МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА»

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Пятая школа-конференция

АЛГЕБРЫ ЛИ, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ

Самара, Россия
22–27 июня 2015 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

The Fifth School-Conference on

LIE ALGEBRAS, ALGEBRAIC GROUPS AND INVARIANT THEORY

Samara, Russia
June 22–27, 2015

ABSTRACTS

Самара
Издательство «Самарский университет»
2015

УДК 512.81+512.74+512.554.3
ББК 22.1
П 99

П 99 **Пятая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов»** (22–27 июня 2015 г., Самара, Россия): тез. докл. / отв. за выпуск М. В. Игнатьев. — Самара: Издательство «Самарский университет», 2015. — 56 с.

ISBN 978–5–86465–673–0

В сборнике представлены тезисы докладов участников Пятой школы-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», проводившейся в Самаре с 22 по 27 июня 2015 года Московским государственным университетом им. М.В. Ломоносова и Самарским государственным университетом.

Предназначен научным работникам, преподавателям, студентам и аспирантам математических специальностей.

УДК 512.81+512.74+512.554.3
ББК 22.1

ISBN 978–5–86465–673–0

Предисловие

Пятая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» проходила в Самаре с 22 по 27 июня 2015 года. Её организаторами были Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова и Самарский государственный университет. (Первая школа-конференция проходила в Самаре 2009 году, вторая — в Москве в 2011 году, третья — в Тольятти в 2012 году, а четвёртая — в Москве в 2014 году, подробности см. на сайте `http://halgebra.math.msu.su/alg_conf/main.shtml`.)

Программный комитет школы конференции: Э.Б. Винберг (МГУ им. М.В. Ломоносова, председатель), И.В. Аржанцев (НИУ ВШЭ), В.А. Артамонов (МГУ им. М.В. Ломоносова), Н.А. Вавилов (СПбГУ), М.Х. Гизатуллин (ТГУ), М.В. Зайцев (МГУ им. М.В. Ломоносова), А.С. Клещёв (Университет Орегона, США), В.Н. Латышев (МГУ им. М.В. Ломоносова), А.Н. Панов (СамГУ), Д.А. Тимашёв (МГУ им. М.В. Ломоносова), В.И. Черноусов (Университет Альберты, Канада), О.К. Шейнман (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН).

Организационный комитет школы-конференции: С.Я. Новиков (СамГУ, председатель), И.В. Аржанцев (НИУ ВШЭ, зам. председателя), А.Н. Панов (СамГУ, зам. председателя), К.А. Вяткина (СамГУ), М.В. Игнатьев (СамГУ), В.В. Севостьянова (СамГУ), Д.А. Тимашёв (МГУ им. М.В. Ломоносова), А.А. Шевченко (СамГУ).

Участниками школы были студенты, аспиранты и молодые учёные из России и других стран. Им были прочитаны следующие лекционные курсы:

- *Сферические многообразия Фано*
  (В.В. Батырев, Университет Тюбинген, Германия);

- *Базисы в представлениях алгебр Ли, интегрируемые системы и многообразия модулей*
  (М.А. Берштейн, ИТФ им. Л.Д. Ландау, Москва);

- *Бигамильтоновы структуры и инварианты Жордана–Кронекера конечномерных алгебр Ли*
  (А.В. Болсинов, МГУ им. М.В. Лосоносова, Москва, и Университет Лафборо, Великобритания);

- *Введение в теорию характеров конечных групп Шевалле*
  (А.Е. Залесский, Институт математики НАН Беларуси, Минск);

- *Простые модулярные алгебры Ли (проблема классификации)* (М.И. Кузнецов, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород);
- *Фильтрации Пуанкаре–Биркгофа–Витта и многообразия флагов* (Е.Б. Фейгин, НИУ ВШЭ, Москва).

Сборник содержит тезисы докладов участников школы-конференции.

Проведение школы-конференции было поддержано фондом Дмитрия Зимина «Династия» (проект SS.15.011) и грантом РФФИ 15–31–10179.

