой SL(2)-структурой в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется подгруппа $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, изоморфная SL(2), относительно которой алгебра $\mathfrak{g}$ разлагается в сумму неприводимых компонент размерностей 1, 2 и 3. В любой простой алгебре Ли существует такая структура; в частности, в качестве Γ можно взять трехмерную корневую подгруппу, отвечающую длинному корню. Структуры этого последнего вида связаны с кватернионными симметрическими пространствами, а также рассматривались ранее (не называясь таким образом) в связи с задачей геометрического квантования.

Короткой SO(3)-структурой в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется подгруппа $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, изоморфная $\mathrm{SO}(3)(= \mathrm{SO}(3,\mathbb{C}))$, относительно которой алгебра $\mathfrak{g}$ разлагается в сумму неприводимых компонент размерностей не больше 5 (то есть 1, 3 или 5). Такие структуры есть во всех простых алгебрах Ли. С каждой из них связано представление алгебры $\mathfrak{g}$ в виде суммы пространства косоэрмитовых матриц третьего порядка с нулевым следом над некоторой (вообще говоря, неассоциативной) алгеброй J с инволюцией и алгебры дифференцирований $\mathrm{Der}(J)$. Возникающие здесь алгебры с инволюцией называются структурируемыми, или алгебрами Кантора–Аллисона. К ним, в частности, относятся ассоциативные алгебры с инволюцией, йордановы алгебры (с тривиальной инволюцией), а также композиционные алгебры и их попарные тензорные произведения. Короткая SO(3)-структура на простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ позволяет представить соответствующую группу Ли G как группу автоморфизмов «обобщённой эллиптической плоскости» над алгеброй J.

Короткой SL(3)-структурой в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется подгруппа $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, изоморфная SL(3), относительно которой алгебра $\mathfrak{g}$ разлагается в сумму подалгебры $\mathrm{Lie}(\Gamma)$ и неприводимых компонент размерностей 1 и 3. В любой простой алгебре Ли, кроме C_n, такая структура существует и единственна с точностью до автоморфизма. В терминах этой структуры алгебра $\mathfrak{g}$ однозначно восстанавливается по некоторой кубической форме (в пространстве меньшего числа измерений), которую я называю нормой алгебры $\mathfrak{g}$. Доказывается, что кубическая форма N в пространстве V является нормой некоторой простой алгебры Ли тогда и только тогда, когда группа линейных преобразований, сохраняющих конус $N = 0$, редуктивна и имеет в V открытую орбиту.

Многогранники Ньютона–Окунькова и представления классических групп

В.А. Кириченко
Высшая школа экономики, Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия
vkiritch@hse.ru

Выпуклые тела Ньютона–Окунькова [2] позволяют перенести теорию многогранников Ньютона из торической геометрии в более общий контекст, например, на многообразия с действием полной линейной группы $GL_n(\mathbb{C})$, симплектической группы $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ или других классических групп. Мы начнём с элементарного определения тел Ньютона–Окунькова, а затем рассмотрим примеры, в которых тела Ньютона–Окунькова можно описать явно и получить известные многогранники из теории представлений. Центральными примерами будут многогранники Винберга–Литтельманна–Фейгина–Фурье [1] и классические многогранники Гельфанда–Цетлина для представлений $GL_n(\mathbb{C})$.

В частности, мы явно вычислим неравенства, задающие многогранники Ньютона–Окунькова грассманианов, с помощью простого рассуждения, анонсированного в [4, Example 2.9, Remark 2.10]. Мы также поговорим о приложениях многогранников Ньютона–Окунькова к исчислению Шуберта [5], [3]. Будут сформулированы открытые вопросы.

У слушателей не предполагается знаний, выходящих за рамки первого курса мехмата.

Программа миникурса:

1. От многогранников Ньютона к выпуклым телам Ньютона–Окунькова. Теорема Кушниренко и её обобщения. Примеры многогранников Ньютона–Окунькова для многообразия флагов GL_3/B, грассманиана $G(2, 4)$ и симплектического многообразия флагов Sp_4/B.

2. Базисы и многогранники Гельфанда–Цетлина. Многогранники Винберга–Литтельманна–Фейгина–Фурье. Многообразие флагов и многообразия Шуберта. Связь многогранников с исчислением Шуберта.

3. Геометрические нормирования на многообразии флагов. Элементарное вычисление многогранников Ньютона–Окунькова грассманианов и многообразий флагов для GL_n в случае геометрического нормирования. Открытые задачи.

Список литературы

[1] E. Feigin, Gh. Fourier, P. Littelmann. PBW filtration and bases for irreducible modules in type A_n. Transform. Groups **165** (2011), no. 1, 71–89.

[2] K. Kaveh, A. Khovanskii. Newton convex bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory. Ann. Math. (2), **176** (2012), no. 2, 925–978.

[3] V. Kiritchenko. Geometric mitosis. Math. Res. Lett. **23** (2016), no. 4, 1069–1096; arXiv: `math.AG/1409.6097`.

[4] V. Kiritchenko. Newton–Okounkov polytopes of flag varieties. Transform. Groups, `doi 10.1007/s00031-016-9372-y`;

[5] В.А. Кириченко, Е.Ю. Смирнов, В.А. Тиморин. Исчисление Шуберта и многогранники Гельфанда–Цетлина. Успехи мат. наук **67** (2012), no. 4, 89–128.

Асимптотическая теория характеров

Г.И. Ольшанский
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Высшая школа экономики, Москва, Россия
olsh2007@gmail.com

В 20-х годах прошлого века Вейль нашел явные формулы для неприводимых характеров компактных классических групп $U(N)$, $Sp(2N)$, $SO(2N+1)$, $SO(2N)$. Оказывается, после надлежащей перенормировки формулы Вейля допускают предельный переход при $N \to \infty$. Получающиеся в результате предельные объекты зависят уже от счётного набора непрерывных параметров. Я расскажу об этом и о возникающей отсюда теории.

Комбинаторика и геометрия кристаллов Кашивары

Л.Г. Рыбников
Высшая школа экономики, Москва, Россия
leo.rybnikov@gmail.com

Кристаллы Кашивары являются комбинаторной моделью конечномерных представлений полупростых алгебр Ли. Более точно, кристаллом конечномерного представления данной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является множество, индексирующее некоторый специальный базис соответствующего представления квантовой группы $U_q(\mathfrak{g})$, на котором образующие Шевалле e_i задают структуру ориентированного графа, рёбра которого размечены простыми корнями алгебры Ли. Кристаллы являются очень интересным и важным комбинаторным объектом, содержащим в себе, в частности, такие интересные и нетривиальные комбинаторные конструкции, как соответствие RSK и инволюции Шютценберже.

Кристаллы, связанные с данной алгеброй Ли, образуют моноидальную категорию, то есть на них определена операция тензорного произведения. Тензорное произведение кристаллов некоммутативно, однако тензорные произведения двух кристаллов в разных порядках изоморфны при помощи некоторого функториального изоморфизма, называемого коммутором. Эта структура похожа на braiding в категории представлений квантовой группы (и, фактически, происходит из неё), однако соотношению группы кос коммуторы не удовлетворяют. На самом деле, категория кристаллов является простейшим примером кограничной категории, где роль группы кос играет фундаментальная группа $\pi_1(\overline{M_{0,n+1}}(\mathbb{R}))$ компактификации Делиня–Мамфорда пространства модулей вещественных стабильных рациональных кривых с отмеченными точками. Я дам стандартное определение кристаллов и коммуторов и расскажу о новом подходе к категории кристаллов, проясняющем появление пространства Деліня–Мамфорда в этой науке, а также о том, как кристаллы возникают из квантовых интегрируемых систем.

Редуктивные группы над кольцами

А.В. Степанов
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
stepanov239@gmail.com

Миникурс основан на работах автора [7, 8, 3]. На русском языке эти результаты анонсированы в [1], а также подробно описаны в докторской диссертации автора [2].

Начиная с работ Суслина [4] и Квиллена [6], посвящённых доказательству гипотезы Серра, метод локализации является одним из важнейших инструментов при работе с линейными группами над кольцами. В курсе представлена новая версия этого метода. Идея состоит в следующем. Используя локализацию в некотором универсальном кольце U, например в аффинной алгебре групповой схемы G, получаем результат в $G(U)$, после чего проектируем его в $G(R)$ для произвольного кольца R. Результаты, получающиеся на этом пути, не зависят от кольца R.

При доказательстве используется только разложение Гаусса, «элементарные вычисления» и некоторые простые соображения о расщеплении. В курсе будут сформулированы следующие утверждения.

- Основные коммутационные формулы, включая мультикоммутационную формулу.
- Нильпотентная структура группы $K_1^G(R) = G(R)/E(R)$.
- Ограниченность длин коммутаторов в элементарных образующих.
- Нормальное строение изотропных редуктивных групп.
- Строение решётки подгрупп группы Шевалле, содержащих элементарную подгруппу некоторой максимальной групповой подсхемы.

Все теоремы будут снабжены наброском доказательства для групп Шевалле. На первой лекции мы напомним основные определения, связанные с функториальным определением аффинной групповой схемы, однако для лучшего восприятия желательно, чтобы слушатели не в первый раз услышали о лемме Йонеда, общем элементе и фундаментальном идеале аффинной алгебры групповой схемы. Для этого достаточно прочитать пункты 1.1–1.7 и 2.1–2.4 книги [5]

Список литературы

[1] А.В. Степанов. Неабелева K-теория групп Шевалле над кольцами. Записки научных семинаров ПОМИ **423** (2013), 244–263.

[2] А.В. Степанов. Структурная теория и подгруппы групп Шевалле над кольцами. Докторская диссертация, Санкт-Петербург, 2014.

[3] А.В. Степанов. Новый взгляд на разложение унипотентов и нормальное строение групп Шевалле. Алгебра и анализ **28** (2016), no. 3, 161–173.

[4] А.А. Суслин. О структуре специальной линейной группы над кольцами многочленов. Известия АН СССР. Серия математическая **41** (1977), no. 2., 235–252.

[5] J.C. Jantzen. Representations of algebraic groups. Mathematical surveys and monographs **107**, AMS, 2003.

[6] D. Quillen. Projective modules over polynomial rings. Invent. Math. **36** (1976), 167–171.

[7] A. Stepanov. Elementary calculus in Chevalley groups over rings. J. Prime Research in Math. **9** (2013), 79–95.

[8] A.V. Stepanov. Structure of Chevalley groups over rings via universal localization. J. Algebra 450 (2016), 522–548.

Тезисы докладов

Сферические действия на многообразиях флагов и правила ветвления для полупростых алгебраических групп

Р.С. Авдеев
Высшая школа экономики, Москва, Россия
suselr@yandex.ru

Доклад основан на совместной работе с А.В. Петуховым.

Пусть G — односвязная полупростая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики и H — её связная редуктивная подгруппа. Введём следующие обозначения:

Λ^+ — множество всех доминантных весов группы G;

M^+ — множество всех доминантных весов группы H;

$R_G(\lambda)$ — неприводимое представление группы G со старшим весом $\lambda \in \Lambda^+$;

$R_H(\mu)$ — неприводимое представление группы H со старшим весом $\mu \in \mathrm{M}^+$.

Пусть $\varpi_1, \ldots, \varpi_r \in \Lambda^+$ — все фундаментальные веса группы G.

Зафиксируем какое-нибудь подмножество $I \subset \{1, \ldots, r\}$ и обозначим через Λ_I^+ подполугруппу с нулём в Λ^+, порождённую множеством $\{\varpi_i \mid i \in I\}$. Пусть $\Gamma_I = \Gamma_I(G, H)$ — множество всех пар $(\lambda; \mu)$, где $\lambda \in \Lambda_I^+$ и $\mu \in \mathrm{M}^+$, для которых ограничение представления $R_G(\lambda)$ на подгруппу H содержит представление $R_H(\mu)$. Несложно показать, что Γ_I является полугруппой (с нулём), мы называем её *полугруппой ветвления*, отвечающей множеству I.

Для каждого $i \in I$ обозначим через P_i стабилизатор в группе G прямой, натянутой на старший вектор двойственного к $R_G(\varpi_i)$ представления, и положим $P_I = \bigcap\limits_{i \in I} P_i$. Тогда P_I — параболическая подгруппа в G.

Напомним, что регулярное действие связной редуктивной алгебраической группы K на неприводимом алгебраическом многообразии X называется *сферическим*, если борелевская подгруппа группы K имеет в X открытую орбиту. Следующий результат вытекает из общей теории сферических действий.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны*:

(1) *для всякого $\lambda \in \Lambda_I^+$ ограничение представления $R_G(\lambda)$ на подгруппу H имеет простой спектр* (*то есть всякое неприводимое представление группы H входит в $R_G(\lambda)$ с кратностью не выше* 1);

(2) *подгруппа H действует сферично на многообразии флагов G/P_I.*

Легко видеть, что в условиях теоремы 1 для всякого $\lambda \in \Lambda_I^+$ ограничение представления $R_G(\lambda)$ на подгруппу H однозначно определяется

полугруппой Γ_I:
$$R_G(\lambda)|_H \simeq \bigoplus_{\mu \in \mathrm{M}^+ : (\lambda;\mu) \in \Gamma_I} R_H(\mu).$$
В связи с этим представляет интерес задача вычисления полугрупп ветвления, соответствующих всем сферическим действиям на многообразиях флагов. В свою очередь, проблема классификации всех сферических действий на многообразиях флагов к настоящему моменту решена лишь частично; ниже приводятся все случаи, для которых известна полная классификация:
(C1) H — подгруппа Леви в G [5];
(C2) H — симметрическая подгруппа в G [2];
(C3) G — особая простая группа, H — максимальная редуктивная подгруппа, $|I| = 1$ [3];
(C4) $G = \mathrm{SL}_n$ [1].

Описание всех полугрупп ветвления в случае (C3) получено в [3], а в случае (C1) следует из результатов диссертации [4]. В нашей работе вычисляются все полугруппы ветвления для случаев (C2) и (C4). При этом важная априорная информация о полугруппах ветвления даётся следующей теоремой, также вытекающей из общей теории.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1. *Тогда полугруппа Γ_I свободна, причём её ранг равен количеству простых дивизоров в G/P_I, инвариантных относительно фиксированной борелевской подгруппы группы H.*

Таким образом, вычисление полугруппы ветвления, соответствующей заданному сферическому действию на многообразии флагов, естественно разбивается на следующие два этапа:

(1) найти ранг полугруппы ветвления;

(2) указать в нужном количестве её неразложимые элементы.

Отметим, что в большинстве рассматриваемых нами случаев наибольшую сложность представляет этап (1), в то время как на этапе (2) достаточно вычислить правила ветвления для нескольких «небольших» неприводимых представлений группы G.

Список литературы

[1] Р.С. Авдеев, А.В. Петухов. Сферические действия на многообразиях флагов. Матем. сборник **205** (2014), no. 9, 3–48; arXiv: `math.AG/1401.1777`.
[2] X. He, K. Nishiyama, H. Ochiai, Y. Oshima. On orbits in double flag varieties for symmetric pairs. Transform. Groups **18** (2013), no. 4, 1091–1136; arXiv: `math.RT/1208.2084`.

[3] B. Niemann. Spherical affine cones in exceptional cases and related branching rules, preprint, 2011; arXiv: `math.RT/arXiv:1111.3823`.
[4] Е.В. Пономарёва. Двойные многообразия флагов и их применение в теории представлений. Дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук. МГУ, 2015; `http://mech.math.msu.su/~snark/files/diss/0089diss.pdf`.
[5] J.R. Stembridge. Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters. Representation theory **7** (2003), 404–439.

Бесконечная транзитивность и специальные автоморфизмы

И.В. Аржанцев
Высшая школа экономики, Москва, Россия
`arjantsev@hse.ru`

Действие группы G на множестве X называется m-транзитивным, если оно транзитивно на наборах из m попарно различных точек на X. Действие бесконечно транзитивно, если оно m-транзитивно для любого натурального m. Легко видеть, что симметрическая группа S_n действует n-транзитивно на множестве из n элементов, тогда как действие знакопеременной группы A_n на этом множестве $(n-2)$-транзитивно. Обобщение классического результата Жордана [10], использующее классификацию конечных простых групп, утверждает, что других m-транзитивных действий конечных групп для $m > 5$ нет.

Ясно, что группа $S(X)$ перестановок бесконечного множества X действует на X бесконечно транзитивно. Первый пример эффективного бесконечно транзитивного действия свободной группы F_n с числом порождающих n от 2 до 8 построен в [16]; о дальнейших результатах в этом направлении см. [8, 12] и работы, указанные в этих статьях.

Бесконечная транзитивность на вещественных алгебраических многообразиях изучалась в [11, 5, 15]. Кратно транзитивные действия вещественных групп Ли классифицированы в [6].

В докладе мы рассмотрим кратно транзитивные действия в категории алгебраических многообразий над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. Классификация кратно транзитивных действий алгебраических групп получена в работе [14]. В частности, там доказано, что единственным 3-транзитивным действием является действие группы $\mathrm{PGL}(2)$ проективной прямой $\mathbb{P}^1$. По аналогии с группой перестановок естественно спросить о свойствах транзитивности для полной группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ многообразия X. Феномен бесконечной транзитивности для $\mathrm{Aut}(X)$ в аффинном и квазиаффинном случае изучался во многих работах, см. [17, 13, 3, 2, 9, 4]. Центральную роль здесь играет группа специальных автоморфизмов $\mathrm{SAut}(X)$. Более точно, пусть $\mathbb{G}_a$ (соотв., $\mathbb{G}_m$) — аддитивная (соотв., мультипликативная) группа основного поля $\mathbb{K}$. Обозначим через $\mathrm{SAut}(X)$ подгруппу в $\mathrm{Aut}(X)$ порождённую всеми $\mathbb{G}_a$-подгруппами. Пусть X — неприводимое аффинное многообразие размерности $\geqslant 2$. Предположим, что группа $\mathrm{SAut}(X)$ действует транзитивно на множестве гладких точек X_{reg}. Тогда [2, Theorem 0.1] утверждает, что это действие бесконечно транзитивно.

Мы рассматриваем вопрос о том, является ли транзитивность $\mathrm{SAut}(X)$ единственной возможностью для бесконечной транзитивности действия группы $\mathrm{Aut}(X)$. В работе [1] показано, что это так, если X — неприводимое квазиаффинное многообразие, допускающее нетривиальное $\mathbb{G}_a$- или $\mathbb{G}_m$-действие; более того, 2-транзитивность группы автоморфизмов влечет бесконечную транзитивность. Частный случай этого результата получен ранее в работе [7]. Мы предполагаем, что данный результат справедлив без дополнительного ограничения на существование действия одномерной группы.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev. Infinite transitivity and special automorphisms; arXiv: `math.AG/1610.09115`.

[2] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. **162** (2013), no. 4, 767–823.

[3] И.В. Аржанцев, М.Г. Зайденберг, К.Г. Куюмжиян. Многообразия флагов, торические многообразия и надстройки: три примера бесконечной транзитивности. Мат. сборник **203** (2012), no. 7, 3–30.

[4] I. Arzhantsev, A. Perepechko, H. Suess. Infinite transitivity on universal torsors. J. London Math. Soc. **89** (2014), no. 3, 762–778.

[5] J. Blanc, F. Mangolte. Geometrically rational real conic bundles and very transitive actions. Compos. Math. **147** (2011), 161–187.

[6] A. Borel. Les bouts des espaces homogènes de groupes de Lie. Ann. Math. (2) **58** (1953), 443–457.

[7] R. Budylin, S. Gaifullin, A. Trushin. Affine multiplicative flexible varieties. In preparation, 2016.

[8] P. Fima, S. Moon, Y. Stalder. Highly transitive actions of groups acting on trees. Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), no. 12, 5083–5095.

[9] H. Flenner, S. Kaliman, M. Zaidenberg. The Gromov–Winkelmann theorem for flexible varieties. J. Eur. Math. Soc., to appear; arXiv: `mathAG/1305.6417`.

[10] C. Jordan. Théorèmes sur les groupes primitifs. J. Math Pures Appl. **6** (1871), 383–408.
[11] J. Huisman, F. Mangolte. The group of automorphisms of a real rational surface is n-transitive. Bull. London Math. Soc. **41** (2009), 563–568.
[12] M. Hull, D. Osin. Transitivity degrees of countable groups and acylindrical hyperbolicity. Israel J. Math., to appear; arXiv: `math.GR/1501.04182`.
[13] S. Kaliman, M. Zaidenberg. Affine modifications and affine hypersurfaces with a very transitive automorphism group. Transform. Groups **4** (1999), no. 1, 53–95.
[14] F. Knop. Mehrfach transitive Operationen algebraischer Gruppen. Arch. Math. **41** (1983), no. 5, 438–446.
[15] K. Kuyumzhiyan, F. Mangolte. Infinitely transitive actions on real affine suspensions. J. Pure Appl. Algebra **216** (2012), 2106–2112.
[16] T. McDonough. A permutation representation of a free group. Quart. J. Math. Oxford, Ser. **28** (1977), no. 3, 353–356.
[17] Z. Reichstein. On automorphisms of matrix invariants. Trans. Amer. Math. Soc. **340** (1993), no. 1, 353–371.

Единообразный подход к построению базисов типа Гельфанда–Цетлина для серий A, B, C, D

Д.В. Артамонов
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
`artamonov.dmitri@gmail.com`

Доклад основан на препринтах автора [2], [3], [4].

В 1950-м году в ДАН СССР вышли две короткие статьи И.М. Гельфанда и М.Л. Цетлина, в которых они привели построили индексацию базисных векторов в конечномерном представлении алгебры Ли gl_N или o_N и привели формулы для действия генераторов алгебры на эти векторы. Статьи не содержали вывода. Полный вывод этих формул был опубликован только в 60-х годах независимо Д.П. Желобенко [1] и Бидерхарном и Бэрдом.

Построение аналогичного базиса для алгебры sp_{2n} встречает новые трудности. Прежде всего, конструкция Гельфанда–Цетлина предполагает исследование ветвления неприводимого представления при ограничении $sp_{2n} \downarrow sp_{2n-2}$. Но в случаях gl_N и sp_{2n} это ветвление ведёт себя существенно по-разному: в первом случае одно неприводимое представление gl_{N-1} возникает однократно, а во втором может возникать с кратностью. Тем не менее, в [1] Желобенко решил эту проблему довольно элементарными методами и построил индексацию базисных векторов с помощью таблиц типа Гельфанда–Цетлина. Однако, решить проблему вывода формул для действия ему не удалось. Это было сделано только в 1999-ом году А.И. Молевым с использованием новой весьма сложной техники. Также им были построены базисы типа Гельфанда–Цетлина для ортогональных алгебр, основанные на ограничениях внутри серий B и D. Мы будем называть их базисами для серий B и D.