Оргкомитет

Пространство модулей аффинных сферических многообразий с фиксированной полугруппой старших весов

Р.С. Авдеев
Высшая школа экономики, Москва, Россия
suselr@yandex.ru

Доклад основан на совместной работе со Ст. Кюпит-Футу (S. Cupit-Foutou).

Пусть G — связная редуктивная алгебраичекая группа над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ нулевой характеристики. Зафиксируем борелевскую подгруппу $B \subset G$ и максимальный тор $T \subset B$. Пусть $\mathfrak{X}(T)$ — решётка характеров тора T и $\Lambda^+ \subset \mathfrak{X}(T)$ — множество доминантных весов (по отношению к B). Для каждого $\lambda \in \Lambda^+$ обозначим через $V(\lambda)$ простой G-модуль со старшим весом λ. Пусть $\Delta \subset \mathfrak{X}(T)$ — система корней группы G и $\Pi \subset \Delta$ — множество простых корней по отношению к B. Для каждого $\alpha \in \Pi$ символом $\alpha^\vee$ обозначим соответствующий двойственный корень.

Неприводимое G-многообразие X называется *сферическим*, если в нём имеется открытая B-орбита. Хорошо известно [1], что неприводимое аффинное G-многообразие X является сферическим тогда и только тогда, когда естественное представление группы G в алгебре $\Bbbk[X]$ регулярных функций на X имеет простой спектр, то есть всякий простой G-модуль встречается в $\Bbbk[X]$ с кратностью не выше 1. Важнейшим инвариантом аффинного сферического G-многообразия X является его *полугруппа старших весов* Γ_X, состоящая из тех $\lambda \in \Lambda^+$, для которых $\Bbbk[X]$ содержит простой G-модуль $V(\lambda)$. Следующие свойства полугруппы Γ_X хорошо известны:

(1) Γ_X конечно порождена;

(2) X нормально тогда и только тогда, когда Γ_X *насыщенна*, то есть $\Gamma_X = \mathbb{Z}\Gamma_X \cap \mathbb{Q}^+\Gamma_X$.

Ещё одним инвариантом аффинного сферического многообразия X является так называемая *корневая полугруппа* Ξ_X. Это полугруппа, порождённая всеми элементами вида $\lambda + \mu - \nu$, где $\lambda, \mu, \nu \in \Gamma_X$ и $V(\lambda) \cdot V(\mu) \supset V(\nu)$ (произведение берётся в $\Bbbk[X]$). В работе [2] Ф. Кноп доказал, что полугруппа $\Xi_X^{\mathrm{sat}} = \mathbb{Z}\Xi_X \cap \mathbb{Q}^+\Xi_X$ (называемая насыщением полугруппы Ξ_X) свободна. Обозначим через $\overline{\Sigma}_X$ её базис.

Пусть $\Gamma \subset \Lambda^+$ — произвольная конечно порождённая полугруппа. В знаменитой работе [3] В. Алексеев и М. Брион построили так называемое пространство модулей аффинных сферических многообразий с полугруппой старших весов Γ. Это пространство, обозначаемое M_Γ, представляет собой аффинную схему конечного типа над $\Bbbk$, снабжённую регулярным действием присоединённого тора $T_{\mathrm{ad}} = T/Z(G)$ (где $Z(G)$ — центр группы G). В той же работе [3] были доказаны следующие свойства пространства M_Γ:

(1) T_{ad}-орбиты в M_Γ находятся в биекции с аффинными сферическими G-многообразиями с полугруппой старших весов Γ (рассматриваемыми с точностью до G-эквивариантного изоморфизма);

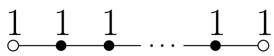
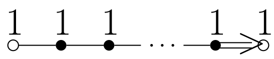
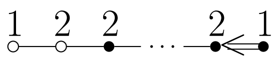
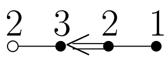
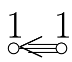
(2) M_Γ содержит единственную T_{ad}-неподвижную точку X_0, которая лежит в замыкании каждой T_{ad}-орбиты в M_Γ;

(3) для всякого аффинного сферического G-многообразия X с $\Gamma_X = \Gamma$ замыкание соответствующей T_{ad}-орбиты в M_Γ является торическим T_{ad}-многообразием, полугруппа старших весов которого равна Ξ_X.