В докладе будет рассказано, как конструкция базисных векторов Гельфанда–Цетлина–Желобенко может быть применена к сериям B и D. В основе построения будет лежать задача расширения. Под этим мы понимаем следующее. Пусть g_n — алгебра Ли типа gl_{n+1}, sp_{2n}, o_{2n+1} или o_{2n}, а g_{n-1} — алгебра Ли типа gl_{n-1}, sp_{2n-2}, o_{2n-1} или o_{2n-2}. Мы покажем, как по решению задачи $g_2 \downarrow g_1$ строятся решения задачи $g_n \downarrow g_{n-1}$. Эта процедура окажется совершенно одинакова для всех серий. Эта связь позволит построить базис типа Гельфанда–Цетлина–Желобенко для всех серий A, B, C, D.

Кроме того, будет обсуждена связь такого базиса с базисом Гельфанда–Цетлина–Молева для этих серий.

Список литературы

[1] Д.П. Желобенко. Классические группы. Спектральный анализ конечномерных представлений. Успехи мат. наук **17** (1961), 27—120.

[2] D.V. Artamonov. The comparison Gelfand–Tsetlin–Molev and Gelfand–Tsetlin–Zhelobenko bases for sp_2n; arXiv: `math.RT/1607.08704`.

[3] D.V. Artamonov. The Gelfand–Tsetlin–Zhelobenko and Gelfand–Tselin–Molev base vectors for the series B; arXiv: `math.RT/1608.05567`.

[4] D.V. Artamonov. A unified approach to construction of Gelfand–Tsetlin–Zhelobenko base vectors for series A, B, C, D; arXiv: `math.RT/1609.01635`.

Классификация линейных отображений квадратичных и симплектических пространств

А.Д. Бережной
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
beradz@yandex.com

Будем называть пространством со скалярным умножением комплексное векторное пространство U, снабжённое «скалярным умножением» — невырожденной симметрической или кососимметрической билинейной формой $\langle u, u' \rangle$. Если скалярное умножение симметрично (соотв., кососимметрично), то будем называть пространство U квадратичным (соотв, симплектическим) и будем писать $\operatorname{sgn}(U) = 1$ (соотв., $\operatorname{sgn}(U) = -1$). Автоморфизмом пространства U будем называть невырожденное линейное преобразование, сохраняющее скалярное произведение. Группу автоморфизмов будем обозначать через $\operatorname{Aut}(U)$. С помощью скалярного умножения будем отождествлять пространство U с сопряжённым пространством.

Пусть U и V — два пространства со скалярным умножением и $L(U, V)$ — пространство всех линейных отображений из U в V. Доклад посвящен классификации элементов пространства $L(U, V)$ относительно естественного действия группы $\operatorname{Aut}(U) \times \operatorname{Aut}(V)$.

Для всякого линейного отображения $A \in L(U, V)$ определено сопряжённое отображение $A^* \in L(V, U)$. Рассмотрим линейный оператор $P := A^*A$ в пространстве U. Он будет самосопряжённым или кососамосопряжённым в зависимости от знака $\operatorname{sgn}(U) \operatorname{sgn}(V)$. Положим $W := \operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} P$. Легко видеть, что

$$\dim U + \dim \operatorname{Ker} P - 2 \dim W \leqslant \dim V. \tag{$*$}$$

Теорема 1. *Пусть P — самосопряжённый или кососамосопряжённый (в зависимости от знака $\operatorname{sgn}(U) \operatorname{sgn}(V)$) линейный оператор в пространстве U и $W \subset \operatorname{Ker} P$ — какое-то подпространство. Если выполнено неравенство $(*)$, то существует единственное с точностью до действия группы $Aut\,(V)$ линейное отображение $A \in L(U, V)$, для которого $A^*A = P$ и $\operatorname{Ker} A = W$.*

В частности, если оператор P невырожден и $\dim U \leqslant \dim V$, то существует единственное с точностью до действия группы $Aut\,(V)$ линейное отображение A, для которого $A^*A = P$. Тем самым классификация линейных отображений $A \in L(U, V)$, для которых оператор A^*A невырожден, сводится к известной классификации самосопряжённых или кососамосопряжённых операторов (или, что эквивалентно, симметрических или кососимметрических билинейных форм) в пространстве U.

Теорема 2. *Для всякого $A \in L(U,V)$ существуют однозначно определённые ортогональные разложения $U = U^0 \oplus U^{\neq 0}$ и $V = V^0 \oplus V^{\neq 0}$ такие, что $A\left(U^0\right) \subset V^0$, $A\left(U^{\neq 0}\right) \subset V^{\neq 0}$ и оператор A^*A нильпотентен на U^0 и невырожден на $U^{\neq 0}$.*

Таким образом, классификация линейных отображений $A \in L(U,V)$ сводится к классификации троек (U, P, W), где U — пространство со скалярным умножением, P — самосопряжённый или кососамосопряжённый нильпотентный оператор в нём и W — подпространство в $\mathrm{Ker}\, P$.

Теорема 3 *Всякая такая тройка (U, P, W) разлагается в прямую сумму неразложимых троек перечисленных ниже видов, причем набор этих троек определён однозначно с точностью до изоморфизма.*

Ниже приводится список неразложимых троек. В каждом случае указываются матрица G скалярного умножения в некотором базисе, матрица оператора P (в том же базисе) и подпространство W. При этом используются следующие обозначения некоторых матриц порядка r:

$$J_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad G_r = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \quad F_r = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & \iddots & & \\ (-1)^{r-1} & & & \end{pmatrix}.$$

Через e_1 обозначается первый базисный вектор, а через f_1 — $(r+1)$-ый (в случае, когда $\dim U = 2r$).

I.1. Оператор P — самосопряжённый, U — квадратичное пространство

a. $G = G_r$, $P = J_r$, $W = 0$;

b. $G = G_r$, $P = J_r$, $W = \langle e_1 \rangle$;

c. $G = \begin{pmatrix} 0 & G_r \\ G_r & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & J_r \end{pmatrix}$, $W = \langle e_1 \rangle$.

I.2. Оператор P — самосопряжённый, U —симплектическое пространство

a. $G = \begin{pmatrix} 0 & G_r \\ -G_r & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & J_r \end{pmatrix}$, $W = 0$;

b. $G = \begin{pmatrix} 0 & G_r \\ -G_r & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & J_r \end{pmatrix}$, $W = \langle e_1, f_1 \rangle$;

c. $G = \begin{pmatrix} 0 & G_r \\ -G_r & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & J_r \end{pmatrix}$, $W = \langle e_1 \rangle$.

II.1. Оператор P — кососамосопряжённый, U — квадратичное пространство, r нечетно или же U — симплектическое пространство, r четно

a. $G = F_r$, $P = J_r$, $W = 0$;

b. $G = F_r$, $P = J_r$, $W = \langle e_1 \rangle$;

c. $G = \begin{pmatrix} 0 & F_r \\ F_r & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & J_r \end{pmatrix}$, $W = \langle e_1 \rangle$.

II.2. Оператор P — кососамосопряжённый, U —симплектическое пространство, r нечетно или же U — квадратичное пространство, r четно

a. $G = \begin{pmatrix} 0 & F_r \\ -F_r & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & J_r \end{pmatrix}$, $W = 0$;

b. $G = \begin{pmatrix} 0 & F_r \\ -F_r & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & J_r \end{pmatrix}$, $W = \langle e_1, f_1 \rangle$;

c. $G = \begin{pmatrix} 0 & F_r \\ -F_r & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & J_r \end{pmatrix}$, $W = \langle e_1 \rangle$.

Рефлективные анизотропные гиперболические решетки ранга 4

Н.В. Богачёв
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Московский физико-технический институт, Москва, Россия
nvbogach@mail.ru

Гиперболической решёткой называется свободная абелева группа L, снабжённая невырожденной целочисленной симметрической билинейной формой (называемой *скалярным умножением*) сигнатуры $(n, 1)$. Решётка L называется *изотропной*, если соответствующая квадратичная форма представляет нуль, и *анизотропной*, если не представляет. Гиперболическая решётка называется 1.2-*рефлективной*, если её группа автоморфизмов содержит подгруппу конечного индекса, порождённую 1- и 2-отражениями.

Обозначим через $[C]$ квадратичную решётку, скалярное умножение в которой в некотором базисе задается симметричной матрицей C, а через $L \oplus M$ — ортогональную сумму решёток L и M.

Основным результатом докладчика (см. [1]) является

Теорема 1. *Всякая максимальная 1.2-рефлективная анизотропная гиперболическая решётка ранга 4 изоморфна либо решетке* $[-7] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$, *либо решётке* $[-15] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$.

Список литературы

[1] N.V. Bogachev. Reflective anisotropic hyperbolic lattices of rank 4; arXiv: `math.GR/1610.06148`.

Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольной группы Коксетера и прямоугольной группы Артина

Я.А. Верёвкин
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
`verevkin_j.a@mail.ru`

Доклад основан на совместной работе автора с Пановым Тарасом Евгеньевичем [1].

Полиэдральное произведение представляет собой функториальную комбинаторно-топологическую конструкцию, сопоставляющую топологическое пространство $(X, A)^K$ паре топологических (X, A) и конечному симплициальному комплексу K. Аналогичная конструкция имеется и в категории групп и называется граф-произведением. Частным случаем граф-произведений являются прямоугольные группы Коксетера, играющие важную роль в геометрической теории групп. Особый интерес представляют геометрические прямоугольные группы Коксетера, порождённые отражениями в гипергранях многогранников, реализуемых в пространстве Лобачевского с прямыми двугранными углами. Построены и изучены полиэдральные произведения для классифицирующих пространств прямоугольных групп Артина и Коксетера, общих граф-произведений групп и их коммутантов. В качестве дополнения мы даём критерий свободности для коммутанта граф-произведения групп, а также приводим явный минимальный набор образующих для коммутанта прямоугольной группы Коксетера.

Список литературы

[1] Т.Е. Панов, Я.А. Верёвкин. Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера. Матем. сборник **207** (2016), no. 11; arXiv: `math.GR/1603.06902`.

О характеризации группы условиями на классы сопряжённых элементов

Г.В. Воскресенская
Самарский университет, Самара, Россия
galvosk@mail.ru

Пусть G — конечная группа, $c(n, G)$ — количество классов сопряжённых элементов, на которые распределяются элементы порядка n в группе G. Мы расскажем в докладе о свойствах функции $c(n, G)$. Обсуждение сосредотачивается вокруг следующей гипотезы.

Основная гипотеза. *Пусть G, H — конечные группы равных порядков. Тогда $c(n, G) = c(n, H)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ в том и только в том случае, когда $G \cong H$.*

Эта гипотеза верна для групп небольших порядков или хорошо известной структуры, например, абелевых. В общем случае она не доказана и не опровергнута. Но даже если она не верна в общем случае, было бы интересно получить к ней контрпример.

В ряде случаев можно показать, как условия на значения $c(n, G)$ определяют группу, даже если априори не указан порядок группы. Приведем два результата.

Теорема 1. *Сумма $\sum_{n\in\mathbb{N}} c(n, G) = |G|$ в том и только в том случае, когда G — абелева группа.*

Теорема 2. *Пусть p — нечётное простое число. Тогда условия*

$$c(p, G) = \frac{p-1}{2}, \quad c(1, G) = c(2, G) = 1, \quad c(n, G) = 0 \text{ для всех } n \neq 1,\ 2,\ p,$$

выполняются в том и только в том случае, когда $G \cong D_p$.

Список литературы

[1] Г.С.М. Коксетер, У.О.Дж. Мозер. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. — М.: Наука., 1980.
[2] М. Холл. Теория групп. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1962.

Автоморфизмы и изоморфизмы некоторых триномиальных гиперповерхностей

С.А. Гайфуллин
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
sgayf@yandex.ru

Основное поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто и нулевой характеристики.

Назовём *триномиальной поверхностью* аффинное алгебраическое подмногообразие в $s+p+q$-мерном аффинном пространстве, заданное уравнением

$$a_1^{k_1}\dots a_s^{k_s} + b_1^{l_1}\dots b_p^{l_p} + c_1^{m_1}\dots c_q^{m_q} = 0,$$

где a_i, b_j, c_r – координаты на аффинном пространстве, $s, p, q, k_i, l_j, m_r \in \mathbb{N}$.

Локально нильпотентным дифференцированием на алгебре регулярных функций $\mathbb{K}[X]$ называется линейное отображение $\partial\colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, удовлетворяющее тождеству $\partial(fg) = f\partial(g) + g\partial(f)$ и со свойством $\forall f \in \mathbb{K}[X]$ $\exists n \in \mathbb{N}\colon \partial^n(f) = 0$.

Пересечение ядер всех локально нильпотентных дифференцирований называется *инвариантом Макар-Лиманова* многообразия X и обозначается $\mathrm{ML}(X)$. Если $\mathrm{ML}(X) = \mathbb{K}[X]$, то многообразие называется *жёстким.*

В работе [1] показано, что факториальная триномиальная гиперповерхность является жёсткой тогда и только тогда, когда все показатели степеней k_i, l_j, m_r не меньше 2. В работе [2] описана группа регулярных автоморфизмов жёсткой триномиальной гиперповерхности и доказано, что две жёсткие триномиальные гиперповерхности изоморфны тогда и только тогда, когда их уравнения совпадают с точностью до перенумерации переменных.

Пусть $X = \{a_1^{k_1}\dots a_s^{k_s} + b_1^{l_1}\dots b_p^{l_p} + c_1^{m_1}\dots c_q^{m_q} = 0\} \subset \mathbb{K}^{s+p+q}$ – жёсткая триномиальная гиперповерхность. Рассмотрим следующую триномиальную гиперповерхность:

$$Y = \{xa_1^{k_1}\dots a_s^{k_s} + b_1^{l_1}\dots b_p^{l_p} + c_1^{m_1}\dots c_q^{m_q} = 0\} \subset \mathbb{K}^{s+p+q+1}.$$

Теорема 1. $\mathrm{ML}(Y) = \mathbb{K}[a_1, \dots, a_s]$.

Следствие. *Пусть φ – регулярный автоморфизм Y. Тогда для каждого $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ найдутся $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ и $\lambda \in \mathbb{K}$ такие, что $\varphi(a_i) = \lambda a_j$.*

Теорема 2. *Если триномиальная гиперповерхность Y изоморфна какой-нибудь триномиальной гиперповерхности Z, то их уравнения совпадают с точностью до перенумерации переменных.*

Основным техническим инструментом при доказательстве теоремы 1 является разложение локально нильпотентного дифференцирования градуированной алгебры в сумму однородных дифференцирований и использование того, что крайние однородные компоненты локально нильпотентны, см. [3].

Результат теоремы 1 можно рассматривать как аналогичный результату работы [4], в которой вычисляется инвариант Макар-Лиманова обобщённой поверхности Данилевского $\mathrm{ML}(\{x^n y = P(z)\}) = \mathbb{K}[x]$.

Список литературы

[1] I.V. Arzhantsev. On rigidity of factorial trinomial hypersurfaces. Int. J. Algebra Comput., to appear; arXiv: `math.AG/1601.02251`.

[2] I.V. Arzhantsev, S.A. Gaifullin. The automorphism group of a rigid affine variety. Math. Nachr., to appear; arXiv: `math.AG/1607.03472`.

[3] H. Flenner, M. Zaidenberg. On the uniqueness of $\mathbb{C}^*$-action on affine surfaces. In: Affine Algebraic Geometry, Contemp. Math. **369**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 97–111.

[4] L. Makar-Limanov. On the group of automorphisms of a surface $x^n y = P(z)$. Israel J. Math. **121** (2001), 113–123.

Об индексах Кронекера присоединённых операторов пары матриц

А.А. Гаража

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

sasha.garazha@mail.ru

Для каждой пары кососимметрических билинейных форм (f, g) в комплексном векторном пространстве существует базис, в котором матрицы форм f и g одновременно приводятся к блочно-диагональному виду с блоками двух типов: жордановыми и кронекеровыми. Если размеры кронекеровых блоков — $2m_0 + 1, \ldots, 2m_k + 1$, то числа $m_0, \ldots, m_k$ называются индексами Кронекера пары форм (f, g).

С каждым элементом a редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ связана кососимметрическая билинейная форма f_a на $\mathfrak{g}$, задаваемая формулой $f_a(x, y) = (a, [x, y])$, где $(\cdot, \cdot)$ — инвариантное скалярное умножение на $\mathfrak{g}$. Для пары элементов a, b общего положения индексы Кронекера пары (f_a, f_b) однозначно определяются алгеброй $\mathfrak{g}$ и равны уменьшенным на единицу степеням базисных инвариантов присоединённой группы.

Доклад посвящен вычислению индексов Кронекера пары (f_A, f_B), где A — фиксированная произвольная матрица из $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, а B — матрица общего положения.

Для этого используется метод Кронекера, который заключается в следующем. Рассматривается подмодуль $Z := \mathrm{Ker}(f_B - t \cdot f_A)$ модуля $\mathfrak{gl}_n[t] := \mathfrak{gl}_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t]$ над кольцом $\mathbb{C}[t]$ и находится его «минимальный базис» — базис, старшие коэффициенты элементов которого линейно независимы. Тогда степени многочленов этого базиса — это индексы Кронекера пары (A, B), а их коэффициенты составляют кронекерову часть базиса билагранжева подпространства относительно пары форм f_A, f_B. Это, в свою очередь, позволяет построить полную систему функций в биинволюции относительно двух пуассоновых структур на $\mathfrak{g}$ — канонической структуры $\{\ ,\ \}_B$ (где B рассматривается как переменная матрица) и структуры «с замороженным аргументом» $\{\ ,\ \}_A$ (см. [1]).

Введём следующие обозначения. Пусть $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ — собственные числа матрицы A, и собственному значению λ_k соответствуют жордановы клетки размеров $n_{k,1} \geqslant \dots \geqslant n_{k,i_k}$. Упорядочим собственные значения матрицы A (с учетом кратностей) следующим образом:

$$\{\mu_0, \dots, \mu_{n-1}\} = \{\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{n_{1,1}}, \dots, \underbrace{\lambda_s, \dots, \lambda_s}_{n_{s,1}}, \dots, \underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{n_{1,m}}, \dots, \underbrace{\lambda_s, \dots, \lambda_s}_{n_{s,m}}\}$$

Положим $h_n(x) := \chi_{B-tA}(x)$ и определим многочлены $h_{n-1}, \dots, h_0$ с помощью формул $h_{k+1}(x) = (x + \mu_k t) h_k(x) + r_k$. Легко видеть, что элементы $E, (B - tA), \dots, (B - tA)^{n-1}$ составляют базис модуля Z. Но этот базис, вообще говоря, не является минимальным.

Теорема 1. *Элементы $h_0(B - tA), \dots, h_{n-1}(B - tA)$ составляют минимальный базис модуля Z.*

Обозначим через $l_1, ..., l_m$ степени инвариантных множителей матрицы A, то есть $l_i := \sum\limits_{j=1}^{s} n_{j,i}$.

Теорема 2. *Индексы Кронекера пары (A, B) выражаются по формуле*

$$m_i = i - \max\{j\colon \sum_{k=1}^{j} l_k \leqslant i\}.$$

Список литературы

[1] A. Bolsinov, P. Zhang. Jordan–Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras; arXiv: `math.RT/1211.0579`.

О надгруппах $\mathrm{EO}(2l-1,R)$ в $\mathrm{SO}(2l,R)$

П.Б. Гвоздевский, Д.А. Мамаев
Санкт-Петербургский государственный университет
gvozdevskiy96@gmail.com, dan.mamaev@gmail.com

Данное исследование завершает цикл работ, в которых рассматриваются надгруппы групп Шевалле над произвольными коммутативными кольцами, содержащих элементарную подгруппу группы Шевалле меньшего ранга над тем же кольцом, вложенную как скрученная подгруппа, для всех скручиваний порядка 2.

Это последний остававшийся неразобранным случай, после того как Николай Вавилов и Виктор Петров в [1], а также, независимо, Ю Хонг в [4] описали надгруппы симплектической группы, а Александр Лузгарев в [3] описал надгруппы F_4 в E_6.

Пусть R — коммутативное кольцо с 1. Базис свободного модуля R^{2l}, на котором действует полная линейная группа $\mathrm{GL}(2l,R)$, занумерован числами $1, \ldots, l, -l, \ldots, -1$, и соответствующим образом занумерованы строки и столбцы матриц из $\mathrm{GL}(2l,R)$. Ортогональная группа $\mathrm{O}(2l,R)$ — это подгруппа в $\mathrm{GL}(2l,R)$, сохраняющая квадратичную форму $q(x)=x_1x_{-1}+\ldots+x_lx_{-l}$. $\mathrm{SO}(2l,R)$ — это ядро инварианта Диксона. Наивное определение $\mathrm{SO}(2l,R)$ как пересечения $\mathrm{O}(2l,R)$ и специальной ортогональной группы $\mathrm{SL}(2l,R)$ совпадает с приведённым выше при $2\in R^*$, однако 2 не предполагается обратимым. Рассмотрим нечётную ортогональную группу $\mathrm{SO}(2l-1,R)$, реализованную как подгруппа в $\mathrm{SO}(2l,R)$, являющаяся стабилизатором вектора e_l-e_{-l}. Это вложение соответствует реализации системы корней типа B_{l-1} как скручивания системы корней типа D_l. Цель исследования состоит в получении описания надгрупп элементарной подгруппы $\mathrm{EO}(2l-1,R)$ в $\mathrm{SO}(2l,R)$. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть R — коммутативное кольцо с 1, $l\geqslant 4$. Тогда для любой подгруппы H в $\mathrm{SO}(2l,R)$, содержащей элементарную подгруппу $\mathrm{EO}(2l-1,R)$, существует единственный идеал $A\trianglelefteq R$ такой, что*

$$\mathrm{EEO}(2l-1,R,A)\leqslant H\leqslant N_{\mathrm{SO}(2l,R)}(\mathrm{EEO}(2l-1,R,A)),$$

где $\mathrm{EEO}(2l-1,R,A)$ — это произведение элементарной подгруппы $\mathrm{EO}(2l-1,R)$ и относительной элементарной подгруппы $\mathrm{EO}(2l,R,A)$.

Главным инструментом при доказательстве данной теоремы служит метод разложения унипотентов, впервые опубликованный в [5].

Важным дополнением к теореме 1 является следующий результат, в котором явно вычисляется нормализатор $\mathrm{EEO}(2l-1, R, A)$. Рассмотрим гомоморфизм редукции $\rho_A\colon \mathrm{GL}(n, R) \to \mathrm{GL}(n, R/A)$. Обозначим через $\mathrm{CSGO}(2l-1, R, A)$ полный прообраз группы $\mathrm{SGO}(2l-1, R)$ относительно ρ_A, где $\mathrm{SGO}(2l-1, R)$ — это стабилизатор прямой, содержащей $e_l - e_{-l}$.

Теорема 2. *Пусть R — коммутативное кольцо с 1, $l \geqslant 4$ или $l = 3$ и у R нет полей вычетов из 2 элементов. Тогда для любого идеала $A \trianglelefteq R$*

$$N_{\mathrm{SO}(2l,R)}(\mathrm{EEO}(2l-1, R, A)) = \mathrm{CSGO}(2l-1, R, A).$$

Таким образом, теоремы 1 и 2 в совокупности утверждают, что для любой группы H, $\mathrm{EO}(2l-1, R) \leqslant H \leqslant \mathrm{SO}(2l, R)$ существует единственный идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что

$$\mathrm{EEO}(2l-1, R, A) \leqslant H \leqslant \mathrm{CSGO}(2l-1, R, A).$$

Такое описание надгрупп называется стандартным. Именно такое описание получено в работах [1], [2] и [3].

Ключевым наблюдением для доказательства теоремы 2 является следующая теорема, которая представляет и самостоятельный интерес.

Теорема 3. *R — коммутативное кольцо, $l \geqslant 4$ или $l = 3$ и у R нет полей вычетов из 2 элементов. $E = \mathrm{EO}(2l-1, R)$, $\Gamma = \mathrm{SO}(2l-1, R)$, $G = \mathrm{SO}(2l, R)$, $\Omega = \mathrm{SGO}(2l-1, R)$. Тогда*

$$N_G(E) = N_G(\Gamma) = N_G(\Omega) = \mathrm{Tran}_G(E, \Gamma) = \mathrm{Tran}_G(E, \Omega) = \Omega.$$

Список литературы

[1] Н.А. Вавилов, В.А. Петров. О надгруппах $\mathrm{Ep}(2l, R)$. Алгебра и анализ **15** (2003), no. 4, 72–114.

[2] Н.А. Вавилов, В.А. Петров. О надгруппах $\mathrm{EO}(n, R)$. Алгебра и анализ **19** (2007), no. 2, 10–51.

[3] А.Ю. Лузгарёв. Описание надгрупп F_4 в E_6 над коммутативным кольцом. Алгебра и анализ **20** (2008), no. 6, 48–185.

[4] Y. Hong. Overgroups of symplectic group in linear group over commutative rings. J. Algebra **282** (2004), no. 1, 23–32.

[5] Н.А Вавилов, Е.Б. Плоткин, А.В. Степанов. Вычисления в группах Шевалле над коммутативными кольцами. Докл. АН СССР **307** (1989), no. 4, 788–791.

Открытые полуалгебраические действительные множества с транзитивными группами бирациональных преобразований

М.Х. Гизатуллин
Самара, Россия
gizmarat@yandex.ru

1. Введение

Легче всего обсуждать двумерные варианты предлагаемых ниже конструкций, имеющих естественную пространственную природу. Причина возможных трудностей в том, что описание групп преобразований для возникающих многомерных объектов представляется крайне сложным. Тем не менее, мы не всегда будем избегать указаний на возможные недвумерные обобщения.

Скажем сначала о ситуации, где основное поле — поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Возьмём полную (компактную) комплексную алгебраическую поверхность S, на ней полную кривую (объединение римановых поверхностей) D, затем возьмём дополнение $X = S \setminus D$, рассмотрим группу $\mathrm{Bir}(S)_X$, состоящую из бирациональных преобразований поверхности S, всюду хорошо определённых на X и сохраняющих X, в частности, всякие иррегулярные нарушения для преобразований из $\mathrm{Bir}(S)_X$ допускаются лишь на «бесконечности» D (бесконечности по отношению к X; такую кривую D в старину называли «абсолютом» для X). Открытую поверхность X назовём бирационально однородной, если группа $\mathrm{Bir}(S)_X$ действует транзитивно на X. Из бирациональной однородности X следует, что каждая неприводимая компонента кривой D рациональна (является римановой сферой). Возможные конфигурации компонент бесконечно удалённой кривой D для однородных X можно классифицировать, по крайней мере, для минимальных компактификаций, и тем самым дать что-то вроде классификации однородных (более общо, так называемых квазиоднородных) открытых поверхностей, можно представить и какие-то описания образующих упомянутых групп, а для несложных конфигураций — описать соотношения между этими образующими. Многое из указанного было проделано докладчиком и В.И. Даниловым в [1] в давние семидесятые годы.

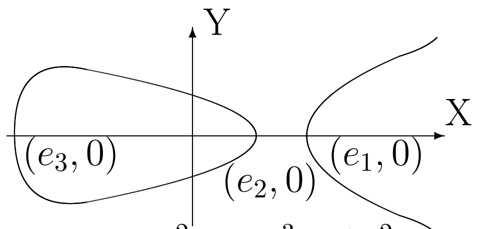
Теперь перейдём к основному полю действительных чисел. Возьмём алгебраическую поверхность S над этим полем, в ней (точнее, в множестве $S_{\mathbb{R}}$ её действительных точек) открытое подмножество X, заданное неравенством вида $F < 0$, где F всюду определённая на $S_{\mathbb{R}}$ рациональная функция, принимающая как положительные, так и отрицательные значения (иногда требуется более одного неравенства, чтобы отбросить лишние контуры). Рассмотрим группу $\mathrm{Bir}_{\mathbb{R}}(S)_X$ действительных бирациональных преобразований поверхности S, всюду хорошо определённых на X, сохраняющих X, и спросим себя, каковы те X, на множестве (вещественных) точек которых группа $\mathrm{Bir}_{\mathbb{R}}(S)_X$ действует транзитивно? Сразу отметим, что здесь возникает гораздо больше возможностей по сравнению с комплексным случаем. Причина открывающихся возможностей в том, что у используемых бирациональных преобразований точки неопределённости могут почти свободно метаться по большому открытому множеству $F > 0$ (а не по кривой D, как в комплексном случае), эти преобразования могут стягивать в точки пары мнимых (вещественно невидимых) сопряжённых кривых. Поэтому компонентами граничной кривой $F = 0$ могут оказаться вещественные овалы кривых, которые иррациональны над $\mathbb{C}$ (точнее, эллиптические, то есть над $\mathbb{C}$ представляются торами), рассмотрение таких компонент приводит нас к интересным связям с теорией эллиптических функций. Ниже в примерах отмечаются случаи с иррациональными компонентами.

В конце этого введения отметим, что возникающие группы бирациональных преобразований бесконечномерны, аналогично тому, что наблюдалось в комплексном случае в [1]. Пара высказываний о группах для двумерного случая сделана в конце тезисов.

2. Примеры

1. Граничные кубические кривые, поверхности, гиперповерхности.

Возьмём кубический многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$. С его помощью задаётся кубическая кривая $F(x, y) = 0$, где $F(x, y) = y^2 - f(x)$. Если $a > 0$ и многочлен f имеет три различных действительных корня e_1, e_2, e_3 ($e_1 > e_2 > e_3$), то множество действительных точек кривой имеет следующий вид.



Кривая $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Интересующая нас область X — внутренность левого овала, она задаётся неравенством $F < 0$ и дополнительным неравенством $x < e_1$. Область X

однородна в указанном выше смысле, так как бирациональные преобразования плоскости, продолжающие групповые отражения эллиптической кривой $F = 0$ относительно точек, принадлежащих правому контуру, порождают достаточную для транзитивности группу.

Эта картинка подсказывает и провоцирует естественные обобщения, простейшее из которых — неособая действительная кубическая поверхность, имеющая две действительные компоненты связности, одна из которых гомеоморфна сфере, а другая — вещественной проективной плоскости. Пространственная открытая область, имеющая границей сферообразную компоненту, однородна по причинам, аналогичным причинам однородности для открытого овала на рисунке. Конечно, вещественно двухкомпонентная кубическая поверхность иррациональна над $\mathbb{R}$, но рациональна над $\mathbb{C}$, однако если мы перейдём к следующей размерности, то есть к неособой действительной кубической гиперповерхности с двумя действительными компонентами связности, одна из которых гомеоморфна трёхмерной сфере, а другая — вещественному проективному пространству, то получим однородную открытую область со сферообразной границей, причём здесь уже граничная кубическая гиперповерхность иррациональна над $\mathbb{C}$ согласно знаменитому результату [2].

2. Граничные квартики.

Возьмём плоскую эллиптическую квартику $x^4 + y^2 - 1 = 0$, действительные точки которой образуют овал, похожий на единичную окружность (если в уравнении слагаемое x^4 заменить на x^2, то сходство превратится в совпадение), рассмотрим соответствующий открытый овал $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^2 - 1 < 0\}$. Является ли этот овал однородным относительно группы плоских вещественных кремоновых преобразований, сохраняющих овал и всюду внутри овала определённых? Да. Причина похожа на причину транзитивности группы для кубического овала, но здесь нет вспомогательного второго контура, поэтому используются бирациональные преобразования плоскости, продолжающие групповые отражения эллиптической квартики относительно пар комплексно сопряжённых точек. Те же соображения применимы к каждому из двух овалов плоской эллиптической квартики, состоящей из двух овалов.

Как иной плоский вариант, укажем так называемые одноконтурные бициркулярные плоские эллиптические квартики. Свойства бициркулярного овала аналогичны свойствам вещественной однокомпонентной квартики.

Несколько слов о следующей размерности. Можно закрутить вокруг оси абсцисс нашу изначальную квартику и получить поверхность $x^4 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, ограничивающую шарообразное открытое тело

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x^4 + y^2 + z^2 - 1 < 0\}$. Можно взять в пространстве поверхностный аналог упомянутой бициркулярной кривой, это будет так называемая циклида четвёртого порядка, гомеоморфная сфере. Эта циклида тоже будет границей чего-то шарообразного. Все эти шарообразные открытые тела однородны относительно группы пространственных вещественных пространственных бирациональных преобразований, сохраняющих тело и всюду внутри него определённых.

3. Квартики на поверхностях второго порядка.

Здесь мы опишем ситуации с овалообразными эллиптическими кривыми четвёртого порядка на неособых вещественных поверхностях второго порядка (то есть, эллипсоидах или гиперболоидах). Поверхности второго порядка, содержащие такую кривую C, образуют пучок. Пусть S — одна из поверхностей этого пучка. Можно построить бирациональные преобразования пространства, сохраняющие C и индуцирующие преобразования поверхности S, причём индуцированное преобразование будет вполне определено внутри заданного овала кривой C. Построенных преобразований достаточно для требуемой однородности открытого овала. Отметим, что так как C параметризуется тета-функциями Якоби, то явные формулы для преобразований естественным образом связаны с некоторыми тождествами для этих функций.

Далее, ясно, что только что приведённые рассмотрения частично обобщаются на случай многомерной квадрики и овала на ней, высекаемого другой квадрикой. Пример с богатой геометрией: на квадрике Плюккера можно взять овал, задаваемый подходящим квадратичным комплексом. Такой комплекс хоть и рационален над $\mathbb{C}$, но имеет ненулевой промежуточный якобиан в смысле [2].

3. О структуре групп для двумерного случая

Возникающие группы (упомянутые во введении) для случая $\dim_{\mathbb{R}}(X) = 2$ и иррациональной границы порождаются так называемыми преобразованиями де Жонкьера, то есть преобразованиями, переводящими некоторый пучок рациональных кривых малой степени (один или два) в аналогичный пучок. В этих условиях соответствующая группа не является простой, более того, имеется бесконечная цепь вложенных нормальных (по отношению ко всей группе) подгрупп.

Список литературы

[1] М.Х. Гизатуллин, В.И. Данилов. Автоморфизмы аффинных поверхностей I, II. Известия АН СССР. Серия математическая **39** (1975), no. 3, 523—565, **41** (1977), no. 1, 54—103.

[2] C.H. Clemens, P.A. Griffiths. The intermediate Jacobian of the cubic threefold. Ann. Math. (2) **95** (1972), no. 2, 281–356. Русский перевод: К.Г. Клеменс, Ф.А. Гриффитс. Промежуточный якобиан трёхмерной кубической гиперповерхности. Сборник переводов «Математика» **16**, (1972), no. 6, 3–32, **17** (1973), no. 1, 3–41.

О свойстве разделения в случае вещественных линейных пространств

В.М. Гичев
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия
gichev@ofim.oscsbras.ru

Пусть X — подмножество конечномерного векторного пространства V. Одно из введённых в работе [1] эквивалентных свойств X, определяющих свойство разделения (обозначаемое через SP), состоит в том, что любое векторное подпространство H коразмерности 1 в V линейно порождается множеством $X \cap H$. В статье [1] SP и близкие к SP свойства инвариантных множеств алгебраических групп, действующих в линейных пространствах над алгебраически замкнутым полем, характеризовались в алгебраических терминах. В случае вещественных линейных пространств и компактных групп Ли SP оно связано с оператором Лапласа–Бельтрами и свойствами его собственных функций.

Список литературы

[1] H. Kraft, N.R. Wallach. On the separation property of orbits in representation spaces. J. Algebra **258** (2002) 228–254.

Некоторые дополнения к классификации С. Ли действий групп Ли на поверхностях

В.В. Горбацевич
Москва, Россия
vgorvich@yandex.ru

Довольно широко распространено мнение о том, что задача классификации действий групп Ли (или соответствующих алгебр Ли векторных полей) на прямой и плоскости была полностью исчерпана исследованиями С. Ли. Цель доклада — показать, что это не так. Для локальной классификации это не совсем так, а вот для глобальной классификации — совсем не так.

Как известно, Софус Ли в конце 19-го века классифицировал, говоря современным языком, группы Ли, действующие на комплексных прямой и плоскости (опубликовано в 1893 году). Точнее, он классифицировал соответствующие алгебры Ли векторных полей. Он также нашел и классификацию для случаев вещественных прямой и плоскости. Подробный обзор результатов на эту тему (от С. Ли до недавних времен) и множество ссылок можно найти в статье [1] (это — перевод с английского статьи, сделанный самим автором статьи, и опубликованный в томе II переводов работ С. Ли, посвящённых, в частности, обсуждаемой в докладе теме).

Действия групп Ли вначале предполагались аналитическими (позже удалось сделать то же для гладких действий), а классификация — локальной. При этом классификация была не совсем полной — не были окончательно выделены неизоморфные действия, не была установлена алгебраическая структура алгебр Ли — алгебры Ли задавались через образующие (так делается и до сих пор за редкими исключениями). В [2], [3] эти недостатки были исправлены — приведена точная классификация (в комплексном случае, для вещественного подобный мой результат тоже получен и будет опубликован, я надеюсь, в недалёком будущем).

Что касается глобального описания действий групп Ли на одно- и двумерных многообразиях (или хотя бы на прямой и плоскости), то здесь до сих пор сделано очень мало. Транзитивные действия (и соответствующие однородные многообразия) были классифицированы Дж. Мостовым [4]. Однородными являются только следующие поверхности: $\mathbf{R^2}$, $\mathbf{R} \times \mathbf{S^1}$ (цилиндр), тор T^2, Mb (лист Мёбиуса), $S^2, \mathbf{RP^2}, \mathbf{K^2}$ (бутылка Клейна). Больше общих результатов подобного рода (для нетранзитивных действий), видимо, получено не было. Неоднократно исследовались действия на поверхностях групп Ли, не имеющие неподвижных точек, или изучались действующие на поверхностях группы Ли с точностью до изоморфизма.

Оказывается, что для построения обозримой глобальной классификации действий групп Ли на поверхностях приходится вводить некоторые дополнительные ограничения (в докладе будет подробно обоснована необходимость таких ограничений):

1. Естественно рассматривать только аналитические действия групп Ли.

2. Разумно ограничиться действиями, имеющими открытые орбиты.

3. Глобальные действия групп Ли нужно рассматривать только на компактных многообразиях.

4. Полезно наложить некоторые ограничения на множество неподвижных точек изучаемых действий. А именно, естественно ограничиться глобальны-

ми действиями групп Ли, для которых неподвижные точки изолированы (то есть не существует непрерывных семейств неподвижных точек).

Доказано, что при выполнении этих ограничений глобальное действие группы Ли (на компактной поверхности) возможно только для пяти поверхностей: T^2, Mb, S^2, $\mathbf{RP^2}$, $\mathbf{K^2}$ (все они допускают и транзитивные действия). Отметим, что это в точности все компактные поверхности с неотрицательной эйлеровой характеристикой. Доказательство основано на анализе сингулярных множеств (представляющих собой аналитические подмножества размерности $\leqslant 1$ на поверхности) для рассматриваемых действий групп Ли. Можно также детализировать описание действий указанного типа на этих пяти поверхностях. Они получаются довольно простой склейкой нескольких транзитивных действий на некомпактных поверхностях.

Для действий, удовлетворяющих лишь частично ограничениям 1–4, существует несколько конструкций действий групп Ли на многообразиях. Среди них — эквивариантный σ-процесс, о котором будет рассказано подробно. Он позволяет существенно изменять сингулярное множество действия, частично упрощая его.

Список литературы

[1] Б.П. Комраков. Группы преобразований и геометрические структуры (о некоторых результатах С. Ли сегодня). В книге: С. Ли. Симметрии дифференциальных уравнений. Том 2. — Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2011.

[2] В.В. Горбацевич. О классификации комплексных односвязных однородных пространств размерностей не более 2. Известия высших учебных заведений. Математика, 2013, no. 3, 16–32.

[3] В.В. Горбацевич. Интранзитивные алгебры Ли векторных полей на комплексной плоскости. Труды семинара по векторному и тензорному анализу **29** (2013), 27–38.

[4] G.D. Mostow. The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces. Ann. Math. **52** (1950), no. 3, 606–637.

Существенные сигнатуры и канонические базисы неприводимых представлений B_n и D_n

А.А. Горницкий
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
gnomage@mail.ru

Рассматриваются представления простых алгебр Ли и вопрос построения «канонического» весового базиса в произвольном неприводимом модуле старшего веса. Э.Б. Винберг предложил метод построения таких базисов путем применения к старшему вектору понижающих операторов, отвечающих всем отрицательным корням, и выдвинул ряд гипотез об их параметризации и структуре. Из работ Фейгина–Фурье–Литтельмана можно вывести истинность этих гипотез для случаев A_n, C_n. Кроме того, гипотезы верны для случаев G_2, B_3, D_4. Мы рассмотрим случаи D_n и B_n.

Пусть G — односвязная полупростая комплексная алгебраическая группа, $\mathfrak{g}$ — её касательная алгебра Ли. Имеется треугольное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^- \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u}^+$, где $\mathfrak{u}^-$ и $\mathfrak{u}^+$ — касательные алгебры отрицательной и положительной максимальных унипотентных подгрупп, а $\mathfrak{t}$ — картановская подалгебра, то есть касательная алгебра максимального тора T в G. Имеем: $\mathfrak{u}^+ = \langle e_\alpha \mid \alpha \in \Delta_+ \rangle$, $\mathfrak{u}^- = \langle e_{-\alpha} \mid \alpha \in \Delta_+ \rangle$, где Δ_+ — система положительных корней, а $e_{\pm\alpha}$ — корневые векторы.

Обозначим неприводимый G-модуль со старшим весом λ через $V(\lambda)$, пусть v_λ — старший вектор этого модуля.

Определение 1. Сигнатурой назовем набор $\sigma = (\lambda, p_1, \ldots, p_N)$, где N — число положительных корней, пронумерованных в определённом порядке: $\Delta_+ = \{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_N\}$, λ — доминантный вес, $p_i \in \mathbb{Z}_+$.

Обозначение 1. $v(\sigma) = e_{-\alpha_1}^{p_1} \cdot \ldots \cdot e_{-\alpha_N}^{p_N} \cdot v_\lambda$.

Пусть $\omega_1,\ \ldots,\ \omega_n$ — фундаментальные веса. Будем сравнивать сигнатуры одного доминантного веса с помощью какого-либо мономиального порядка на $\mathbb{Z}^N$, сравнивая наборы $(p_1,\ \ldots,\ p_N)$.

Определение 2. Сигнатура σ существенна, если $v(\sigma) \notin \langle v(\tau) \mid \tau < \sigma \rangle$.

Утверждение 1. *Множество векторов $\{v(\sigma) \mid \sigma\, \text{существенна}\}$ образует базис пространства $V(\lambda)$.*

Утверждение 2. *Существенные сигнатуры образуют полугруппу.*

Пусть Σ_{B_n} и Σ_{D_n} — полугруппы существенных сигнатур для B_n и D_n.

Теорема 1. *Существуют нумерация положительных корней и порядок на сигнатурах для B_n и D_n такие, что*

1. Σ_{D_n} порождается существенными сигнатурами старших весов

$$\omega_1,\ \ldots,\ \omega_n,\ 2\omega_{n-1},\ 2\omega_n,\ \omega_{n-1}+\omega_n;$$

2. Σ_{B_n} порождается существенными сигнатурами старших весов

$$\omega_1,\ \ldots,\ \omega_n,\ 2\omega_n.$$

Обозначим $\Sigma = \Sigma_{D_n}$ или $\Sigma = \Sigma_{B_n}$. Пусть $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$ — решётка весов, $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ — конус, натянутый на Σ (линейные комбинации с положительными рациональными коэффициентами).

Теорема 2. *Полугруппа Σ насыщена, то есть $\Sigma = \Sigma_{\mathbb{Q}} \cap (\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}^N)$.*

Список литературы

[1] T. Backhaus, D. Kus. The PBW filtration and convex polytopes in type `B`; arXiv: `math.RT/1504.06522`.
[2] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann. PBW filtration and bases for irreducible modules in type A_n. Transform. Groups **165** (2011), no. 1, 71–89.
[3] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann. PBW filtration and bases for symplectic Lie algebras. Int. Math. Res. Not., 2011, no. 24, 5760–5784.
[4] A.A. Gornitskii. Essential signatures and canonical bases of irreducible representations of the group G_2. Math. Notes **97** (2015), 30–41.
[5] A.A. Gornitskii. Essential signatures and canonical bases of irreducible representations of D_4; arXiv: `math.RT/1507.07498`.
[6] P. Littelmann. Cones, crystals, and patterns. Transform. Groups **3** (1998), no. 2, 145–179.
[7] P. Littelmann, X. Fang, G. Fourier. Essential bases and toric degenerations arising from generating sequences; arXiv: `math.AG/1510.02295`.
[8] E.B. Vinberg. On some canonical bases of representation spaces of simple Lie algebras. Conference talk, Bielefeld, 2005.

Универсальные обёртывающие лиевы алгебры Рота–Бакстера прелиевых алгебр

В.Ю. Губарев
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
vsevolodgu@math.nsc.ru

Линейный оператор R, заданный на алгебре A, называется оператором Рота–Бакстера [1], если выполнено следующее соотношение:

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + xR(y)), \quad x, y \in A. \tag{1}$$

Алгебра с заданным на ней оператором Рота–Бакстера, называется алгеброй Рота–Бакстера.

В 1960-е годы независимо у Э.Б. Винберга, М. Герштенхабера, Ж.-Л. Кожуля возникли прелиевы алгебры (также известные как лево-симметрические алгебры, право-симметрические алгебры, алгебры Винберга, алгебры Герштенхабера), удовлетворяющие следующему тождеству: $(x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3) = (x_2x_1)x_3 - x_2(x_1x_3)$.

Произвольная лиева алгебра Рота–Бакстера относительно операции $a \cdot b = [R(a), b]$ является прелиевой алгеброй. В [2] было, в частности, доказано, что каждая прелиева алгебра инъективно вкладывается в свою универсальную обёртывающую лиевую алгебру Рота–Бакстера.

В данном докладе на основе конструкции свободной лиевой алгебры Рота–Бакстера [3] будет построена универсальная обёртывающая лиева алгебра Рота–Бакстера произвольной прелиевой алгебры. В качестве следствия получено, что пара многообразий $(\mathrm{RBLie}, \mathrm{preLie})$ является PBW-парой [4], а многообразие лиевых алгебр Рота–Бакстера не является шрайеровым.