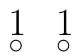
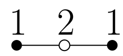
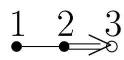
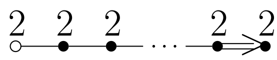
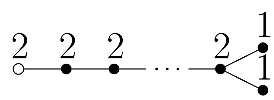
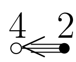
Поскольку точка $X_0 \in \mathrm{M}_\Gamma$ является T_{ad}-неподвижной, соответствующее касательное пространство $T_{X_0}\mathrm{M}_\Gamma$ имеет структуру конечномерного T_{ad}-модуля. Наш первый результат (см. теорему 1 ниже) даёт полное описание этой структуры в терминах исходной полугруппы Γ в случае, когда Γ насыщенна. Перед тем как сформулировать этот результат, введём некоторые обозначения.

Прежде всего, определим множество $\overline{\Sigma}_G \subset \mathbb{Z}^+\Pi$ *сферически замкнутых сферических корней* группы G. По определению, элемент $\sigma \in \mathbb{Z}^+\Pi$ принадлежит $\overline{\Sigma}_G$ тогда и только тогда, когда схема Дынкина его носителя, а также коэффициенты его выражения через простые корни присутствуют в одной из приведённых ниже таблиц.

Элементы из $\overline{\Sigma}_G \cap \Delta$

Элементы из $\overline{\Sigma}_G \setminus \Delta$

Отметим, что множество $\overline{\Sigma}_G$ конечно и зависит только от G. Для каждого $\sigma \in \overline{\Sigma}_G$ обозначим через Π_σ множество простых корней из его носителя, отвечающих чёрным вершинам на соответствующей картинке.

Пусть $\Gamma \subset \Lambda^+$ — конечно порождённая насыщенная полугруппа. Положим

$$\Gamma^\perp = \{\alpha \in \Pi \mid \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle = 0 \text{ для всех } \lambda \in \Gamma\}.$$

Рассмотрим рациональное векторное пространство $\mathcal{Q} = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\Gamma, \mathbb{Q})$ и введём отображение ограничения $\iota\colon \mathrm{Hom}(\mathfrak{X}(T), \mathbb{Q}) \to \mathcal{Q}$. Пусть $\mathcal{K} \subset \mathcal{Q}$ — конус, двойственный к $\mathbb{Q}^+\Gamma$. Для каждого элемента $\sigma \in \mathbb{Z}\Gamma$ положим $\mathcal{Q}_\sigma = \{q \in \mathcal{Q} \mid \langle q, \sigma \rangle \leqslant 0\}$.

Наконец, определим следующее множество:

$$\Phi(\Gamma) = \{\sigma \in \mathbb{Z}\Pi \mid -\sigma \text{ является весом } T_{\mathrm{ad}}\text{-модуля } T_{X_0}\mathrm{M}_\Gamma\}.$$

Теорема 1. *Пространство $T_{X_0}\mathrm{M}_\Gamma$ является T_{ad}-модулем с простым спектром. Кроме того, элемент $\sigma \in \mathbb{Z}\Pi$ принадлежит множеству $\Phi(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

(1) $\sigma \in \mathbb{Z}\Gamma$;

(2) $\sigma \in \overline{\Sigma}_G$;

(3) $\Pi_\sigma \subset \Gamma^\perp$;

(4) *если $\sigma = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, где носитель элемента σ имеет тип B_n ($n \geqslant 2$), то $\alpha_n \notin \Gamma^\perp$*;

(5) *если $\sigma = \alpha + \beta$, где $\alpha, \beta \in \Pi$ и $\alpha \perp \beta$, то $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle = \langle \beta^\vee, \lambda \rangle$ для всех $\lambda \in \Gamma$*;

(6) *если $\sigma = 2\alpha$ для некоторого $\alpha \in \Pi$, то $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \in 2\mathbb{Z}$ для всех $\lambda \in \Gamma$*;