Список литературы

[1] G. Baxter. An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity. Pacific J. Math. **10** (1960), 731–742.

[2] V. Gubarev, P. Kolesnikov. Embedding of dendriform algebras into Rota–Baxter algebras. Cent. Eur. J. Math. **11** (2013), no. 2, 226–245; arXiv: `math.QA/1107.6021`.

[3] В.Ю. Губарев. Свободные лиевы алгебры Рота–Бакстера. Сибирский математический журнал **57** (2016), no. 5, 1036–1047.

[4] A.A. Mikhalev, I.P. Shestakov. PBW-pairs of varieties of linear algebras. Comm. Algebra **14** (2014), no. 2, 667–687.

Коммутаторы проекторов и проективная геометрия

И.Ю. Ждановский
Московский физико-технический институт,
Высшая школа экономики, Москва, Россия
ijdanov@mail.ru

Этот доклад — результат совместной (ещё не опубликованной) работы с А.С. Кочеровой.

1. Алгебраическая и физические постановки задачи

Пусть A и B — две конечномерные алгебры ($\dim_{\mathbb{C}} A = m$, $\dim_{\mathbb{C}} B = k$). Также пусть для некоторых элементов $a_i \in A,\ b_i \in B,\ i = 1,\ \ldots,\ m$ выполнено соотношение:

$$[a_i + b_i, a_j + b_j] = 0,\ i,\ j = 1,\ \ldots,\ m. \tag{1}$$

Еще предположим, что $a_i,\ i = 1\ \ldots,\ m$ — базис A как линейного пространства, b_i — порождающие алгебры B. Рассмотрим алгебру R — факторалгебру свободного произведения $A * B$ по соотношениям (1).

Предложение 1. *Размерность неприводимых представлений алгебры R не более k.*

Действительно, введём элементы $s_i = a_i + b_i,\ i = 1,\ \ldots,\ m$ и подалгебру S, ими порождённую (S коммутативна). Очевидно, что алгебра R порождена элементами s_i и b_j. Для элементов a_i имеем соотношения $a_i a_j = \sum_k \alpha_{ijk} a_k,\ \alpha_{ijk} \in \mathbb{C}$, α_{ijk} — структурные константы. Переписывая эти соотношения через s_i и b_j, получаем, что каждый элемент алгебры C представляется в виде линейной комбинации элементов $bs, b \in B, s \in S$. Далее, рассмотрим R-модуль V. Ограничим этот модуль на подалгебру S. Тогда в этом ограничении есть одномерный подмодуль $\mathbb{C}^{\chi}$ алгебры S. Соответственно, по сопряжённой ассоциативности получаем, что естественное отображение $R \otimes_S \mathbb{C}^{\chi} \to V$ нетривиально. В случае неприводимого V получаем, что это отображение сюръективно. Следовательно, $\dim_{\mathbb{C}} V \leqslant k$.

Физическая интерпретация из квантовой механики такова: пусть у нас есть две конечномерные алгебры наблюдаемых A и B. Пусть также есть набор совместных наблюдаемых вида $a_i + b_i,\ a_i \in A,\ b_i \in B$, где a_i — базис в A, b_i — порождающие B. Тогда общую квантовую систему можно разложить в прямую сумму квантовых систем размерности не более k.

2. Геометрическая версия простейшего нетривиального случая

В этой части речь пойдет об алгеброгеометрической конструкции, появляющейся в простейшем случае рассматриваемой ситуации. Будем рассматривать простейший нетривиальный случай, когда $A = \mathbb{C}^{\oplus 3} = \mathbb{C}\langle p_1,\ p_2,\ p_3 \mid p_1+p_2+p_3 = 1,\ p_ip_j = 0\rangle$ и $B = \mathbb{C}^{\oplus 3} = \mathbb{C}\langle q_1,\ q_2,\ q_3 \mid q_1+q_2+q_3 = 1,\ q_iq_j = 0\rangle$. Так как у нас $\sum p_i = 1 = \sum q_j$, выберем в качестве $a_1 = 1 = b_1$. Далее, $a_2 + b_2 = p_1 + c_3q_1 + c_4q_2$ и $a_3 + b_3 = p_2 + c_1q_1 + c_2q_2$. Тогда условие (1) можно переписать как

$$c_1[p_1, q_1] + c_2[p_1, q_2] + c_3[p_2, q_1] + c_4[p_2, q_2] = 0, \tag{2}$$

здесь c_i определены с точностью до умножения на ненулевой скаляр. То есть набор c_i — точка в $\mathbb{P}^3_c$. Таким образом, можно рассмотреть семейство алгебр R_c, параметризованных точками проективного пространства $\mathbb{P}^3_c$. Физически этот случай соответствует квантовой системе из двух частиц со спином 1.

Учитывая предложение 1, получаем, что размерность неприводимых представлений алгебры R_c для общего $c \in \mathbb{P}^3_c$ не более 3. Рассмотрим трёхмерное представление алгебры R_c такое, что образующие — проекторы ранга 1. Тогда есть 2 тройки ортогональных проекторов ранга 1: p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3 в трёхмерном пространстве V. Как известно, проекторы определяются своим образом и ядром. Рассмотрим проективизацию $\mathbb{P}(V)$. Тогда образами проекторов будут 6 точек на $\mathbb{P}(V)$. То есть у нас есть конфигурация упорядоченных (отмеченных) 6 точек на плоскости $\mathbb{P}(V)$. Эта конфигурация определяет все проекторы p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3. Действительно, ядро p_1 — подпространство в V, соответствующее прямой, соединяющей точки p_2 и p_3. Аналогично определяются и остальные проекторы. Выделить трёхмерные представления алгебр R_c в трёхмерных представлениях алгебры $A * B$ геометрически можно следующим образом.

Теорема 2. *Условие* (2) *выполнено для некоторой точки* $\mathbb{P}^3_c$ *тогда и только тогда, когда* 6 *соответствующих точек на* $\mathbb{P}(V)$ *лежат на конике* (*то есть кривой второго порядка*).

Очевидно, что условия (2) инвариантны относительно сопряжений, поэтому естественно будет рассматривать эти 6 упорядоченных точек по модулю проективных преобразований $\mathbb{P}(V)$ — группы $\mathrm{PGL}(V)$. Напомним некоторые факты о факторах по $\mathrm{PGL}(V)$, встречающиеся в нашей конструкции. GIT-фактор 6 упорядоченных точек на плоскости $\mathbb{P}(V)$ по модулю $\mathrm{PGL}(V)$ — квартика Кобла (четырёхмерная) $Q_C \subset \mathbb{P}^5$ (см. [1], [2]). На квартике Кобла действует инволюция Гейла (или Клебша). Квартика Игусы $Q_I \subset \mathbb{P}^4$ —

неподвижные точки относительно этой инволюции (так называемые «самоассоциированные» точки) — гиперплоское сечение квартики Кобла (см. [2], [3], [4]). Инволюция Гейла на квартике Q_C определяет сюръективное двулистное отображение $Q_C \to \mathbb{P}^4$ с ветвлением в Q_I. Игусой показано, что точки самоассоциированы тогда и только тогда, когда они лежат на конике, то есть Q_I параметризует 6 точек на конике в $\mathbb{P}(V)$. Рассмотрим рациональное отображение $\pi\colon Q_I \dashrightarrow \mathbb{P}^3_c$, сопоставляющее набору точек на конике точку $c \in \mathbb{P}^3_c$ из теоремы 2. Тогда можно показать, что отображение π бирационально.

Отметим ещё связь нашей конструкции с многообразием модулей кривых рода 2. Как известно, коника — рациональная кривая. Шесть точек на $\mathbb{P}^1$ определяют кривую рода 2, а именно, надо рассмотреть двулистное накрытие $\mathbb{P}^1$, разветвлённое в этих 6 точках. Точки ветвления соответствуют точкам Вейерштрасса кривой рода 2. Таким образом, общей точке $\mathbb{P}^3_c$ и соответствующей алгебре C можно однозначно сопоставить кривую рода 2 с фиксированным порядком на точках Вейерштрасса.

Список литературы

[1] A. Coble, An application of Moor's cross-ratio group to the solution of the sextic equation. Trans. Amer. Math. Soc. **12** (1991), no.3, 311–325.

[2] I. Dolgachev. Lectures on invariant theory. London Math. Soc. Lect. Notes Ser. **296**, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[3] D. Eisenbud, S. Popescu. The projective geometry of the Gale transform. J. Algebra **230** (2000), no. 1, 127–173.

[4] J. Igusa. Modular forms and projective invariants. Amer. J. Math. **89** (1967), 817–855.

Векторные инварианты некоторых простых исключительных групп над полем положительной характеристики

А.Н. Зубков

Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,

Омский государственный технический университет, Омск, Россия

a.zubkov@yahoo.com

Пусть G — группа Шевалле над бесконечным полем F нечётной характеристики, определённая системой корней типа G_2. Группа G изоморфна группе автоморфизмов алгебры октонионов $\mathbf{O}$. В частности, G действует диагонально на пространстве $\mathbf{O}^{\oplus n}$. Инварианты этого действия впервые были описаны в [1] в случае нулевой характеристики поля F. Отметим также работы [3, 2], где этот результат получен другими методами.

Алгебра $\mathbf{O}$ может быть отождествлена с 8-мерным спинорным представлением группы $Spin(7)$. Поэтому имеет смысл и проблема описания инвариантов группы $Spin(7)$, действующей на том же пространстве $\mathbf{O}^{\oplus n}$. В случае $\operatorname{char} F = 0$ эти инварианты были также описаны в работе [1].

В докладе будет изложены результаты недавней, совместной с И.П. Шестаковым, работы [4].

Теорема. *Пусть* $\operatorname{char} F \neq 2$. *Алгебра* $F[\mathbf{O}^{\oplus n}]^G$ *порождается элементами степени не выше* 4. *Алгебра* $F[\mathbf{O}^{\oplus n}]^{Spin(7)}$ *порождается теми же элементами, кроме элементов нечётной степени.*

В доказательстве используется техника пар Донкина, теория модулей с хорошей фильтрацией и элементы теории луп Муфанг (теории групп с тройственностью).

Будет сформулирован простой критерий того, что векторные инварианты редуктивной группы могут быть получены специализацией полилинейных инвариантов. Подчеркнём, что этот критерий не имеет ничего общего со стандартным методом поляризации, который не работает над полями ненулевой характеристики.

Будет обсуждаться и случай групп F_4 и E_6, действующих диагонально на прямой сумме нескольких копий простой исключительной йордановой алгебры $\mathbf{A}$ (алгебры Алберта).

Список литературы

[1] G.W. Schwarz. Invariant theory of G_2 and $Spin_7$. Comment. Math. Helvetici **63** (1988), 624–663.

[2] A.V. Iltyakov. Laplace operator and polynomial invariants. J. Algebra **207** (1998), no. 1, 256–271.

[3] R.E. Howe. The first fundamental theorem on invariant theory and spherical subgroups. Proc. Sym. Pure Math. (1) **56** (1994), 333–346.

[4] A.N. Zubkov, I.P. Shestakov. Invariants of G_2 and $Spin(7)$ in positive characteristic, Transform. Groups, to appear; arXiv: `math.RT/1512.06354`.

Вариации на тему Адо

П. Зусманович
Остравский университет, Острава, Чехия
pasha.zusmanovich@osu.cz

Я представлю новое доказательство классической теоремы Адо о существовании конечномерного точного представления для любой конечномерной алгебры Ли, не использующее универсальные обёртывающие алгебры. Доказательство работает в случае нильпотентных алгебр Ли над полем характеристики 0, и я обсужу возможные пути для его обобщения в полное доказательство теоремы Адо, не зависящее от характеристики основного поля, и не выходящее за рамки категории конечномерных алгебр Ли.

Я также обсужу вопросы, связанные с невыполнением аналогичной теоремы в классе «коммутативных» алгебр Ли, то есть коммутативных алгебр, удовлетворяющих тождеству Якоби.

По мотивам работ [1] и [2].

Список литературы

[1] P. Zusmanovich. Yet another proof of the Ado theorem. J. Lie Theory **26** (2016), no. 3, 673–681; arXiv: `math.RA/1507.02233`.

[2] P. Zusmanovich. Special and exceptional mock-Lie algebras; arXiv: `math.RA/1608.05861`.

Порядки на расстановках ладей, индуцированные примыканиями орбит

М.В. Игнатьев
Самарский университет, Самара, Россия
mihail.ignatev@gmail.com

Пусть $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, B — её борелевская подгруппа, состоящая из верхнетреугольных матриц, U — унипотентный радикал группы B (он состоит из строго верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали), $\mathfrak{n}$ — алгебра Ли группы U, $\mathfrak{n}^*$ — сопряжённое пространство к алгебре $\mathfrak{n}$.

Обозначим через Φ систему корней группы G, а через Φ^+ — множество положительных корней относительно подгруппы B; как всегда Φ^+ отождествляется с подмножеством в $\mathbb{R}^n$ вида $\{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$, где $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ — стандартный базис пространства $\mathbb{R}^n$.

Расстановкой ладей в Φ^+ называется произвольное подмножество $D \subset \Phi^+$, состоящее из корней с попарно неположительными скалярными произведениями (на $\mathbb{R}^n$ рассматривается стандартное скалярное произведение). Такое название объясняется наглядной трактовкой: если каждому корню $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ из D поставить в соответствие ладью, стоящую на позиции (i, j) на верхнетреугольной шахматной доске размера $n \times n$, то ладьи не будут бить друг друга.

Группы U и B естественно действуют на $\mathfrak{n}$ с помощью присоединённого действия; двойственное действие в пространстве $\mathfrak{n}^*$ называется коприсоединённым. Орбиты присоединённого и коприсоединённого действия играют важную роль в теории представлений и геометрии орбитальных многообразий. Полное описание этих орбит неизвестно и представляется чрезвычайно трудной задачей.

С каждой расстановкой ладей $D \subset \Phi^+$ можно связать присоединённую $\mathcal{O}_D$ и коприсоединённую Ω_D орбиты группы B по следующему правилу. Пусть $\{e_\alpha,\ \alpha \in \Phi^+\}$ — базис алгебры $\mathfrak{n}$, состоящий из корневых векторов (фактически, $e_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = e_{i,j}$ — это просто элементарная матрица), а $\{e^*_\alpha,\ \alpha \in \Phi^+\}$ — двойственный базис пространства $\mathfrak{n}^*$. Обозначим

$$x_D = \sum_{\alpha \in D} e_\alpha \in \mathfrak{n},\ f_D = \sum_{\alpha \in D} e^*_\alpha \in \mathfrak{n}^*,$$

тогда, по определению, $\mathcal{O}_D$ и Ω_D — это орбиты элементов x_D и Ω_D соответственно. Будем говорить, что эти орбиты ассоциированы с расстановками ладей.

В статьях [4, 5] А. Мельникова изучила орбиты $\mathcal{O}_D$ в случае, когда D — ортогональная расстановка ладей. В частности, она описала в комбинаторных терминах частичный порядок на расстановках ладей, кодирующий их примыкания. Он устроен следующим образом. По каждой расстановке ладей D построим верхнетреугольную матрицу Y_D по правилу

$$(Y_D)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \varepsilon_i - \varepsilon_j \in D, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть теперь R_D — матрица, заданная условием $(R_D)_{i,j} = \operatorname{rk} \pi_{i,j}(Y_D)$, где $\pi_{i,j}$ возвращает подматрицу, левый нижний угол которой совпадает с левым нижним углом исходной матрицы, а правый верхний — с позицией (i, j). Другими словами, $(R_D)_{i,j}$ — это просто число ладей (единиц) в Y_D, расположенный нестрого ниже и левее позиции (i, j). Оказывается, что орбита $\mathcal{O}_D$ лежит в замыкании орбиты $\mathcal{O}_{D'}$ тогда и только тогда, когда $R_D \leqslant R_{D'}$ (последнее условие означает, что это неравенство выполняется в каждой позиции этих матриц). Позднее она вместе с соавторами перенесла эти результаты на случай ортогональных расстановок в других классических системах корней.

В статье [1] автором был изучен порядок на расстановках ладей, индуцированный примыканиями коприсоединённых орбит Ω_D для ортогональных расстановок ладей D. Оказалось, что его описание в каком-то смысле «двойственно» порядку Мельниковой. А именно, пусть R_D^* — нижнетреугольная матрица, построенная по правилу $(R_D^*)_{i,j} = \operatorname{rk} \pi_{i,j}(Y_D^t)$. Тогда орбита Ω_D лежит в замыкании орбиты $\Omega_{D'}$ тогда и только тогда, когда $R_D^* \leqslant R_{D'}^*$. Более того, этот порядок совпадает с порядком Брюа на множестве инволюций в симметрической группе S_n (имеется очевидное взаимно однозначное соответствие между ортогональными расстановками ладей и инволюциями). Также в это статье были описаны ближайшие элементы для этого порядка. В [2] аналогичные результаты были получены для ортогональных расстановок ладей в системе корней типа C_n.

Далее, в работе [3] эти результаты частично были перенесены на случай произвольных расстановок ладей. А именно, там было показано, что условие $R_D \leqslant R_{D'}^*$ является необходимым для примыкания коприсоединённых B-орбит, ассоциированных с произвольными расстановками ладей. Кроме того, были найдены размерности орбит и вычислены ближайшие элементы для этого «наивного» порядка. Отметим, что этот порядок заведомо слабее правильного порядка, индуцированного примыканиями.

Доклад посвящён присоединённым орбитам, ассоциированным с произвольными расстановками ладей. А именно, для того, чтобы орбита $\mathcal{O}_D$ лежала в замыкании орбиты $\mathcal{O}_{D'}$, необходимо, чтобы $R_D \leqslant R_{D'}$ и, кроме того, для всех $i < j$ выполнялось условие $r(p_{i,j}(Y_D)) \leqslant r(p_{i,j}(Y_{D'}))$. Здесь $p_{i,j}$ возвращает квадратную подматрицу данной матрицы, правый верхний угол которой находится в позиции (i, j), а r равно максимальной длине цепочки «связанных ладей», то есть цепочки ладей вида $\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ \varepsilon_j - \varepsilon_k, \ldots$ в данной матрице. Мы обсудим достаточность этих условий.

Работа была поддержана грантом RSF–DFG 16–41–01013.

Список литературы

[1] M.V. Ignatyev. Combinatorics of B-orbits and the Bruhat–Chevalley order on involutions. Transform. Groups **17** (2012), no. 3, 747–780; arXiv: `math.RT/1101.2189`.

[2] М.В. Игнатьев. Порядок Брюа–Шевалле на инволюциях в гипероктаэдральной группе и комбинаторика замыканий B-орбит. Записки научных семинаров ПОМИ **400** (2012), 166–188; arXiv: `math.RT/1112.2624`.

[3] M.V. Ignatyev, A.S. Vasyukhin. Rook placements in A_n and combinatorics of B-orbit closures. J. Lie Theory **24** (2014), no. 4, 931–956; arXiv: `math.RT/1310.3164`.
[4] A. Melnikov. B-orbit in solution to the equation $X^2 = 0$ in triangular matrices. J. Algebra **223** (2000), no. 1, 101–108.
[5] A. Melnikov. Description of B-orbit closures of order 2 in upper-triangular matrices. Transform. Groups **11** (2006), no. 2, 217–247.

Группы Галуа и оптимальное управление

Д.Д. Киселёв
Всероссийская академия внешней торговли Минэкономразвития РФ, Москва, Россия
`denmexmath@yandex.ru`

Символом $\sigma_{k,m}$ мы будем обозначать элементарный симметрический многочлен степени k от набора $\{j \in \mathbb{N} \mid j \leqslant m\}$. Определим для натурального $n > 1$ многочлен $f_n(x)$ следующим образом.

$$f_n(x) = (-1)^{n-1}\sigma_{1,\,2n}x^{n-1} + (-1)^{n-2}\sigma_{3,\,2n}x^{n-2} + \ldots + \sigma_{2n-1,\,2n}. \tag{1}$$

Пусть n чётно. Тогда положим $B = \{v_k\}_{k=1}^{[n/2]} \subset \mathbb{R}_{>0}$, где v_k — единственный действительный корень уравнения

$$\sum_{s=1}^{2n} \operatorname{arctg}\frac{x}{s} = (2k-1)\pi. \tag{2}$$

Пусть n нечётно. Тогда положим $B = \{v_k\}_{k=1}^{[n/2]} \subset \mathbb{R}_{>0}$, где v_k — единственный действительный корень уравнения

$$\sum_{s=1}^{2n} \operatorname{arctg}\frac{x}{s} = 2k\pi. \tag{3}$$

Пусть $q > 3$ — некоторое простое число. Всюду под x_q будет пониматься выражение $x_q = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/(q-1)$.

Теорема 1. *Пусть $q \equiv 2 \pmod 3$ — такое нечётное простое число, что многочлен $f_4(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$, а число $p = 3 + q + 3qk$ также просто для некоторого натурального k. Положим $n = p + 1$. Если число $2p + 3 = 2n + 1$ является простым с условием $x_{2n+1} \not\equiv 0 \pmod{(2n+1)^3}$,* *то* $A_p \hookrightarrow \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f_n)$, *кроме, быть может, случая, когда* $p = (r^{st}-1)/(r^s-1)$ *для некоторого простого* r *и некоторых натуральных* r, s.

Теорема 2. *Пусть* $n > 4$ *— такое натуральное число, что числа* $p = n-1$, $q = 2n+1$, $r = 2n+7$ *являются простыми, причём для* q *выполнено условие* $x_q \not\equiv 0 \pmod{q^3}$, *причём* 889 *— не квадрат в* $\mathbb{F}_r$. *Тогда имеет место изоморфизм* $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f_n) \cong S_p$. *В частности, для таких* n *справедлива гипотеза* 2 *работы* [1].

Рассмотрим оптимизационную задачу

$$J(x) = \int_0^{+\infty} \big\langle x, Cx \big\rangle \, dt \to \min \tag{4}$$

на траекториях управляемой системы

$$\begin{aligned} &x^{(n)} = u, \quad |u| \leqslant 1, \quad x \in V, \quad u \in U = V; \\ &x^{(k)}(0) = x_k^0 \text{ при } k \leqslant n-1. \end{aligned}$$

Здесь V — конечномерное евклидово пространство достаточно высокой размерности со скалярным произведением $\big\langle \cdot, \cdot \big\rangle$, а C — некоторый самосопряжённый линейный оператор. Функция $x(t)$ считается абсолютно непрерывной вместе со своими $2n-1$ производными. Управление $u(t) \in L_1(0; +\infty)$ — измеримая функция.

Следствие 1. *Пусть* $q \equiv 2 \pmod 3$ *— такое нечётное простое число, что многочлен* $f_4(x)$ *неприводим над* $\mathbb{Q}$, *а число* $p = 3 + q + 3qk$ *также просто для некоторого натурального* k. *Положим* $n = p + 1$. *Если число* $2p + 3 = 2n + 1$ *является простым с условием* $x_{2n+1} \not\equiv 0 \pmod{(2n+1)^3}$ *и если* p *не представимо в виде* $(r^{st}-1)/(r^s-1)$ *ни для каких простого* r *и натуральных* s, t, *то все элементы множества* B, *определённого условиями* (2) *и* (3), *линейно независимы над* $\mathbb{Q}$. *В частности, для таких* n *справедлива гипотеза* 1 *работы* [1].

Следствие 2. *Пусть* n *— натуральное число, удовлетворяющее условиям следствия* 1. *Тогда для любого натурального* $k \leqslant [n/2]$ *в задаче оптимального управления* (4) *при подходящем выборе оператора* C (*искомое условие описано в* [1, Теорема 3]) *существует оптимальное управление, траектории которого за конечное время пробегают всюду плотную обмотку* k*-мерного тора.*

Теорема 3. *Предположим, что для почти всех*[1] *простых* p *многочлен* $f_{p+1}(x)$ *неприводим над* $\mathbb{Q}$. *В таком случае для любого* $k \in \mathbb{N}$ *в задаче* (4) *при*

[1]Кроме конечного числа.

некоторых n и C существует управление, траектория которого за конечное время проходит всюду плотную обмотку k-мерного тора.

Теорема 4. *Для любого натурального $k \leqslant 807$ существует задача оптимального управления (4), у которой имеется траектория оптимального управления в виде всюду плотной обмотки k-мерного тора.*

В приведённой ниже таблице содержатся все тройки простых чисел $(p,\ q,\ r)$, удовлетворяющие условиям теоремы (2) такие, что $n \leqslant 600$.

n	$p = n - 1$	$q = 2n + 1$	$r = 2n + 7$
8	7	17	23
18	17	37	43
20	19	41	47
30	29	61	67
48	47	97	103
270	269	541	547
338	337	677	683
410	409	821	827
488	487	977	983
558	557	1117	1123

Список литературы

[1] М.И. Зеликин, Д.Д. Киселёв, Л.В. Локуциевский. Оптимальное управление и теория Галуа. Матем. сборник **204** (2013), no. 11, 83–98.
[2] Д.Д. Киселёв. О всюду плотной обмотке 2-мерного тора. Матем. сборник **207** (2016), no. 4, 113–122.

Усиленная версия гипотезы Симса о конечных примитивных группах подстановок

А.С. Кондратьев, В.И. Трофимов
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия
a.s.kondratiev@imm.uran.ru, trofimov@imm.uran.ru

В середине 1960-х годов Ч. Симс выдвинул следующую гипотезу: *порядок стабилизатора точки в конечной примитивной группе подстановок ограничен сверху функцией от длины любой орбиты этого стабилизатора на остальных точках.* До классификации конечных простых групп эта гипотеза была подтверждена только в некоторых частных случаях. С помощью классификации конечных простых групп гипотеза Симса была доказана в статье П. Камерона, Ч. Прэгер, Я. Саксла и Г. Зейца [1].

Напомним, что для $H \leqslant G$ подгруппа $H_G = \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$ называется ядром подгруппы H в группе G. Для конечной группы G, её подгрупп M_1 и M_2 и любого натурального числа i по индукции определим подгруппы $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ группы G из пересечения $M_1 \cap M_2$, которые авторы называют i-ми взаимными ядрами M_1 относительно M_2 и M_2 относительно M_1 соответственно, полагая $(M_1, M_2)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_1}$, $(M_2, M_1)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_2}$, $(M_1, M_2)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_1}$ и $(M_2, M_1)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_2}$. В [2] авторы доказали следующую усиленную версию гипотезы Симса: *если G — конечная группа и M_1, M_2 — различные сопряжённые максимальные подгруппы в G, то подгруппы $(M_1, M_2)^6$ и $(M_2, M_1)^6$ совпадают и нормальны в G.* Представляется интересной задача описания множества Π всех троек (G, M_1, M_2) таких, что G — конечная группа и M_1, M_2 — различные сопряжённые максимальные подгруппы в G, $(M_1)_G = (M_2)_G = 1$ и $1 < |(M_1, M_2)^2| \leqslant |(M_2, M_1)^2|$. При этом тройки (G, M_1, M_2) и (G', M_1', M_2') из Π считаются эквивалентными, если существует изоморфизм G на G', отображающий M_1 на M_1' и M_2 на M_2'. Решение этой задачи существенно усилит результаты из [2].

В докладе авторов обсуждаются результаты авторов по этой задаче, полученные, в частности, в [2, 3, 4, 5]. В их доказательствах используется теория алгебраических групп.

Работа выполнена за счёт гранта РНФ (проект 14–11–00061).

Список литературы

[1] P.J. Cameron, C.E. Praeger, J. Saxl, M. Seitz. On the Sims conjecture and distance transitive graphs. Bull. London Math. Soc. V. **15** (1983), no. 5, 499–506.

[2] А.С. Кондратьев, В.И. Трофимов. Стабилизаторы вершин графов и усиленная версия гипотезы Симса. Докл. АН **364** (1999), no 6, 741–743.

[3] А.С. Кондратьев, В.И. Трофимов. Стабилизаторы вершин графов с примитивными группами автоморфизмов и усиленная версия гипотезы Симса. I. Труды Института математики и механики УрО РАН **20** (2014), no. 4, 143–152.

[4] А.С. Кондратьев, В.И. Трофимов. Стабилизаторы вершин графов с примитивными группами автоморфизмов и усиленная версия гипотезы Симса. II. Труды Института математики и механики УрО РАН **22** (2016), no. 2, 177–187.

[5] А.С. Кондратьев, В.И. Трофимов. Стабилизаторы вершин графов с примитивными группами автоморфизмов и усиленная версия гипотезы Симса. III. Труды Института математики и механики УрО РАН **22** (2016), no. 4, 163–172.

Унитарная K_1-группа кольца многочленов

В.И. Копейко
Калмыцкий государственный университет имени Б.Б. Городовикова, Элиста, Россия
kopeiko52@mail.ru

Пусть $R = (R, \lambda, \Lambda)$ — унитарное кольцо, где R — кольцо с инволюцией, Λ — система параметров в R и λ — симметрия. В литературе унитарное кольцо называют также форменным кольцом Бака. Пусть $K_1U^\lambda(R, \Lambda)$ — унитарная K_1-группа кольца R. Ядро (расщепляющегося) эпиморфизма групп $K_1U^\lambda(R[X], \Lambda[X]) \quad \to \quad K_1U^\lambda(R, \Lambda)$, индуцированного отображением $R[X] \to R\colon X \to 0$, обозначим через $NK_1U^\lambda(R, \Lambda)$ и будем называть нильпотентной (по Бассу) унитарной K_1-группой. В частности, $K_1U^\lambda(R[X], \Lambda[X]) = K_1U^\lambda(R, \Lambda) \oplus NK_1U^\lambda(R, \Lambda)$, и значит, изучение унитарной K_1-группы кольца многочленов $R[X]$ сводится к изучению группы $NK_1U^\lambda(R, \Lambda)$. Данная группа была введена автором в [1] и использовалась при решении задачи гомотопизации унитарного K_1-функтора.

В докладе будут представлены унитарные K_1-аналоги теоремы Фаррелла [2] из алгебраической $K-$теории (см. теоремы 1 и 2 ниже). Для формулировки основных результатов доклада необходим ряд вспомогательных определений. Коядро гиперболического гомоморфизма $H\colon K_1(R) \to K_1U^\lambda(R, \Lambda)$ обозначается через $W_1U^\lambda(R, \Lambda)$ и называется (унитарной) 1-группой Витта, в то время как ядро гомоморфизма $K_1U^\lambda(R, \Lambda) \to K_1(R)$, индуцированного забывающим функтором, обозначается через $W_1'U^\lambda(R, \Lambda)$ и называется (унитарной) 1-когруппой Витта. Кроме того, для любого натурального n обозначим через $(i_n)^*\colon K_1U^\lambda(R[X^n], \Lambda[X^n]) \to K_1U^\lambda(R[X], \Lambda[X])$ естественный гомоморфизм групп, индуцированный вложением $i_n\colon R[X^n] \to R[X]$.

Теорема 1. *Если пересечение $W_1'U^\lambda(R[X], \Lambda[X]) \cap NK_1U^\lambda(R, \Lambda)$ — не тривиальная группа, то $W_1'U^\lambda(R[X], \Lambda[X]) \cap NK_1U^\lambda(R, \Lambda)$ — не конечно порождённая группа, и в этом случае $K_1U^\lambda(R[X], \Lambda[X])$, $W_1'U^\lambda(R[X], \Lambda[X])$, $NK_1U^\lambda(R, \Lambda)$ — не конечно порождённые (абелевы) группы.*

Теорема 2. *Пусть $p\colon K_1U^\lambda(R[X], \Lambda[X]) \to W_1U^\lambda(R[X], \Lambda[X])$ — каноническая проекция. Если образ $p(NK_1U^\lambda(R, \Lambda))$ — не тривиальная группа, то $p(NK_1U^\lambda(R, \Lambda))$ — не конечно порождённая группа, и в этом случае $K_1U^\lambda(R[X], \Lambda[X])$, $W_1U^\lambda(R[X], \Lambda[X])$, $NK_1U^\lambda(R, \Lambda)$ — не конечно порождённые (абелевы) группы.*

Для доказательства данных теорем строится трансфер $(i_n)_*\colon K_1U^\lambda(R[X], \Lambda[X]) \to K_1U^\lambda(R[X^n], \Lambda[X^n])$ и вычисляется композиция

$(i_n)_* \circ (i_n)^*$. Другим следствием из полученной формулы для композиции являются следующие унитарные K_1−аналоги теоремы Шпрингера [3] из алгебраической теории квадратичных форм, также используемые при доказательстве унитарных K_1−аналогов теоремы Фаррелла и представляющих независимый интерес.

Теорема 3. *Для любого нечётного n сужение естественного гомоморфизма $(i_n)^* \colon W_1'U^\lambda(R[X^n], \Lambda[X^n]) \to W_1'U^\lambda(R[X], \Lambda[X])$ является расщепляющимся мономорфизмом групп.*

Теорема 4. *Для любого нечётного n отображение $\overline{(i_n)^*} \colon W_1U^\lambda(R[X^n], \Lambda[X^n]) \to W_1U^\lambda(R[X], \Lambda[X])$, индуцированное естественным гомоморфизмом $(i_n)^*$, является расщепляющимся мономорфизмом групп.*

Нетрудно показать, что если R — коммутативное кольцо и n — нечётное натуральное число, то ядро естественного гомоморфизма групп $(i_n)^* \colon K_1U^\lambda(R[X^n], \Lambda[X^n]) \to K_1U^\lambda(R[X], \Lambda[X])$ аннулируется n.

Автор поддержан грантом РФФИ (проект №16–01–00148).

Список литературы

[1] В.И. Копейко. О гомотопизации унитарного K_1-функтора. Алгебра и анализ **20** (2008), no. 5, 99–108.

[2] F.T. Farrell. The nonfiniteness of Nil. Proc. Amer. Math. Soc. **65** (1977), 215–216.

[3] T.-Y. Lam. Algebraic theory of quadratic forms. Benjamin, 1973.

О лиевски нильпотентных ассоциативных алгебрах

А.Н. Красильников

Университет Бразилиа, Бразилиа, Бразилия

alexei@unb.br

Ассоциативная алгебра A называется лиевски нильпотентной, если её присоединённая алгебра Ли $A^{(-)}$ (с лиевским умножением $[a, b] = ab - ba$) нильпотентна. Изучение лиевски нильпотентных ассоциативных колец и алгебр было начато Дженнингсом в 1947 году. Нынешний интерес к этим алгебрам в значительной степени мотивирован изучением факторов L_i/L_{i+1} нижнего центрального ряда $A^{(-)} = L_1 \supset L_2 \supset L_3 \supset \ldots$ алгебры Ли $A^{(-)}$. Это изучение было начато в 2007 году в пионерской работе Б. Фейгина и Б. Шойхета и продолжено в работах разных авторов (см. обзор [1]).

В своем докладе я собираюсь рассказать о некоторых новых результатах о лиевски нильпотентных ассоциативных алгебрах.

Список литературы

[1] N. Abughazalah, P. Etingof. On properties of the lower central series of associative algebras. J. Algebra Appl. **15** (2016), 1650187 (24 pages); arXiv: `math.RA/1508.00943`.

Тепловой поток в пространстве гладких функций на компактной связной группе Ли

М.В. Мещеряков
Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва, Саранск, Россия
`mesh@math.mrsu.ru`

Среди гладких функций на компактной связной группе Ли G элементы пространств матричных элементов вещественных неприводимых представлений G играют роль обобщённых гармоник и являются собственными функциями биинвариантного оператора Лапласа. Согласно [2], все матричные элементы по своим дифференциально-топологическим свойствам суть функции Морса–Ботта. С другой стороны [3], морсовские матричные элементы представлений минимальной размерности классических компактных групп $O(n)$, $U(n)$ и $Sp(n)$ оказываются совершенными функциями Морса на них. В связи с задачей Арнольда [1] о топологической классификации морсовских матричных элементов мы анализируем на основе метода Фурье динамику потока уравнения теплопроводности в пространстве $C^\infty(G)$ гладких функций, снабжённом C^∞-топологией. Сформулируем некоторые предварительные результаты.

Теорема A. *Тепловой поток в пространстве гладких функций на компактной связной группе Ли G сохраняет пространство обобщённых функций Морса.*

Теорема B. *Существует открытое и всюду плотное подмножество $S \subset C^\infty(G)$ такое, что для любого начального условия $f_0 \in S$ найдётся $T > 0$ такое, что при всех $t \geqslant T$ функция $f(\cdot, t) = \exp(-t\Delta)f_0$ сколь угодно близка в C^∞-топологии к некоторому морсовскому матричному элементу, отвечающему минимальному положительному собственному значению оператора Δ.*

Список литературы

[1] В.И. Арнольд. Топологическая классификация многочленов Морса. Дифференциальные уравнения и топология. I. Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Л.С. Понтрягина. Труды МИАН **268**. — М.: МАИК, 2010, 40–55.

[2] В.А. Шмаров. Минимальные линейные функции Морса на орбитах в алгебрах Ли. Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2015, no. 2, 8–15.

[3] М.В. Мещеряков. Классификация упругих линейных неприводимых представлений компактных связных групп Ли. Четвертая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». Тезисы докладов. Москва, Россия, 2014, с. 29.

[4] C. Cadavid, J.D. Velez. A remark on the heat equation and minimal Morse functions on tori and spheres; arXiv: `math.DG/1301.5934`.

Естественно градуированные про-нильпотентные алгебры Ли ширины два

Д.В. Миллионщиков
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
Москва, Россия
`million@higeom.math.msu.su`

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется про-нильпотентной, если для идеалов $C^i\mathfrak{g}$ её нижнего центрального ряда ($\mathfrak{g} = C^1\mathfrak{g}$, $C^i\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^{i-1}\mathfrak{g}]$) выполняется $\cap_{i=1}^{+\infty} C^i\mathfrak{g} = \{0\}$, $\dim \mathfrak{g}/C^i\mathfrak{g} < +\infty$. Про-нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется полной, если она изоморфна проективному (обратному) пределу $\mathfrak{g} \cong \widehat{\mathfrak{g}} = \varprojlim_k \mathfrak{g}/C^k\mathfrak{g}$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется естественно градуированной, если она изоморфна $\mathrm{gr}_C\mathfrak{g}$ — своей ассоциированной градуированной алгебре Ли относительно фильтрации идеалами $C^i\mathfrak{g}$ нижнего центрального ряда. Естественно градуированная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является примером положительно градуированной алгебры Ли ($\mathfrak{g}$ градуируется полугруппой натуральных чисел $\mathbb{N}$). Классификация (над полем нулевой характеристики) бесконечномерных положительно градуированных алгебр Ли $\mathfrak{g} = \oplus_i \mathfrak{g}_i$ с одномерными однородными компонентами $\mathfrak{g}_i$ была получена Фиаловски в [1] (к сожалению, эта работа содержит лишь набросок доказательства). В классификационном списке [1] содержатся, в частности, положительная часть алгебры Витта (Вирасоро) W^+, а также положительные части $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$ двух алгебр петель $A_1^{(1)}$ и $A_2^{(2)}$. Легко видеть, что W^+ не является естественно градуированной, так как $\mathrm{gr}_C W^+ \cong \mathfrak{m}_0$, где $\mathfrak{m}_0$ также содержится в списке [1] и задается бесконечным базисом $e_1, e_2, e_3, \dots$ и коммутационными соотношениями $[e_1, e_i] = e_{i+1}, i \geqslant 2$. При этом обе алгебры Ли $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$ являются естественно градуированными.

В 90-е годы прошлого века Шалев и Зельманов, сравнивая аппарат, развитый в теории про-p групп, с теорией про-нильпотентных алгебр Ли над полем нулевой характеристики, инициировали изучение так называемых «узких» алгебр Ли, изучение класса медленно растущих алгебр Ли с двумя мультипликативными образующими. В частности, ими было введено понятие ширины положительно градуированной алгебры Ли $\mathfrak{g} = \oplus_i \mathfrak{g}_i$. Алгебра Ли $\mathfrak{g} = \oplus_i \mathfrak{g}_i$ имеет ширину k, если $\dim \mathfrak{g}_i \leqslant k, \forall i \in \mathbb{N}$. В [3] была поставлена задача классификации градуированных алгебр Ли конечной ширины k. Самой «узкой» (narrow) среди естественно градуированных алгебр $\mathfrak{g} = \oplus_i \mathfrak{g}_i$ является $\widehat{\mathfrak{m}}_0$: у неё первая однородная компонента двумерна (линейная оболочка e_1 и e_2), остальные все компоненты одномерны. Классический результат Верны [4] говорит о том, что с точностью до изоморфизма алгебра $\widehat{\mathfrak{m}}_0$ является единственной с таким свойством. Когомологии $H^2(\widehat{\mathfrak{m}}_0)$ — это градуированное пространство $H^2(\widehat{\mathfrak{m}}_0) = \oplus_{j=1}^{+\infty} \langle c_{2j+1} \rangle$, где c_{2j+1} — двумерные коциклы строго нечётной градуировки. Любая последовательность S из нечётных чисел определяет центральное расширение $\widehat{\mathfrak{m}}_0^S$.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ — комплексная бесконечномерная естественно градуированная полная про-нильпотентная алгебра Ли, удовлетворяющая следующему условию*:

$$\dim \mathfrak{g}_i + \dim \mathfrak{g}_{i+1} \leqslant 3, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ изоморфна одной (и только одной) алгебре Ли из следующего списка:

$$\widehat{\mathfrak{m}}_0, \widehat{\mathfrak{n}}_1,\ \widehat{\mathfrak{n}}_2, \left\{ \widehat{\mathfrak{m}}_0^S \mid S \subset \{3, 5, 7, 9, \dots\} \right\},$$

Исследование выполнено за счёт гранта РНФ no. 14–11–00414.

Список литературы

[1] А. Фиаловски. Классификации градуированных алгебр Ли с двумя образующими. Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. **38** (1983), no. 2, 62–64.

[2] D.V. Millionschikov. Graded filiform Lie algebras and symplectic nilmanifolds. Geometry, topology, and mathematical physics. AMS Transl. Ser. 2 **212** (2004). Amer. Math. Soc., Providence, RI, 259–279.
[3] A. Shalev, E.I. Zelmanov. Narrow algebras and groups. J. Math. Sci. **93** (1999), no. 6., 951–963.
[4] M. Vergne. Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Bull. Soc. Math. France **98** (1970), 81–116.

Оператор КМС типа $B(1,1)$ и супералгебра Ли $osp(3,2)$

Г.С. Мовсисян, А.Н. Сергеев
Саратовский государственный университет, Саратов, Россия
movsisyangs@gmail.com, sergeevan@info.sgu.ru

В докладе будет рассказано о связи дифференциального оператора Калоджеро–Мозера–Сазерленда (КМС) типа $B(1.1)$ с теорией представления супералгебры ли $osp(3,2)$. В частности, одним из основных результатов является доказательство того, что характеры неприводимых представлений супералгебры Ли $osp(3,2)$ могут быть получены из собственных функций дифференциального оператора Калоджеро–Мозера–Сазерленда (КМС) типа $B(1,1)$ при некоторой специализации параметров от которых эти функции зависят.

Рассмотрим оператор Калоджеро–Мозера–Сазерленда, соответствующий системе корней типа $B(1,1)$ [1]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 = (\partial_u)^2 + k(\partial_v)^2 - \frac{u+v}{u-v}(\partial_u - k\partial_v) - (1+p)(\partial_u+\partial_v) - \\ - (1+2p)\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right) + 2\frac{\partial}{\partial u}\partial_u + 2k\frac{\partial}{\partial v}\partial_v - \frac{4}{u-v}(\partial_u - k\partial_v),\end{aligned} \tag{1}$$

Естественной областью действия оператора (1) является следующая алгебра деформированных симметрических полиномов

$$\mathfrak{A}_{1,1} = \{f \in C[u,v] \mid (\partial_u - k\partial_v)f \in (u-v)\},$$

Известно [2], что базисом этой алгебры являются суперполиномы Джека, которые в этом случае имеют вид

$$P_\Lambda = v^\lambda u^\mu - \frac{\lambda - k^{-1}\mu}{\lambda - 1 - k^{-1}(\mu+1)} v^{\lambda-1}u^{\mu+1} = v^\lambda u^\mu - \frac{\mu - k\lambda}{\mu + 1 - k(\lambda-1)} v^{\lambda-1}u^{\mu+1},$$

где $\Lambda = (\lambda,\mu)$ — диаграмма Юнга — крюк.

Определим для каждой диаграммы Λ многочлен F_Λ по следующей формуле:

$$F_\Lambda = \sum_{M \subseteq \Lambda} c(M, \Lambda) P_M, \tag{2}$$

где

$$c(M, \Lambda) = 2^{|\Lambda|} \frac{Q_M(\Lambda)}{Q_M(M)} \frac{f_\Lambda}{f_M} \text{ [1]}.$$

Теорема. *Многочлен* (2) *является собственной функцией оператора* (1).

Следующая Теорема показывает, что при определенной специализации параметров k, p собственные функции совпадают с характерами неприводимых конечномерных представлений супералгебры Ли $osp(3,2)$.

Теорема. 1) *Если* $\Lambda \neq (\lambda, \lambda - 1)$, *то* $\exists \lim\limits_{\substack{p \to -1 \\ k \to -1}} F_\Lambda = Sch(V^\Lambda)$.
2) *Если* $\Lambda = (\lambda, \lambda - 1)$, *то при условии* $p + 1 = \lambda(k + 1)$ $\exists \lim\limits_{k \to -1} F_\Lambda = Sch(V^\Lambda)$.
3) *Если* $\Lambda = (1, 0)$, *то при условии* $p + 1 = 2(k + 1)$ $\exists \lim\limits_{k \to -1} F_\Lambda = Sch(V^\square)$, *где* $|\Lambda| = \lambda + \mu, V^\Lambda$ *— неприводимое представление супералгебры Ли* $osp(3,2)$.