(7) *если $\sigma \notin \Pi$, то конус $\mathcal{K}$ порождается множеством*

$$\{\iota(\gamma^\vee) \mid \gamma \in \Pi \backslash \Gamma^\perp\}$$

и конечным числом элементов из $\mathcal{Q}_\sigma$;

(8) *если $\sigma = \alpha \in \Pi$, то существуют два различных элемента $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\Gamma, \mathbb{Z})$ со следующими свойствами*:

  (a) $\langle \varrho_1, \alpha \rangle = \langle \varrho_2, \alpha \rangle = 1$;

  (b) *$\iota(\alpha^\vee) = a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2$ для некоторых положительных чисел $a_1,\ a_2 \in \mathbb{Q}$*;

  (c) *конус $\mathcal{K}$ порождается множеством*

$$\{\varrho_1, \varrho_2\} \cup \{\iota(\gamma^\vee) \mid \gamma \in \Pi \setminus (\Gamma^\perp \cup \{\alpha\})\}$$

  и конечным числом элементов из $\mathcal{Q}_\alpha$.

Одним из важнейших приложений теоремы 1 является

Теорема 2. *Пусть X — нормальное аффинное сферическое G-многообразие. Тогда корневая полугруппа Ξ_X совпадает с Ξ_X^{sat} и тем самым свободна.*

Использование теоремы 1 позволяет получить принципиально новое доказательство следующего результата, впервые полученного И. Лосевым в [4].

Теорема 3. *С точностью до G-эквивариантного изоморфизма, всякое нормальное аффинное сферическое многообразие X однозначно определяется парой* (Γ_X, Ξ_X).

Следующая теорема, доказанная в [3] другим методом, легко выводится из теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть $\Gamma \subset \Lambda^+$ — конечно порождённая полугруппа (не обязательно насыщенная). Тогда с точностью до G-эквивариантного изоморфизма существует лишь конечное число аффинных сферических G-многообразий с полугруппой старших весов Γ.*

Список литературы

[1] Э.Б. Винберг, Б.Н. Кимельфельд. Однородные области на флаговых многообразиях и сферические подгруппы полупростых групп Ли. Функц. анализ и его прилож. **12** (1978), no. 3, 12–19.

[2] F. Knop. Automorphisms, root systems, and compactifications of homogeneous varieties. J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 1, 153–174.

[3] V. Alexeev, M. Brion. Moduli of affine schemes with reductive group action. J. Algebraic Geom. **14** (2005), no. 1, 83–117.

[4] I.V. Losev. Proof of the Knop conjecture. Ann. Inst. Fourier **59** (2009), no. 3, 1105–1134.

Базисы Гельфанда–Цетлина для представления алгебры $\mathfrak{sp}_{2n}$: подходы Желобенко и Молева

Д.В. Артамонов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

artamonov.dmitri@gmail.com

Хорошо известна конструкция базиса в представлении $\mathfrak{gl}_N$, данная в 1950-м году Гельфандом и Цетлиным, основанная на изучении разложении неприводимого $\mathfrak{gl}_N$-представления в прямую сумму $\mathfrak{gl}_{N-1}$-неприводимых. В опубликованной краткой заметке Гельфанд и Цетлин привели конструкцию базиса и формулы для действия генераторов алгебры. Интересно, что на вывод этих формул так и не был опубликован и позже на Западе появилась работа Биденхарна и Бэрда, где был предложен независимый вывод данных формул.

Распространить данную контрукцию на случай алгебры $\mathfrak{sp}_{2n}$ весьма трудно. В работах Желобенко 60-х годов была дана конструкция базиса, но ему не удалось вывести формулы для действия образующих. В 1998-ом году базис Гельфанда–Цетлина для алгебры $\mathfrak{sp}_{2n}$ был построен Молевым, при этом использовалась совершенно новая техника — действие янгинана на пространстве кратности. Связь этого базиса с базисов Желобенко известна не была.

В докладе предполагается показать, как можно завершить конструкцию Желобенко (используя некоторые идеи Биденхарна и Бэрда) и вычислить действия образующих в базисе, также будет показано, что базисы Желобенко и Молева в определённом смысле совпадают.