Список литературы

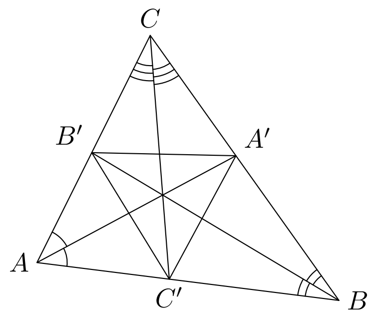
[1] A.N. Sergeev, A.P. Veselov. BC_∞ Calogero–Moser operator and super Jacobi polynomials. Adv. Math. **222** (2009), no. 5, 1687–1726.
[2] A.N. Sergeev, A.P. Veselov. Deformed quantum Calogero–Moser systems and Lie superalgebras. Comm. Math. Phys. **245** (2004), no. 2, 249–278.

Треугольники Шарыгина

И.В. Нетай
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия
i.v.netay@gmail.com

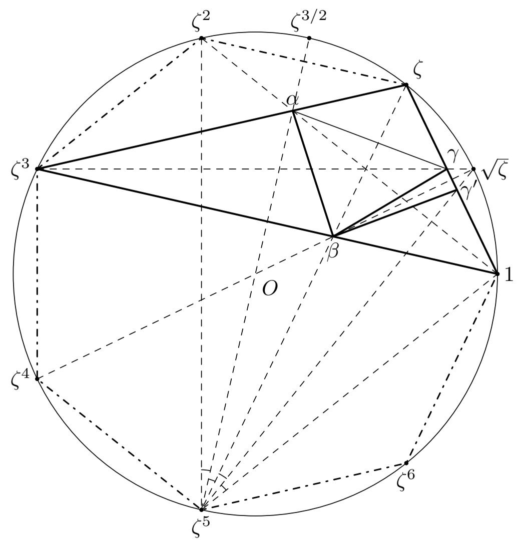
Я хочу рассказать о сюжете, основанном на совместной работе с А.В. Савватеевым. Своё начало сюжет берёт в 1983 г., когда в журнале «Квант» [1] была опубликована следующая задача.

Задача. *Известно, что основания биссектрис некоторого треугольника образуют равнобедренный треугольник. Верно ли, что тогда исходный треугольник обязательно равнобедренный?*



На рисунке: если $A'B' = A'C'$, обязательно ли $AB = AC$?

Разумеется, ответ отрицательный, иначе задача не была бы столь интересна. Назовём *треугольником Шарыгина* неравнобедренный треугольник, основания биссектрис которого образуют равнобедренный треугольник. В известном задачнике Шарыгина по планиметрии [2] приводится доказательство существования таких треугольников, но не приводятся примеры. На рисунке ниже приводится пример, возникающий при рассмотрении треугольника в вершинах правильного семиугольника (впервые обнаружен в [3]).



Мы ставим задачу поиска и описания множества целых треугольников Шарыгина (см. [4]). Оказывается, таких существует бесконечно много попарно не подобных. Неожиданно, что минимальный из них имеет вид $(18800081, 1481089, 19214131)$.

Все треугольники Шарыгина параметризуются открытым подмножеством эллиптической кривой, а целые соответствуют рациональным точкам кривой, попадающим в это подмножество. Таким образом, задача описания целых треугольников Шарыгина требует описания группы рациональных точек на эллиптической кривой, и с виду простая школьная планиметрическая задача приводит нас к одной из красивых и сложных областей современной математики.

Список литературы

[1] И.Ф. Шарыгин. Вокруг биссектрисы. Квант, 1983, no. 8, 32–36.
[2] И.Ф. Шарыгин. Задачи по планиметрии. — М.: Наука, 1982.
[3] L. Bankoff, J. Garfunkel. The heptagonal triangle. Mathematics Magazine, 1973, no. 1, 7–19.
[4] С. Маркелов. Диофантовы... биссектрисы! Квант, 2016, no. 5–6, 29–44.

Вторые числа Чженя векторных расслоений на алгебраической поверхности и высшие адели

Д.В. Осипов
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
d_osipov@mi.ras.ru

В работе [2] А.Н. Паршин построил адельными методами числа Чженя векторных расслоений на алгебраических многообразиях. В случае основного поля положительной характеристики его конструкция даёт ответ только по модулю характеристики поля, так как принимает значения в образе группы $\mathbb{Z}$ в поле. В случае алгебраических поверхностей мы предлагаем ниже конструкцию, работающую для случая основного поля любой характеристики.

Пусть X — гладкая проективная алгебраическая поверхность над совершенным полем k. Пусть $\mathbb{A}_X$ — кольцо аделей Паршина–Бейлинсона этой поверхности. По каждому локально линейно компактному k-векторному пространству канонически строится $\mathbb{Z}$-торсор. Для любого целого числа $n \geqslant 1$

векторное пространство $\mathbb{A}_X^n$ обладает фильтрацией, факторы которой являются локально линейно компактными k-векторными пространствами. Это приводит к конструкции центрального расширения для любого целого числа $n \geqslant 1$:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widehat{GL_n(\mathbb{A}_X)} \longrightarrow GL_n(\mathbb{A}_X) \longrightarrow 1.$$

Группа $GL_n(\mathbb{A}_X)$ содержит подгруппы $GL_n(\mathbb{A}_{X,01})$, $GL_n(\mathbb{A}_{X,02})$ и $GL_n(\mathbb{A}_{X,12})$, над которыми описанное выше центральное расширение канонически расщепляется.

Пусть $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей ранга n на X. Выберем базисы слоев пучка $\mathcal{E}$ в каждой (схемной) точке поверхности X. Пусть $\alpha_{10} \in GL_n(\mathbb{A}_{X,01})$ — матрица перехода между выбранными базисами слоев $\mathcal{E}$ для (схемных) точек на X коразмерностей 0 и 1, $\alpha_{21} \in GL_n(\mathbb{A}_{X,12})$ — аналогичная матрица перехода для (схемных) точек на X коразмерностей 1 и 2, а $\alpha_{02} \in GL_n(\mathbb{A}_{X,02})$ — аналогичная матрица перехода для (схемных) точек на X коразмерностей 2 и 0. Имеем $\alpha_{02} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{10} = 1$.

Пусть $\widehat{\alpha_{02}}, \widehat{\alpha_{21}}, \widehat{\alpha_{10}}$ — элементы из группы $\widehat{GL_n(\mathbb{A}_X)}$, полученные подъёмом элементов $\alpha_{02}, \alpha_{21}, \alpha_{10}$ при помощи канонических сечений над подгруппами $GL_n(\mathbb{A}_{X,02})$, $GL_n(\mathbb{A}_{X,12})$ и $GL_n(\mathbb{A}_{X,01})$.

Теорема. [1] *Элемент* $\alpha_{02} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{10} \in \mathbb{Z} \subset \widehat{GL_n(\mathbb{A}_X)}$ *совпадает со вторым числом Чженя локально свободного пучка* $\mathcal{E}$.

Список литературы

[1] D.V. Osipov. Second Chern numbers of vector bundles and higher adeles, preprint, 2016.

[2] A.N. Parshin. Chern classes, adeles and L-functions. J. Reine Angew. Math. **341** (1983), 174–192.

Групповой анализ спектральной задачи, порождённой колебаниями стержневой системы

А.М. Павлов
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия
pavlov_arseniy@mail.ru

Рассмотрим начально-краевую задачу, описывающую продольные колебания стержневой системы, состоящей из $N+1$ стержней. Задача включает в себя систему из $N+1$ уравнений

$$m_j(x)\frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(p_j(x)\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x}\right)=0,\ j=0,\ \ldots,\ N, \qquad (1)$$

дополненных граничными

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}u_j(x,t)\Big|_{x=0}=0,\ j=0,\ \ldots,\ N,\\
&\frac{\partial}{\partial x}u_0(x,t)\Big|_{x=l}+k\left(N\cdot u_0(l,t)-\sum_{i=1}^{N}u_j(l,t)\right)=0, \qquad (2)\\
&\frac{\partial}{\partial x}u_j(x,t)\Big|_{x=l}+k\left(u_j(l,t)-u_0(l,t)\right)=0,\ j=1,\ \ldots,\ N,
\end{aligned}$$

и начальными условиями

$$u_j(x,t)\Big|_{t=0}=\psi(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u_j(x,t)\Big|_{t=0}=\varphi(x),\ j=0,\ldots,\ N. \qquad (3)$$

Приняв $u_j(x,t)=u_j(x)\,e^{i\sqrt{\lambda}t}$, преобразуем систему (1) к следующему виду:

$$\frac{1}{m_j(x)}\frac{d}{dx}\left(p_j(x)\frac{du_j(x)}{dx}\right)+\lambda u_j(x)=0,\ j=0,\ \ldots,\ N. \qquad (4)$$

Введём гильбертово пространство $H=\left(\sum_{j=0}^{N}\oplus L_{2j}\left([0,l],m_j(x)\right)\right)\ominus\{1\}$, вектор-функции $U=\{u_j\}$, где $u_j\in C^2\left(L_{2j}\left([0,l],m_j(x)\right)\right)$. Скалярное произведение в H определим как

$$(V,W)=\sum_{j=0}^{N}\int_0^l m_j(x)\,v_jw_jdx.$$

Пусть матричный оператор $A = diag\left(A_{jj}\right)$ действует на множестве $D\left(A\right) \subset H$, определённом граничными условиями (2). Компоненты оператора A действуют на вектор-функцию U следующим образом:

$$A_{jj}u_j = -\frac{1}{m_j\left(x\right)}\frac{d}{dx}\left(p_j\left(x\right)\frac{du_j\left(x\right)}{dx}\right),\ j = 0,\ \ldots,\ N.$$

Тогда из (4) и (2) получим спектральную задачу для оператора A:

$$AU = \lambda U.$$

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть функции* $p_j\left(x\right) \in C^1\left[0,l\right], m_j\left(x\right) \in C^0\left[0,l\right]$, $j = 0,\ \ldots,\ N$, *являются положительными ограниченными функциями координаты* x. *Примем* $p_0\left(x\right) = p_c\left(x\right),\ p_j\left(x\right) = p_s\left(x\right),\ m_0\left(x\right) = m_c\left(x\right)$, $m_j\left(x\right) = m_s\left(x\right),\ j = 1,\ \ldots,\ N$.

Тогда оператор A *— неограниченный, самосопряжённый, положительно определенный в* H *оператор, имеет положительный дискретный спектр собственных значений*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots,\quad \lambda_k \to \infty$$

и систему собственных функций $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$, *полную и ортогональную в пространствах* H *и* H_A. *При этом собственные функции оператора* A *являются базисными функциями неприводимых представлений группы* S_n, *где* $n = N$.

Данный результат является продолжением и дополнением работ [1], [2].

Список литературы

[1] А.М. Павлов, А.Н. Темнов. Продольные колебания пакета стержней. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. естественные науки, 2014, no. 6(57), 53–66.
[2] А.М. Павлов, А.Н. Темнов. Теоретико-групповой подход к решению уравнений движения механических систем, обладающих симметрией. Современные методы теории краевых задач. Материалы ВВМШ «Понтрягинские чтения–XXVII». — Воронеж: ВГУ, 2016, 202–204.

Алгебра Хопфа суперхарактеров треугольной группы

А.Н. Панов
Самарский университет, Самара, Россия
apanov@list.ru

Пусть G — конечная группа, $\mathrm{Irr}(G)$ — множество неприводимых характеров (представлений) группы G. Понятие теории суперхарактеров было введено в работе [1]. Предположим, что заданы два разбиения

$$\mathrm{Irr}(G) = X_1 \cup \cdots \cup X_m,\ X_i \cap X_j = \varnothing,$$

$$G = K_1 \cup \cdots \cup K_m,\ K_i \cap K_j = \varnothing.$$

Заметим, что число компонент в разложении должно быть одинаково. Каждому X_i сопоставим характер группы G по формуле

$$\sigma_i = \sum_{\psi \in X_i} \psi(1)\psi.$$

Говорят, что два разбиения $\mathcal{X} = \{X_i\}$ и $\mathcal{K} = \{K_j\}$ задают *теорию суперхарактеров* группы G, если каждый характер σ_i постоянен на каждом K_j. В этом случае $\{\sigma_i\}$ называют *суперхарактерами*, а $\{K_j\}$ – *суперклассами*. Таблицу значений $\{\sigma_i(K_j)\}$ называют *таблицей суперхарактеров*.

Примером теории суперхарактеров является теория неприводимых характеров. В этом случае разбиение $\mathcal{X}$ состоит из одноэлементных подмножеств, а разбиение $\mathcal{K}$ – из классов сопряжённых элементов. Заметим, что для некоторых групп, как например, группа B_n треугольных матриц n-го порядка над конечным полем $\mathbb{F}_q$, классификация неприводимых характеров считается «дикой» задачей. Поэтому для таких группа ставится задача построения теории суперхарактеров, приближенной к теории неприводимых характеров. Для группы B_n такая теория суперхарактеров была построена автором в работе [2].

Рассмотрим линейное пространство суперкласс функций SCB_n на группе B_n и прямую сумму

$$\mathrm{SCB} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{SCB}_n.$$

Определим умножение в SCB: для $\phi \in \mathrm{SCB}_k$ и $\psi \in \mathrm{SCB}_m$ положим $\phi \cdot \psi = \mathrm{Inf}(\phi \times \psi) \in \mathrm{SCB}_n$, где $n = k + m$.

Для любого разбиения $T = (A_1|A_2)$ множества $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ определена подгруппа $B_{A_1} \times B_{A_2}$ группы B_n, состоящая из треугольных матриц, для которых из $a_{ij} \neq 0$ вытекает, что i, j лежат в одной компоненте разбиения T. Подгруппа $B_{A_1} \times B_{A_2}$ естественно изоморфна $B_{|A_1|} \times B_{|A_2|}$. Пусть $\chi \in \mathrm{SCB}_n$. Тогда по определению коумножение $\Delta(\chi)$ равно сумме ограничений χ на всевозможные подгруппы вида $B_{A_1} \times B_{A_2}$ с последующим переносом на группу $B_{|A_1|} \times B_{|A_2|}$. Линейное пространство SCB является алгеброй Хопфа относительно введённых умножения и коумножения.

Пусть дана система некоммутирующих переменных $X \cup Y$, состоящая из двух частей $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_{|Y|}\}$. Группа финитных подстановок S_∞ действует на множестве X. Продолжим это действие на $X \cup Y$, считая действие тождественным на Y. Рассмотрим линейное пространство NPS, состоящее из комплексных степенных сумм от переменных из $X \cup Y$, бесконечных и ограниченной степени по X, конечных по Y и инвариантных относительно группы S_∞. Линейное пространство NPS является алгеброй Хопфа. Будем называть NPS *алгеброй Хопфа частично симметрических функций от некоммутирующих переменных.*

Теорема. Пусть $|Y| = q-2$. Алгебра Хопфа суперхарактеров треугольной группы SCB изоморфна алгебре Хопфа частично симметрических функций от некоммутирующих переменных NPS.

Список литературы

[1] P. Diaconis, I.M. Isaacs. Supercharacters and superclasses for algebra groups. Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 2359–2392.

[2] А.Н. Панов. Теория суперхарактеров для групп обратимых элементов приведённых алгебр. Алгебра и анализ **27** (2015), no. 6, 242–259; arXiv: `math.RT/1409.5565`.

Группы автоморфизмов аффинных многообразий, состоящие из алгебраических элементов

А.Ю. Перепечко
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия
perepeal@gmail.com

Доклад основан на совместных работах автора с М.Г. Зайденбергом, С. Коваленко и А. Регетой, см. [1, 2]. Автоморфизм аффинного многообразия X называется *алгебраическим*, если он лежит в алгебраической подгруппе. Рассмотрим следующие условия:

1. связная компонента группы автоморфизмов состоит из алгебраических элементов;
2. она равна индуктивному пределу алгебраических подгрупп;
3. она равна полупрямому произведению алгебраического тора и абелевой унипотентной группы;
4. касательная алгебра группы автоморфизмов состоит из локально конечных элементов;
5. подгруппа, порождённая унипотентными элементами, коммутативна.

Если $\dim X \leqslant 2$, то эквивалентность условий 1–5 является следствием [1]. В случае произвольной размерности нам удалось доказать лишь некоторые зависимости между данными условиями. Мы опишем их с помощью следующей теоремы.

Теорема. *Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{k}$ нулевой характеристики, $\mathrm{SAut}(X) \subset \mathrm{Aut}(X)$ — подгруппа автоморфизмов, порождённая 1-параметрическими унипотентными подгруппами, $\mathrm{Der}^{lf}(\mathbf{k}[X]) \subset \mathrm{Der}(\mathbf{k}[X])$ — подмножество локально конечных дифференцирований.*

Тогда подгруппа $\mathrm{SAut}(X)$ коммутативна, если и только если $\mathrm{Der}^{lf}(\mathbf{k}[X])$ является подалгеброй. В этом случае $\mathrm{Der}^{lf}(\mathbf{k}[X]) = \mathfrak{h} + \mathfrak{u}$ как пространство, где

- *$\mathfrak{h}$ — максимальная абелева подалгебра, состоящая из полупростых дифференцирований,*

- $\mathfrak{u}$ — *абелева подалгебра, состоящая из всех локально нильпотентных дифференцирований.*

Список литературы

[1] S. Kovalenko, A. Perepechko, M. Zaidenberg. On automorphism groups of affine surfaces. In: Algebraic varieties and Automorphism groups, Advanced Studies in Pure Mathematics **99**, pp. 207—286, to appear.
[2] A. Perepechko, A. Regeta. Automorphism groups of affine varieties with only algebraic elements, in preparation.

Ниль супералгебры Ли медленного роста

В.М. Петроградский
Университет Бразилиа, Бразилиа, Бразилия
petrogradsky@rambler.ru

Доклад основан на работах автора [4, 5].

Группы Григорчука и Гупты–Сидки играют фундаментальную роль в современной теории групп. Они являются естественными примерами самоподобных конечно порождённых периодических групп. Автор построил их аналог в случае ограниченных алгебр Ли характеристики 2 [2]. Шестаков и Зельманов обобщили эту конструкцию для произвольной характеристики [6]. Построен ещё ряд примеров конечно порождённых ограниченных алгебр Ли с ниль p-отображением над полем произвольной характеристики [3]. В случае поля нулевой характеристики подобные примеры алгебр Ли не существуют согласно результату Мартинес и Зельманова [1].

Теперь мы строим аналог групп Григорчука и Гупты–Сидки в классе супералгебр Ли над полем произвольной характеристики [4]. Построена супералгебра Ли $L = L_0 \oplus L_1$ такая, что оператор $\mathrm{ad}(a)$ нильпотентен для произвольного однородного элемента a относительно $\mathbb{Z}_2$-градуировки. Это свойство является аналогом периодичности групп Григорчука и Гупты–Сидки. В частности, мы получаем пример ниль тонко-градуированной супералгебры Ли медленного полиномиального роста, который показывает, что расширение теоремы Мартинес–Зельманова [1] для супералгебр Ли характеристики нуль не имеет места.

Также построено семейство 2-порождённых ограниченных алгебр Ли медленного полиномиального роста с ниль p-отображением для произвольно поля положительной характеристики. В частности, построено континуальное подсемейство ограниченных ниль алгебр Ли, имеющих размерность Гельфанда–Кириллова один, но рост которых не является линейным [5].

Список литературы

[1] C. Martinez, E. Zelmanov. Nil algebras and unipotent groups of finite width. Adv. Math. **147** (1999), no. 2, 328–344.
[2] V.M. Petrogradsky. Examples of self-iterating Lie algebras. J. Algebra **302** (2006), no. 2, 881–886.
[3] V.M. Petrogradsky, I.P. Shestakov, E. Zelmanov. Nil graded self-similar algebras. Groups Geom. Dyn. **4** (2010), no. 4, 873—900.
[4] V.M. Petrogradsky. Fractal nil graded Lie superalgebras. J. Algebra **466**, (2016), 229–283.
[5] V.M. Petrogradsky. Nil Lie p-algebras of slow growth. Comm. Algebra., to appear (2017).
[6] I.P. Shestakov, E. Zelmanov. Some examples of nil Lie algebras. J. Eur. Math. Soc. **10** (2008), no. 2, 391–398.

Примитивные идеалы алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(\infty))$

А.В. Петухов
Университет Манчестера, Манчестер, Великобритания,
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия
alex--2@yandex.ru

Доклад основан на серии совместных работ автора с Иваном Пенковым [1, 2, 3]. Хорошо известно, что задача классификации всех представлений (= модулей) для сколько-нибудь сложной ассоциативной алгебры является дикой. В то же время, задача классификации аннуляторов простых модулей (они называются *примитивными* идеалами) часто имеет содержательное решение. Скажем, существует полная классификация примитивных идеалов для универсальной обёртывающей алгебры любой конечномерной алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Отсюда и далее мы фиксируем алгебраически замкнутое поле $\mathbb{F}$ характеристики 0.

Логично поставить вопрос о классификации примитивных идеалов в универсальных обёртывающих алгебрах бесконечномерных алгебр Ли. Как кажется, для «большей части» бесконечномерных алгебр Ли $\mathfrak{g}$ существует «очень мало» двусторонних (в частности, примитивных) идеалов в алгебре $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, что находит отражение в следующей теореме.

Теорема. [Гипотеза Баранова] *Пусть $\mathfrak{g}$ — бесконечномерная алгебра Ли, являющаяся пределом простых конечномерных алгебр Ли. Тогда ассоциативная алгебра* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ *допускает ненулевой собственный идеал, отличный от аугментирующего идеала* $(\mathfrak{g})$, *если и только если алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *является диагональной* (*соответствующее определение дано в* [4]).

Доказательство этого утверждения представлено в [1, Секция 6]. Прямые пределы алгебр классических типов

$$\mathfrak{sl}(2) \to \mathfrak{sl}(3) \to \ldots \to \mathfrak{sl}(n) \to \ldots,$$

$$\mathfrak{so}(2) \to \mathfrak{so}(3) \to \ldots \to \mathfrak{so}(n) \to \ldots,$$

$$\mathfrak{sp}(2) \to \mathfrak{sp}(4) \to \ldots \to \mathfrak{sp}(2n) \to \ldots$$

единственны с точностью до изоморфизма; они обозначаются $\mathfrak{sl}(\infty)$, $\mathfrak{so}(\infty)$, $\mathfrak{sp}(\infty)$ и называются *финитарными* алгебрами Ли.

Классификация двусторонних идеалов в алгебре $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ для бесконечномерной диагональной нефинитарной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ может быть сведена к классификации когерентных локальных систем [5, 6] соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}$, см. [1, Секция 6]. Это наводит на мысль о том, что когерентные локальные системы могут играть существенную роль и в описании двусторонних идеалов алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ для финитарных алгебр Ли $\mathfrak{g}$. Идеалы, определяемые когерентными локальными системами, называются *интегрируемыми*, см. [1]; их определение приводится ниже.

Определение. а) Модуль M алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ называется *интегрируемым*, если пространство $A \cdot m$ конечномерно для всякого $m \in M$ и всякой конечнопорождённой подалгебры $A \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})$.
б) Идеал $I \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ называется *интегрируемым*, если он является аннулятором какого-либо интегрируемого $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-модуля M.

Стоит отметить, что число интегрируемых идеалов является счётным для всякой бесконечномерной диагональной (в частности, любой финитарной) алгебры Ли $\mathfrak{g}$; эти идеалы допускают явное описание, см. [1, Секция 7]. Основной результат, который хотелось бы представить в докладе, звучит так.

Теорема. *Если* $\mathbb{F}$ *несчётно, то всякий примитивный идеал алгебры* $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(\infty))$ *является интегрируемым.*

Доказательство этого утверждения представлено в [3]. Отметим также, что доказательство идущей выше теоремы, скорее всего, применимо также и к $\mathrm{U}(\mathfrak{so}(\infty))$ (после некоторой модификации), а в алгебре $\mathrm{U}(\mathfrak{sp}(\infty))$, напротив, существует примитивный идеал, не являющийся интегрируемым, см. текст в [1, Секция 8].

Список литературы

[1] A. Petukhov, I. Penkov. On ideals in the enveloping algebra of a locally simple Lie algebra. IMRN **13** (2015), 5196–5228; arXiv: `math.RA/1210.0466`.
[2] A. Petukhov, I. Penkov. On ideals in $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(\infty))$, $\mathrm{U}(\mathfrak{o}(\infty))$, $\mathrm{U}(\mathfrak{sp}(\infty))$. In: Representation theory — current trends and perspectives, EMS Series of Congress Reports, European Mathematical Society (EMS), 2017, to appear; arXiv: `math.RT/1511.01733`.
[3] A. Petukhov, I. Penkov. Primitive ideals of $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(\infty))$. Bulletin of London Mathematical Society, submitted; arXiv: `math.RT/1608.08934`.
[4] A.A. Baranov, A.G. Zhilinskii. Diagonal direct limits of simple Lie algebras. Comm. Algebra **27** (1999), 2749–2766.
[5] А.Г. Жилинский. Когерентные системы представлений индуктивных семейств простых комплексных алгебр Ли, препринт АН БССР **48**, no. 438, Минск, 1990.
[6] А.Г. Жилинский. Когерентные системы конечного типа индуктивных семейств недиагональных вложений. Доклады АН БССР **36** (1992), no. 1, 9–13.

Разрешимость первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли

С.А. Пихтильков, О.А. Пихтилькова, А.Н. Благовисная
Оренбургский государственный университет, Оренбург, Россия
`matmet@bk.ru`

В 2001 году А.В. Михалёв на семинаре механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова «Кольца и модули» поставил проблему: существует ли слабоартинова алгебра Ли, первичный радикал которой не является разрешимым?

Проблеме разрешимости первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли посвящен доклад.

Алгебра Ли L называется первичной, если для любых двух её идеалов U и V из $[U, V] = 0$ следует, что $U = 0$ или $V = 0$. Скажем, что идеал P алгебры Ли L является первичным, если фактор-алгебра L/P первична. Первичным радикалом $P(L)$ алгебры Ли L называется пересечение всех её первичных идеалов. Назовём алгебру Ли слабоартиновой, если она удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей идеалов.

Поиск решения проблемы А.В. Михалёва привел к следующим результатам.

С.А. Пихтильков показал, что первичный радикал специальной слабоартиновой алгебры разрешим [5]. Разрешимость первичного радикала также доказана для слабоартиновых локально нильпотентных алгебр Ли [2].

Решение ослабленной проблемы А.В. Михалёва показано в работе [1]. Авторами доказано, что первичный радикал алгебры Ли, удовлетворяющей условию обрыва убывающих цепочек внутренних идеалов или подалгебр, разрешим.

Известно, что первичный радикал алгебры Ли слабо разрешим, может не быть локально разрешимым [3]. Локальная разрешимость первичного радикала доказана для слабоартиновой алгебры Ли в [6].

Следующая теорема отвечает на вопрос о разрешимости первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли.

Теорема. *Пусть L — слабоартинова алгебра Ли. Тогда её первичный радикал $P = P(L)$ разрешим.*

Основные этапы доказательства теоремы следующие.

1. Рассматривается производный ряд первичного радикала $P = P(L)$. Используя условие слабоартиновости алгебры Ли L, получаем $R_1 = P^{(n+1)} = P^{(n)}$ и $[R_1, R_1] = R_1$.

В предположении, что $R_1 \neq 0$, доказывается неразрешимость последнего несобственного идеала $K = R_m$ убывающей цепи ненулевых идеалов, построенной на основе производных рядов первичного радикала $P = P(L)$ и собственных неразрешимых идеалов, содержащихся в идеалах стабилизирующей цепи.

2. Рассматривается представление первичного радикала алгебры Ли как нижнего слабо разрешимого радикала, из которого следует, что $\tau(\beta) = P(L)$ [1].

3. Показывается, что построенный в пункте 1 неразрешимый идеал K равен $\tau(\omega)$, который занумерован первым бесконечным порядковым числом.

4. Строится представление первичного радикала по нильпотентным идеалам: $\rho(\beta) = P(L)$. Идеал K представляется в виде последовательности возрастающих нильпотентных идеалов: $K = \bigcup_{i=0}^{\infty} \rho(i)$.

5. Приходим к противоречию существования ненулевых элементов в идеале K, что позволяет сделать вывод о разрешимости первичного радикала $P = P(L)$.

Для доказательства данного пункта используются результаты, изложенные в работах [2] и [7].

Список литературы

[1] Е.В. Мещерина, С.А. Пихтильков, О.А. Пихтилькова. О проблеме А.В. Михалёва для алгебр Ли. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика, 2013, no. 4, часть 2, 84–89.

[2] С.А. Пихтильков, В.М. Поляков. О локально нильпотентных артиновых алгебрах Ли. Чебышёвский сборник **6** (2005), no. 1, 163–169.

[3] А.В. Михалёв, И.Н. Балаба, С.А. Пихтильков. Первичный радикал градуированных Ω-групп. Фундаментальная и прикладная математика **12** (2006), no. 2, 159–174.

[4] Н. Джекобсон . Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.

[5] С.А. Пихтильков. Артиновые специальные алгебры Ли. В: Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2001, 189–194.

[6] О.А. Пихтилькова, С.А. Пихтильков. Локальная разрешимость первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли. Сибирский математический журнал **57** (2016), no. 3, 697–699.

[7] И. Капланский. Алгебры Ли и локально компактные группы. — М.: Мир, 1974.

Супералгебры Ли, разрешимые йордановы алгебры и их многообразия

А.В. Попов

Ульяновск, Россия

klever176@rambler.ru

В докладе будет рассказано про конструкцию, с помощью которой из любой супералгебры Ли можно получить разрешимую йорданову алгебру. Идея такого построения была навеяна работой [1]. Автору доклада удалось обобщить подход, использованный в [1], что позволило построить соответствие между супералгебрами Ли и йордановыми разрешимыми алгебрами, а также между многообразиями, порождаемыми соответствующими алгебрами.

Заметим, что связи между алгебрами Ли и йордановыми алгебрами весьма разнообразны, и имеются многие другие конструкции, позволяющие переходить от алгебр одного класса к алгебрам другого (см., например, [3], [4]).

Обозначим через $\mathbb{F}$ основное поле и будем сначала предполагать, что $\mathrm{char}\,(\mathbb{F}) \neq 2$.

Рассмотрим супералгебру Ли $L = L_0 \oplus L_1$ и грассманову алгебру $G = G[E]$ на счётном множестве порождающих E с естественной $\mathbb{Z}_2$-градуировкой $G = G_0 \oplus G_1$. Пространство $L \otimes G$ имеет разложение

$$L \otimes G = A_0 \oplus A_1,$$

где $A_0 = L_0 \otimes G_0 \oplus L_1 \otimes G_1$ и $A_1 = L_0 \otimes G_1 \oplus L_1 \otimes G_0$. Определим алгебру $J(L) = A_0 \oplus A_1 \oplus \mathbb{F}E$ со следующей операцией умножения $\circ$:

$$u \otimes g \circ e_i = e_i \circ u \otimes g = u \otimes ge_i, \text{ где } u \otimes g \in A_0, e_i \in E,$$

$$u \otimes g \circ v \otimes h = (-1)^h \, uv \otimes gh, \text{ где } u \otimes g, v \otimes h \in A_1.$$

Теорема 1. *Алгебра $J(L)$ йорданова и удовлетворяет дополнительным тождествам*

$$x^4 \equiv 0, \tag{1}$$

$$(x_1x_2)(x_3x_4)(x_5x_6) \equiv 0. \tag{2}$$

Легко видеть, что если M — подалгебра L, то $J(M)$ — подалгебра алгебры $J(L)$. Аналогичное замечание верно для фактoралгебр алгебры L. В результате применения конструкции $J()$ к прямому произведению алгебр M_i $(i \in I)$ получающаяся алгебра будет гомоморфным образом прямого произведения алгебр $J(M_i)$. Следовательно, по теореме Биркгофа любая алгебра M многообразия $var(L)$ переходит с помощью конструкции $J(M)$ в многообразие $var(J(L))$. На самом деле верно большее: всякому тождеству $f \equiv 0$ алгебры L соответствует некоторое тождество алгебры $J(L)$, полностью определяемое видом f.

Теперь будем считать, что $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$. Как известно, в такой ситуации изучение многообразия линейных алгебр V равносильно изучению последовательности пространств $\left\{P_n(V) = {}^{P_n}\!/_{P_n \cap T(V)}\right\}_{n\geqslant 1}$ (см. [2]), где P_n — подпространство свободной линейной алгебры счётного ранга $\mathbb{F}\{X\}$, образованное полилинейными мономами от образующих $x_1, \ldots, x_n$, а $T(V)$ — идеал тождеств многообразия V в $\mathbb{F}\{X\}$. Пространство $P_n(V)$ обладает структурой S_n-модуля (см. [2]) и может быть представлено в виде суммы неприводимых подмодулей M_λ:

$$P_n(V) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} m_\lambda(V) \, M_\lambda.$$

Также в определённых ситуациях полезно изучение $S_k \times S_{n-k}$-модулей $P_n(V) \downarrow S_k \times S_{n-k}$ и их разложений в сумму неприводимых модулей $M_{\lambda\mu} =$

$M_\lambda \otimes M_\mu$:

$$P_n(V) \cong \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash k \\ \mu \vdash n-k}} m_{\lambda\mu}(V)\, M_{\lambda\mu}.$$

Последовательность $c_n(V) = \dim P_n(V) = \sum\limits_{\lambda \vdash n} m_\lambda(V)$ называют последовательностью коразмерностей многообразия V. Экспонентой многообразия V называют величину $EXP(V) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(V)}$ (в случае, если предел существует).

Для случая, когда L — обычная алгебра Ли, то есть $L_1 = 0$, верна следующая теорема, описывающая связь между тождествами алгебр L и $J(L)$:

Теорема 2. *Обозначим* $k_l = \left[\frac{n+l-1}{2}\right]$, $n_l = n - k_l$. *Тогда полилинейная часть многообразия* $var(J(L))$ *имеет разложение в сумму* S_n*-модулей*:

$$P_n(J(L)) \cong \bigoplus_{l=0}^{\left[\frac{n+2}{3}\right]} P_n^l(J(L)),$$

которые, в свою очередь, имеют следующие представления:

$$P_n^0(J(L)) \cong \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n_0 \\ \lambda \neq (n_0-1,1)}} m_\lambda(L)\, M_{\bar{\lambda}} \otimes M_{(1^{k_0})} \uparrow S_n,$$

$$P_n^l(J(L)) \cong \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n_l - l \\ \mu \vdash l}} m_{\lambda\mu}(L)\, M_{\bar{\lambda}} \otimes M_{\left(1^{k_l}|\mu\right)} \uparrow S_n \text{ при } l \geqslant 1,$$

где $\left(1^{k_l}|\mu\right)$ *обозначает диаграмму Юнга, получающуюся из* μ *добавлением слева столбца длины* k_l.

Из теоремы 2 непосредственно вытекают следующие следствия.

Следствие 2.1. *Если для многообразия* $var(L)$ *существует экспонента* $EXP(L)$, *то для многообразия* $var(J(L))$ *также существует экспонента и справедливо равенство*:

$$EXP(J(L)) = 2\sqrt{EXP(L)}.$$

Следствие 2.1. *Решетка подмногообразий многообразия всех алгебр Ли вкладывается инъективным образом в решетку подмногообразий многообразия йордановых алгебр с тождествами* (1) *и* (2).

Список литературы

[1] В.Г. Скосырский. Разрешимость и сильная разрешимость йордановых алгебр. Сибирский математический журнал **30** (1989), no. 2, 167–171.

[2] A. Giambruno, M. Zaicev. Polynomial identities and asymptotic methods. AMS, Mathematical Surveys and Monographs **122**, Providence, RI, 2005.
[3] N. Jacobson. Structure and representation of Jordan algebras. AMS, Providence, RI, 1969.
[4] I.L. Kantor. Connection between Poisson brackets and Jordan and Lie superalgebras. In: Lie theory, differential equations and representation theory (Montreal, 1989), Univ. Montreal, Montreal, QC, 1990, 213–225

Градуированная геометрия в калибровочных теориях

В.Н. Сальников
Университет Люксембурга, Люксембург, Люксембург
vladimir.salnikov@uni.lu

В этом докладе я расскажу о некоторых конструкциях из *градуированной* и *обобщённой* геометрии. *Дифференциальное градуированное многообразие* (иногда их также называют Q-многообразиями) — это многообразие с градуировкой на пучке функций, снабжённое нечётным векторным полем веса 1, квадрат которого тождественно равен нулю (аналог дифференциала). Такое векторное поле называют *Q-структурой*, а расслоения в соответствующей категории — *Q-расслоениями*. Простой пример такой конструкции — дифференциальные формы на гладком многообразии. Более интересные примеры описывают симплектические и пуассоновы структуры, а также *структуры Дирака* (максимальное подрасслоение прямой суммы касательного и кокасательного расслоений с определёнными свойствами).

Эти объекты естественным образом возникают в теоретической физике при изучении *калибровочных преобразований* и *симметрий*. Основная идея заключается в том, что свойство калибровочной инвариантности функционалов можно переформулировать в терминах так называемой *эквивариантной Q-когомологии* [1]. Оказывается, что это удобный геометрический язык для описания (потенциально бесконечномерных) алгебр симметрии сигма моделей и для построения теорий с заданной алгеброй симметрии. Основной пример в этом докладе — сигма модель Дирака [2] — наиболее общая модель для двумерного пространства-времени [3], получаемая калибровкой слагаемого Весса–Зумино.

Предложенный формализм обобщается также на случай суперсимметричных калибровочных теорий [4]. Он может быть полезен для приложений, не связанных с физикой, о которых я скажу, если позволит время.

Список литературы
[1] V. Salnikov. Graded geometry in gauge theories and beyond. Journal of Geometry and Physics **87** (2015), 422–431.
[2] V. Salnikov, T. Strobl. Dirac sigma models from gauging. Journal of High Energy Physics **11** (2013), 110.
[3] A. Kotov, V. Salnikov, T. Strobl. 2d gauge theories and generalized geometry. Journal of High Energy Physics, **08** (2014), 021.
[4] V. Salnikov. Supersymmetrization: AKSZ and beyond; arXiv: `physics.math-ph/1608.07457`.

Многочлены Джека–Лорана при специальных значениях параметров

А.Н. Сергеев
Саратовский государственный университет, Саратов,
Высшая школа экономики, Москва, Россия
`SergeevAN@info.sgu.ru`, `asergeev@hse.ru`

Доклад основан на работах [1, 2].

Определим лорановскую версию алгебры симметрических функций как алгебру $\Lambda^{\pm}$, свободно порождённую переменными (бесконечными степенными суммами) $p_i, i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Мы также будем рассматривать «бесконечную сумму нулевых степеней» p_0 как дополнительный формальный параметр. Пусть $\Lambda^{\pm}[x, x^{-1}]$ будет алгеброй полиномов Лорана от x над алгеброй $\Lambda^{\pm}$, и $D\colon \Lambda^{\pm}[x, x^{-1}] \longrightarrow \Lambda^{\pm}[x, x^{-1}]$ — *бесконечномерный аналог операторов Данкла–Хекмана*. Введём также линейный оператор $E\colon \Lambda^{\pm}[x, x^{-1}] \longrightarrow \Lambda^{\pm}$ по формуле

$$E(x^l f) = p_l f, \ f \in \Lambda, \ l \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

и операторы $\mathcal{L}_r^{\infty}\colon \Lambda^{\pm} \longrightarrow \Lambda^{\pm}$, $r \in \mathbb{Z}_+$,

$$\mathcal{L}_r^{\infty} = E \circ D^r, \tag{2}$$

где действие правой части ограничено на $\Lambda^{\pm}$. Эти операторы дают *лорановскую версию* квантовых интегралов тригонометрической задачи Калоджеро–Мозера–Сазерленда в бесконечности.

Теорема 1. *Операторы $\mathcal{L}_r^{\infty}$ являются дифференциальными операторами порядка r, полиномиально зависящими от p_0 и коммутирующими друг с другом.*

Пусть $\mathcal{P}$ будет множеством всех разбиений (или диаграмм Юнга). Под *двойным разбиением* мы подразумеваем пару разбиений $\alpha = (\lambda, \mu) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$. Определим *длину двойного разбиений* $\alpha = (\lambda, \mu)$ как $l(\alpha) := l(\lambda) + l(\mu)$. Пусть $l(\alpha) \leqslant N$, тогда мы определим

$$\chi_N(\alpha) = (\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0, -\mu_s, \ldots, -\mu_1}_{N}). \tag{3}$$

и симметричный полином

$$P_{\chi_N(\alpha)}(x_1, \ldots, x_N) = (x_1 \ldots x_N)^{-a} P_\nu(x_1, \ldots, x_N),$$

где a — целое неотрицательное такое, что $\nu = \chi + a$ является разбиением и $P_\nu(x_1, \ldots, x_N)$ — обычный полином Джека. Пусть $\Lambda^{\pm}(p_0)$ будет алгеброй рациональных функций от p_0 с коэффициентами из $\Lambda^{\pm}$, и $\varphi_N \colon \Lambda^{\pm}(p_0) \to \Lambda^{\pm}_N$ будет гомоморфизмом, определённым как $\varphi_N(p_i) = x_1^i + \cdots + x_N^i$, $i \in \mathbb{Z}$ и специализацией $p_0 = N$.

Определим теперь *симметрические функции Джека–Лорана* $P_\alpha \in \Lambda^{\pm}(p_0)$ посредством следующей теоремы-определения.

Теорема 2. *Если $k \notin \mathbb{Q}$, $p_0 \neq n + k^{-1}m$ для любых $m,\ n \in \mathbb{Z}_{>0}$, то для любого двойного разбиения α существует единственный элемент $P_\alpha \in \Lambda^{\pm}(p_0)$ (называемый симметрической функцией Джека–Лорана) такой, что для каждого $N \in \mathbb{N}$*

$$\varphi_N(P_\alpha) = \begin{cases} P_{\chi_N(\alpha)}(x_1, \ldots, x_N), & \text{если } l(\alpha) \leqslant N, \\ 0, & \text{если } l(\alpha) > N. \end{cases} \tag{4}$$

Можно проверить, что так определённые симметрические функции для общего значения параметров p_0, k являются собственными для бесконечномерных операторов, определённых в Теореме 1.

Рассмотрим случай специального значения параметров, когда $p_0 = n + k^{-1}m$, где $n,\ m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Обозначим через $\pi(n, m)$ прямоугольную диаграмму Юнга размера $n \times m$ и соответствующее двойное разбиение $\pi = (\pi(n, m), \pi(n, m))$. Определим центральную симметрию θ, действующую на $(i, j) \in \pi(n, m)$ по формуле $\theta(i, j) = (n - i + 1, m - j + 1)$. Введём теперь отношение эквивалентности на двойных разбиениях.

Определение. Двойное разбиение $\alpha = (\lambda, \mu)$ эквивалентно двойному разбиению $\tilde{\alpha} = (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$, если

$$\alpha \setminus \pi = \tilde{\alpha} \setminus \pi \text{ и } \theta(\lambda \setminus \tilde{\lambda}) = \mu \setminus \tilde{\mu},\ \theta(\tilde{\lambda} \setminus \lambda) = \tilde{\mu} \setminus \mu. \tag{5}$$

Оказывается, что каждый класс эквивалентности E состоит из 2^r элементов, где число r зависит от класса E. Пусть $\mathcal{D}^\infty$ — алгебра, порождённая интегралами $\mathcal{L}_r^\infty$, $r = 1, 2, \ldots$. Следующая теорема описывает структуру $\Lambda^\pm$ как модуля над $\mathcal{D}^\infty$, а также действие $\mathcal{D}^\infty$ в обобщённых собственных подпространствах.

Теорема 3.

1) *Алгебра $\Lambda^\pm$ как модуль над алгеброй $\mathcal{D}^\infty$ может быть разложена в прямую сумму обобщённых собственных подпространств*

$$\Lambda^\pm = \bigoplus_E \Lambda^\pm(E),$$

и сумма берется по всем классам эквивалентности.

2) *Если класс E содержит 2^r элементов и k не является алгебраическим числом, то образ алгебры $\mathcal{D}^\infty$ в алгебре $End(\Lambda^\pm(E))$ изоморфен тензорному произведению r копий алгебры дуальных чисел*

$$\mathbb{C}[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r]/(\varepsilon_1^2,\, \varepsilon_2^2, \ldots, \varepsilon_r^2).$$

Список литературы

[1] A.N. Sergeev, A.P. Veselov. Jack–Laurent symmetric functions. Proc. London Math. Soc. (3) **111** (2015), 63–92.

[2] A.N. Sergeev, A.P. Veselov. Jack–Laurent symmetric functions for special values of the parameters. Glasgow Math. J. **58** (2016), no. 3, 599–616.

О центральности K_2-функтора групп Шевалле

С.С. Синчук

Санкт-Петербургский государственный университет,

Санкт-Петербург, Россия

sinchukss@gmail.com

Доклад основан на работах автора [1], [2]. В середине 70-х годов В. ван дер Каллен показал что универсальное центральное расширение элементарной группы $E(n, R)$ совпадает с группой Стейнберга $St(n, R)$ для произвольного $n \geqslant 4$ и произвольного коммутативного кольца R. Планируется рассказать о некоторых недавних результатах, в которых сходная задача решена для групп Шевалле других типов.

Список литературы
[1] S. Sinchuk. On centrality of K_2 for Chevalley groups of type E_ℓ. J. Pure Appl. Algebra, **220** (2016), 857–875; arXiv: `math.GR/1502.02463`.
[2] A. Lavrenov, S. Sinchuk. On centrality of even orthogonal K_2. J. Pure Appl. Algebra **221** (2017), 1134–1145; arXiv: `math.KT/1606.00272`.