Канонические и граничные представления на сфере с действием обобщенной группы Лоренца

А.А. Артемов
Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, Тамбов, Россия
tria@tsu.tmb.ru

Материал настоящей заметки основан на работе автора [1].

Канонические представления на *эрмитовых* симметрических пространствах G/K были введены в работах Ф.А.Березина [2] и А.М. Вершика, И.М. Гельфанда и М.И. Граева [3] — для нужд квантования и квантовой теории поля. Эти представления действуют сдвигами в функциях на G/K и являются унитарными относительно некоторого *нелокального* скалярного произведения, теперь называемого формой Березина. Они являются деформациями квазирегулярного представления группы G, действующего сдвигами в пространстве L^2 на G/K (ядро скалярного произведения в L^2 есть дельта-функция, это — локальное скалярное произведение). Разложение квазирегулярного представления на однородном пространстве на неприводимые составляющие есть основная задача абстрактного (некоммутативного) гармонического анализа. Появление нелокального скалярного произведения делает теорию (некоммутативный гармонический анализ) значительно более богатой и интересной – как для самой математики, так и для ее приложений.

Новый подход к этому понятию канонического представления предлагается В.Ф. Молчановым [4]–[6]. Основная идея состоит в расширении этого понятия и распространении его с класса эрмитовых симметрических пространств G/K, рассматривавшегося ранее, на другие классы симметрических полупростых пространств G/H, используя для этого понятия *надгруппы*. При этом оказывается естественным отказаться от слишком стеснительного условия унитарности, нужно позволить каноническим представлениям действовать в достаточно широких пространствах функций и даже более того – в пространствах сечений линейных расслоений, в частности, в пространствах обобщенных функций. Эти пространства не обязательно гильбертовы (или банаховы). Более естественной для такой цели является структура ядерного пространства. Кроме того, естественным является расширение рамок для изучения гармонического анализа: теория должна включать действие группы G не только на ее однородных пространствах, но и на многообразиях с нетранзитивным действием группы G. В качестве таких многообразий мы берем флаговые пространства надгрупп $\widetilde{G}$.

Решаемые нами задачи относятся к интересным вопросам некоммутативного гармонического анализа. В нашей работе изучаются канонические и граничные представления обобщенной группы Лоренца (псевдоортогональной группы) $G = \mathrm{SO}_0(1, n{-}1)$, действующей на единичной сфере Ω в пространстве $\mathbb{R}^n$. Мы рассматриваем два варианта действия группы G на сфере Ω. Они связаны с двумя вариантами надгруппы $\widetilde{G}$. Важно заметить, что в нашем случае сфера не является однородным пространством, она есть G-пространство, действие группы не транзитивно, представления не унитарны.

А именно, возьмем в пространстве $\mathbb{R}^n$, билинейную форму

$$[x, y] = -x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

Группа $G = \mathrm{SO}_0(1, n{-}1)$ сохраняет эту форму. В качестве надгруппы для G в первом варианте мы берем группу $\widetilde{G} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Обозначим через $|x|$ евклидову норму в $\mathbb{R}^n$. Пусть Ω — сфера $|x| = 1$, пусть S — сечение конуса $[x, y] = 0$ плоскостью $x_1 = 1$, оно есть сфера в $\mathbb{R}^{n-1}$. Обозначим через $\langle f, h\rangle_\Omega$ и $\langle \psi, \varphi\rangle_S$ скалярные произведения по евклидовым мерам du и ds на Ω и S соответственно.