Особенности дивизоров на многообразиях флагов

Е.Ю. Смирнов
Высшая школа экономики,
Независимый московский университет, Москва, Россия
`esmirnov@hse.ru`

Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа над $\mathbb{C}$. Напомним, что нормальное G-многообразие X называется *орисферическим*, если оно обладает открытой G-орбитой G/H, изоморфной слоению на торы над многообразием флагов G/P, где P — параболическая подгруппа в G, а P/H — тор. В работе Б. Паскье [2] было показано, что для орисферического многообразия X и эффективного $\mathbb{Q}$-дивизора D, инвариантного относительно борелевской подгруппы, пара (X, D) является лог-терминальной по Кавамате тогда и только тогда, когда $\lfloor D \rfloor = 0$ (то есть $D = \sum a_i D_i$, где D_i — простые дивизоры, а $0 \leqslant a_i < 1$.

Существенную часть доказательства составляет разбор случая, когда многообразие X само является многообразием флагов G/P. В этом случае Паскье использует разрешения особенностей Ботта–Самельсона, чтобы построить явное лог-разрешение пары $(G/P, D)$, и проверяет, что эта пара является лог-терминальной по Кавамате. Эта проверка использует достаточно тяжелую комбинаторику, связанную с системами корней. Далее это разрешение используется для построения лог-разрешения произвольной орисферической пары; из лог-терминальности по Кавамате пары $(G/P, D)$ выводится результат в общем случае.

В докладе будет показано, как тот же результат для многообразия флагов G/P можно получить без явного построения лог-разрешений и использования комбинаторных рассуждений. Вместо этого можно использовать теорему о произведении для лог-канонических порогов, принадлежащую Чун-Муку Хвану [1]. При этом мы не предполагаем, что $\mathbb{Q}$-дивизор D инвариантен относительно действия борелевской подгруппы.

Доклад основан на работе [3].

Список литературы

[1] J.-M. Hwang. Log canonical thresholds of divisors on Fano manifolds of Picard number 1. Compos. Math. **143** (2007), no. 1, 89–94.

[2] B. Pasquier. Klt singularities of horospherical pairs. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **66** (2016), no. 5, 2157—2167.

[3] E. Smirnov. Singularities of divisors on flag varieties and Hwang's product theorem; arXiv: `math.AG/1609.07771`.

О связи янгианов супералгебр Ли и квантовых аффинных супералгебр

В.А. Стукопин

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Южный математический институт, Владикавказ, Россия

`stukopin@gmail.com`

Мы устанавливаем изоморфизм между пополнением квантового дубля янгиана специальной линейной супералгебры Ли и квантованием супералгебры токов со значениями в специальной линейной супералгебре Ли.

Будем обозначать через $L\mathfrak{g}$ алгебру Ли (лорановских полиномиальных) петель со значениями в простой алгебре (базисной супералгебре) Ли $\mathfrak{g}$. Отметим, что это просто аффинная (супер)алгебра Каца–Муди без центрального элемента и градуировочного элемента d, задающего дифференцирование. Строится гомоморфизм квантовой (супер)алгебры токов $U_\hbar(L\mathfrak{g})$ на квантовую (супер)алгебру $Y_\hbar(\mathfrak{g})$ из которой янгиан $Y(\mathfrak{g})$ получается специализацией при $\hbar = 1$. При построении мы ограничиваемся рассмотрением частного случая базисной супералгебры Ли типа $A(m,n)$, то есть мы будем предполагать, что $\mathfrak{g}$ — либо простая алгебра Ли, либо $\mathfrak{g} = A(m,n)$. Построение этого гомоморфизма основано на описании квантовых аффинных алгебр (супералгебр) и янгианов в терминах производящих функций образующих. Пусть $I = \{1,\ 2,\ \ldots,\ m+1,\ \ldots,\ m+n+1\}$. Это множество мы будем отождествлять с множеством простых корней

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots \alpha_{m+n+1}\}$$

базисной супералгебры Ли, причём мы будем предполагать, что α_{m+1} — нечётный корень, то есть будем иметь дело с выделенной системой простых корней базисной супералгебры Ли $A(m,n)$.

Пусть $\{E_{i,r}, F_{i,r}, H_{i,r}\}_{i\in I, r\in\mathbb{Z}}$ — токовые образующие квантовой аффинной алгебры $U_\hbar((L\mathfrak{g})$, а $\{e_{i,k}, f_{i,k}, h_{i,k}\}_{i\in I, k\in\mathbb{Z}_+}$ — образующие янгиана $Y_\hbar(\mathfrak{g})$. Определим отображение

$$\Phi\colon U_\hbar((L\mathfrak{g}) \to Y_\hbar(\mathfrak{g}) \tag{1}$$

на образующих следующими формулами:

$$\Phi(H_{i,r}) = \frac{\hbar}{q_i - q_i^{-1}} \textstyle\sum_{k\geqslant 0} t_{i,k}\frac{r^k}{k!},$$
$$\Phi(E_{i,r}) = e^{r\sigma_i^+} \textstyle\sum_{m\geqslant 0} g_{i,m}^+ e_{i,m},$$
$$\Phi(F_{i,r}) = e^{r\sigma_i^-} \textstyle\sum_{m\geqslant 0} g_{i,m}^- f_{i,m}.$$

Здесь мы используем следующие обозначения: $q = e^{\hbar/2}$, $q_i = q^{d_i}$ — элементы симметризующей матрицы для матрицы Картана (супер)алгебры Ли $\mathfrak{g} = A(m,n)$. Мы используем систему логарифмических образующих $\{t_{i,r}\}_{i\in I, r\in\mathbb{N}}$ коммутативной подалгебры $Y_\hbar(\mathfrak{h}) \subset Y_\hbar(\mathfrak{g})$ порождённую элементами $\{h_{i,r}\}_{i\in I, r\in\mathbb{N}}$, аналогичную системе логарифмических картановских образующих, ранее использованных для янгиана. Эти логарифмические образующие для квантованной универсальной обёртывающей супералгебры определяются следующим равенством для порождающих функций:

$$\hbar\sum_{r\geqslant 0} t_{i,r}u^{-r-1} = \log(1 + \sum_{r\geqslant 0} h_{i,r}u^{-r-1}). \tag{2}$$

Элементы $\{g_{i,m}^\pm\}_{i\in I, m\in\mathbb{N}}$ лежат в пополнении алгебры $Y_\hbar(\mathfrak{h})$ и определяются следующим образом. Рассмотрим следующий формальный степенной ряд:

$$G(v) = \log\left(\frac{v}{e^{v/2} - e^{v/2}}\right) \in Q[[v]]$$

и определим $\gamma_i \in Y^{\hat{0}}[v]$ формулой:

$$\gamma_i(v) = \hbar\sum_{r\geqslant 0} \frac{t_{i,r}}{r!}\left(-\frac{d}{dv}\right)^{r+1} G(v).$$

Тогда

$$\sum_{m\geqslant 0} g_{i,m}^\pm v^m = \left(\frac{\hbar}{q_i - q_i^{-1}}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\gamma_i(v)}{2}\right).$$

Окончательно, $\sigma_i^\pm$ — это гомоморфизмы подсупералгебр

$$\sigma_i^\pm\colon Y_\hbar(\mathfrak{b}_\pm)(\subset Y_\hbar(\mathfrak{g})) \to Y_\hbar(\mathfrak{b}_\pm),$$

которые задаются на образующих $\{h_{i,r}, e_{i,r}, f_{i,r}\}$ следующим образом. Они оставляют неподвижными образующие $h_{i,k}$, а на остальные образующие действуют сдвигами: $\sigma_i^+ \colon e_{j,r} \to e_{j,r+\delta_{ij}}$, $\sigma_i^- \colon f_{j,r} \to f_{j,r+\delta_{ij}}$. Эти гомоморфизмы являются небольшой модификацией гомоморфизмов T_λ (см. [1]).

Теорема 1. 1) *Отображение*

$$\Phi \colon U_\hbar((L\mathfrak{g}) \to Y_\hbar(\mathfrak{g})$$

однозначно определяется заданием на образующих и является гомоморфизмом ассоциативных алгебр.
2) *Отображение* Φ *единственным образом может быть продолжено до гомоморфизма топологических пополнений*

$$\hat{\Phi} \colon \widehat{U_\hbar(L\mathfrak{g})} \to \widehat{Y_\hbar(\mathfrak{g})},$$

причём отображение $\hat{\Phi}$ *является изоморфизмом топологических ассоциативных (супер)алгебр.*

Список литературы

[1] В.А. Стукопин. О дубле янгиана супер態алгебры Ли типа $A(m,n)$. Функциональный анализ и его приложения **40** (2006), no. 2, 86–90.

Группы автоморфизмов многообразий с обратимыми функциями

А.Н. Трушин
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
Ornkano@mail.ru

Пусть основное поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, нулевой характеристики, несчётно, $E(X)$ — группа обратимых функций на X.

Теорема. *Пусть* X *неприводимо,* $\mathrm{Aut}(X)$ *действует с густой орбитой на* X. *Тогда* $\mathrm{rk}(E(X)) \leqslant \dim(X)$.

Список литературы

[1] F. Knop, H. Kraft, T. Vust. The Picard group of a G-variety. In: H. Kraft, P. Slodowy, T.A. Springer, eds. Algebraic transformation groups and invariant theory. DMV Seminar **13**, Springer Basel AG, 1989, 77–87.
[2] Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. — М: Наука, 1988.

Вершины многогранников Винберга

Е.Б. Фейгин
Высшая школа экономики, Москва, Россия
evgfeig@gmail.com

Доклад основан на совместной работе с И. Махлиным.

Многогранники Винберга описывают некоторые мономиальные базисы в пространствах неприводимых представлений простых алгебр Ли. Точнее, каждой целочисленной точке внутри многогранника ставится в соответствие вектор в представлении – результат применения монома от корневых элементов нильпотентной алгебры к старшему вектору. Замечательные свойства этих многогранников заключаются в том, что, во-первых, соответствующие базисы совместимы с ПБВ фильтрацией, и, во-вторых, ассоциированные с ними торические многообразия являются вырождениями многообразий флагов. Мы опишем вершины многогранников Винберга для типа A (схожие результаты получены также для симплектического случая). В частности, мы приведём явное описание простых и перестановочных вершин. Мы также приведём ряд интересных комбинаторных следствий.

Центрально порождённые примитивные идеалы универсальных обёртывающих алгебр нильпотентных алгебр Ли

А.А. Шевченко
Самарский университет, Самара, Россия
shevchenko.alexander.1618@gmail.com

Если $\mathfrak{n}$ — конечномерная комплексная нильпотентная алгебра Ли, то примитивные идеалы универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{n})$ можно описать в терминах отображения Диксмье, которое ставит в соответствие линейной форме $f \in \mathfrak{n}^*$ примитивный идеал $J(f)$. Любой примитивный идеал можно получить таким образом. При этом $J(f) = J(f')$, $f, f' \in \mathfrak{n}^*$, тогда и только тогда, когда f и f' принадлежат одной и той же коприсоединённой N-орбите, где $N = \exp(\mathfrak{n})$. Подробнее см. [2, 4]. Таким образом, описание примитивных идеалов сводится к описанию коприсоединённых N-орбит. Описание таких орбит — «дикая» задача в том смысле, что она эквивалентна задаче о паре матриц.

Так как описание коприсоединённых N-орбит не представляется возможным, описываются определённые типы идеалов и соответствующие орбиты и линейные формы. Интересный вопрос — описание центрально порождённых идеалов, связанных с ними форм и орбит. Для максимальных нильпотентных подалгебр полупростых алгебр Ли классических типов A_n и C_n ответ на этот вопрос известен. Мы приведём его после нескольких обозначений и определений.

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая комплексная алгебра Ли, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ — разложение Картана, Φ — её система корней, Φ^+ — положительные корни.

Определение. Рассмотрим Φ^+ и выберем в нем максимальный корень β_1. Рассмотрим Φ^+ без корней, которые перпендикулярны β_1, обозначим его Φ_1^+, и выберем в нем максимальный корень β_2. Продолжим этот процесс. Если на каком-то этапе получилась приводимая система корней, то данный процесс необходимо проделать для каждой из неприводимых компонент. В итоге получим конечное упорядоченное множество $\mathcal{B}$, которое называется *каскадом Костанта.*

Определение. Корень $\alpha \in \Phi^+$ называется *сингулярным* для корня $\beta \in \Phi^+$, если существует $\gamma \in \Phi^+$, такой что $\alpha + \gamma = \beta$.

Определение. Пусть $\xi\colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ — отображение, свяжем с этим отображением форму

$$f_\xi = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \xi(\beta) e_\beta^* \in \mathfrak{n}^*.$$

Форма $f_\xi \in \mathfrak{n}^*$ называется *формой Костанта*, если $\xi(\beta) \neq 0$, когда у β есть сингулярные корни.

Известно, что центр $U(\mathfrak{n})$ порождается набором алгебраически независимых образующих $\Delta_1, \ldots, \Delta_{|\mathcal{B}|}$, построение которых приводится в статьях [4, 5, 6]. Пересечение примитивных идеалов с центром $U(\mathfrak{n})$ имеет вид

$$\langle \Delta_1 - c_1, \Delta_2 - c_2, \ldots, \Delta_{|\mathcal{B}|} - c_{|\mathcal{B}|} \rangle.$$

Следующая теорема описывает случай максимальных нильпотентных подалгебр полупростых алгебр Ли классических типов A_n и C_n.

Теорема. [1] *Пусть Φ имеет тип A_n или C_n и J — примитивный идеал $U(\mathfrak{n})$, тогда следующие условия эквивалентны*:

a) *J — центрально порождённый идеал*;

b) *$c_1, c_2, \ldots, c_{|\mathcal{B}|}$ ненулевые (кроме последней в случае C_n и A_{2k-1})*;

c) *$J = J(f_\xi)$, где f_ξ — форма Костанта.*

В докладе будет обсуждена возможность применения такого описания для максимальных нильпотентных подалгебр полупростых алгебр Ли исключительных типов.

Работа поддержана грантом РФФИ 16–01–00154_а.

Список литературы

[1] M.V. Ignatyev, I. Penkov. Infinite Kostant cascades and centrally generated primitive ideals of $U(\mathfrak{n})$ in types A_∞, C_∞. J. Algebra **447** (2016), 109–134; arXiv: `math.RT/1502.05486`.

[2] J. Dixmier. Représentations irréductibles des algébres de Lie resolubles. J. Math. Pures et Appl. **45** (1966), 1–66.

[3] Ж. Диксмье. Универсальные обёртывающие алгебры. — М.: Мир, 1978.

[4] A. Joseph. A preparation theorem of the prime spectrum of a semisimple Lie algebra. J. Algebra **48** (1977), 241–289.

[5] А.Н. Панов. Редукция сферических функций. Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия, 2010, no. 6(80), 54–68; arXiv: `math.RT/0911.2369`.

[6] B. Kostant. Center of $U(\mathfrak{n})$, cascade of orthogonal roots and a construction of Lipsman–Wolf. In: A. Huckleberry, I. Penkov, G, Zuckerman, eds. Lie groups: structure, actions and representations, Progr. in Math. **306**. Birhäuser, 2013, 163–174.

Матричные дивизоры на римановых поверхностях

О.К. Шейнман

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

`sheinman@mi.ras.ru`

Матричные дивизоры введены А. Вейлем в работе [1], которая положила начало теории голоморфных векторных расслоений на римановых поверхностях. Связь матричных дивизоров с голоморфными векторными расслоениями аналогична связи обычных дивизоров и линейных расслоений. Подход А.Н. Тюрина [2, 3, 4] к классификации голоморфных векторных расслоений с помощью матричных дивизоров доставляет инварианты не только стабильных расслоений, но и расслоений, принадлежащих семействам меньших размерностей. Более того, он доставляет их явные координаты (получившие название параметров Тюрина), оказавшиеся полезными при интегрировании солитонных уравнений.

В докладе я хочу привлечь внимание к ещё одной связи между матричными дивизорами и интегрируемыми системами. Я покажу, что пространство модулей матричных дивизоров с данными дискретными инвариантами и носителем является однородным пространством. Затем я свяжу с тем же набором инвариантов алгебру операторов Лакса и соответствующее пространство

M-операторов, и дам два описания касательного пространства в единице к этому однородному пространству: одно в терминах систем корней, а другое – как фактор пространства M-операторов по алгебре операторов Лакса.

Доклад основан на работе автора [5].

Список литературы

[1] A. Weil. Generalisation des fonctions abeliennes, J. Math. Pures et Appl. **17** (1938), 47–87.

[2] А.Н. Тюрин. О классификации 2-мерных векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода. Известия АН СССР. Серия математическая **28** (1964), no. 1, 21–52.

[3] А.Н. Тюрин. Классификация векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода. Известия АН СССР. Серия математическая **29** (1965), no. 3, 657–688.

[4] А.Н. Тюрин. О классификации n-мерных векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода. Известия АН СССР. Серия математическая **30** (1966), no. 6, 1353–1366.

[5] O.K. Sheinman. Matrix divisors on Riemann surfaces and Lax operator algebras; arXiv: `math.AG/1701.01807`.

Об идеалах упорядоченных алгебр Ли

Е.Е. Ширшова

Московский государственный педагогический университет, Москва, Россия

shirshova.elena@gmail.com

Пусть F — частично упорядоченное поле [1], L — алгебра Ли над полем F. L называется частично упорядоченной алгеброй [2] (K-алгеброй), если $\langle L, +, \leqslant \rangle$ — частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условиям: из $a \leqslant b$ следует $\alpha a \leqslant \alpha b$ для всех $a, b \in L$ и $\alpha > 0$ в поле F; из $a \leqslant b$ следует $a + [a, c] \leqslant b + [b, c]$ для всех $a, b, c \in L$.

Теорема. *Пусть F — направленное поле и $0 < a$ в K-алгебре L над полем F. Тогда в алгебре L существует выпуклый направленный идеал I_a, положительный конус которого состоит из элементов $x \in L$, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant x \leqslant \alpha a$ для некоторых $\alpha > 0$ из поля F.*

Пусть $0 < a, b$ в K-алгебре L над частично упорядоченным полем F. Говорят, что элемент a бесконечно мал по сравнению с элементом b ($a << b$), если $\alpha a \leqslant b$ для всех $\alpha \in F$.

Теорема. *Пусть F — направленное поле, $0 < a, b$ в K-алгебре L над полем F и $a << b$. Тогда в алгебре L существует направленный идеал I, удовлетворяющая условиям:*

1) *I — наименьший выпуклый идеал алгебры, содержащий элемент a;*
2) *$b \notin I$;*
3) *$x << b$ для всех элементов $x \in I$.*

Определение. K-алгебру L над частично упорядоченным полем F назовем IK-алгеброй, если для любых $a_1, a_2, b_1, b_2 \in L$ из $a_1, a_2 \leqslant b_1, b_2$ следует существование $c \in L$, для которого $a_1, a_2 \leqslant c \leqslant b_1, b_2$.

Теорема. *Пусть $\{M_i | i \in J\}$ — семейство выпуклых направленных идеалов IK-алгебры L над частично упорядоченным полем F. Если M — подгруппа, порождённая теоретико-множественным объединением подгрупп M_i в группе $\langle L, + \rangle$, то M является выпуклым направленным идеалом алгебры L.*

Список литературы

[1] Л. Фукс. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.
[2] В.М. Копытов. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.

Константа Жордана для плоской группы Кремоны

Е.А. Ясинский
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
yasinskyegor@gmail.com

Доклад основан на работе автора [4].

Если не оговорено противное, $\Bbbk$ обозначает произвольное поле характеристики нуль. Хорошо известна следующая классическая теорема.

Теорема Жордана. (1878) *Существует положительная целая константа $J = J(n)$ такая, что всякая конечная подгруппа группы $\mathrm{GL}(n, \Bbbk)$ содержит нормальную абелеву подгруппу, индекс которой не превосходит J.*

Эта теорема инспирировала общее определение, предложенное В.Л. Поповым в [1]. Именно, назовём группу Γ *жордановой*, если существует положительная целая константа J такая, что всякая конечная подгруппа $G \subset \Gamma$ содержит нормальную абелеву подгруппу, индекс которой не превосходит J. Наименьшее такое число J назовем *константой Жордана* $J(\Gamma)$ группы Γ.

В последние годы активно исследуется свойство жордановости в двух различных ситуациях — алгебраической и топологической. Так, например, Этьеном Жисом был задан следующий вопрос: являются ли жордановыми группы диффеоморфизмов гладких компактных многообразий? Оказалось, что в общем случае ответ на этот вопрос — отрицательный, хотя гипотеза верна во многих частных случаях.

В алгебраической ситуации отправной точкой для современных исследований стал результат Ж.-П. Серра [3, Theorem 5.3], показавшего, что группа $\Bbbk$-автоморфизмов поля рациональных функций $\Bbbk(x, y)$ от двух независимых переменных является жордановой. Эта группа называется *группой Кремоны* $\mathrm{Cr}_2(\Bbbk)$ ранга 2 и с геометрической точки зрения представляет собой группу бирациональных автоморфизмов проективной плоскости над полем $\Bbbk$. Недавно Ю.Г. Прохоровым и К.А. Шрамовым была доказана жордановость группы бирациональных автоморфизмов проективного пространства любой размерности [2, Theorem 1.8].

Разумеется, после того, как доказана жордановость некоторой группы, возникает вопрос о точном значении её константы Жордана. Даже в случае группы $\mathrm{GL}(n, \Bbbk)$ этот вопрос оказался весьма нетривиальным: для $\Bbbk = \mathbb{C}$ и всех $n \geqslant 1$ константы Жордана были вычислены М. Коллинсом лишь в 2007 году. В работе [4] мы вычисляем точные значения констант Жордана для группы Кремоны ранга 2 над различными полями.

Теорема. [4, Theorem 1.8, 1.9, 1.10]. *Имеют место следующие равенства*:

1. $J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})) = 7200$;
2. $J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R})) = 120$;
3. $J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{Q})) = 120$.

Список литературы

[1] V.L. Popov, On the Makar-Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties. Affine algebraic geometry: the Russell Festschrift, CRM Proceedings and Lecture Notes **54**, Amer. Math. Soc. (2011), 289–311.

[2] Yu. Prokhorov, C. Shramov. Jordan property for Cremona groups. Amer. J. Math. **138** (2016), no. 2, 403–418.

[3] J.-P. Serre. A Minkowski-style bound for the orders of the finite subgroups of the Cremona group of rank 2 over an arbitrary field. Moscow Math. J. **9** (2009), no. 1, 183–198.

[4] E. Yasinsky. The Jordan constant for Cremona group of rank 2; arXiv: `math.AG/1610.09654`.

Содержание

Для заметок

Для заметок

Для заметок

Для заметок

Для заметок

Для заметок

Для заметок

Для заметок

Для заметок

Научное издание

Шестая школа-конференция

АЛГЕБРЫ ЛИ, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ

Москва, Россия
30 января – 4 февраля 2017 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Публикуется в авторской редакции
Компьютерная верстка в пакете LaTeX, макет *М.В. Игнатьева*

Подписано в печать 23.01.2017. Формат 60x90/16.
Усл.-печ. л. 6. Тираж 120 экз.

Издательство МЦНМО

Отпечатано в ООО «Миттель Пресс»