Канонические представления $R_{\lambda,\nu}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = 0, 1$ группы G мы определяем как ограничения представлений максимально вырожденной серии надгруппы $\widetilde{G}$ на группу G. Они действуют в пространстве $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ функций на Ω класса C^∞ и четности ν:

$$\Big(R_{\lambda,\nu}(g)\, f\Big)(u) = f\left(\frac{ug}{|ug|}\right)\, |ug|^{-\lambda-n}, \quad g \in G.$$

Преобразованием Березина назовем оператор $Q_{\lambda,\nu}$ в $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$, задаваемый формулой

$$\big(Q_{\lambda,\nu}\ f\big)(u) = c(\lambda, \nu) \int\limits_\Omega [u, v]^{\lambda,\nu}\ f(v)\ dv,$$

где $c(\lambda,\nu)$ — некоторый множитель, мы используем обозначение $t^{\lambda,\nu} = |t|^\lambda \operatorname{sgn}^\nu t$. Оператор $Q_{\lambda,\nu}$ сплетает $R_{\lambda,\nu}$ с $R_{-\lambda-n,\nu}$. Композиция $Q_{-\lambda-n,\nu}Q_{\lambda,\nu}$ есть тождественный оператор. Назовем *формой Березина* полуторалинейную форму, порожденную оператором $Q_{\lambda,\nu}$, то есть форму $\mathcal{B}_{\lambda,\nu}(f,h) = \langle Q_{\lambda,\nu} f, h\rangle_\Omega$. Представление $R_{\lambda,\nu}$ и оператор $Q_{\lambda,\nu}$ могут быть продолжены на пространство $\mathcal{D}'_\nu(\Omega)$ обобщенных функций на Ω четности ν.

Представления T_σ, $\sigma \in \mathbb{C}$, группы G, связанные с конусом и участвующие в разложении канонических представлений, действуют в пространстве $\mathcal{D}(S) = C^\infty(S)$:

$$\Big(T_\sigma(g)\varphi\Big)(s) = \varphi\Big(\frac{sg}{(sg)_1}\Big)(sg)_1^\sigma.$$

Обозначим $a = [u,u]$, $\Omega_\pm = \{\pm\, a>0\}$. Действие $u \mapsto ug/|ug|$ группы G на Ω не транзитивно. Оно имеет 3 открытые орбиты: Ω_+ и $\Omega_- \cap \{\pm u_1 > 0\}$.

Каноническое представление $R_{\lambda,\nu}$ порождает два представления L_λ и M_λ, связанные с границей $\Omega_0 = \{a = 0\}$ открытых орбит. Первое из них действует в пространстве обобщенных функций четности ν, сосредоточенных на Ω_0. Второе представление действует в многочленах Тейлора (струях) от a функций $f \in \mathcal{D}_\nu(\Omega)$.

Основной результат работы состоит в разложении канонических и граничных представлений на сфере для обоих вариантов по неприводимым представлениям, связанным с конусом. Попутно мы разлагаем форму Березина $\mathcal{B}_{\lambda,\nu}(f,h)$ по инвариантным эрмитовым формам для представлений T_σ («формула Планшереля»). В работе построен гармонический анализ на паре гиперболоидов. Кроме того, содержится и ряд других результатов, связанных со сферическими функциями, «смешанными» сферическими функциями, сплетающими операторами, преобразованиями Фурье и Пуассона, асимптотикой преобразования Пуассона и преобразования Березина и др.

Список литературы

[1] А.А. Артемов. Канонические и граничные представления на сфере с действием обобщенной группы Лоренца: монография. Тамбов, Издательский дом ТГУ им. Г.Р. Державина, 2010.

[2] Ф.А. Березин. Квантование в комплексных симметрических пространствах. Изв. Акад. Наук СССР. Сер. матем. **39** (1975), no. 2, 363–402.

[3] А.М. Вершик, И.М. Гельфанд, М.И. Граев. Представления группы $SL(2,R)$, где R – кольцо функций. УМН **28** (1973), no. 5, 83–128.

[4] В.Ф. Молчанов. Канонические представления на двуполостных гиперболоидах. Записки научных семинаров ПОМИ **311** (2006), 91–124.

[5] В.Ф. Молчанов, А.А. Артемов, Л.И. Грошева. Канонические и граничные представления. Вестник Тамбовского унив. Сер.: Естеств. и техн. науки **14** (2009), вып. 6, ч. 3, 1367–1425.
[6] В.Ф. Молчанов, А.А. Артемов, Н.Б. Волотова и др.; под ред. В.Ф. Молчанова. Некоммутативный гармонический анализ и квантование на многообразиях: монография. Тамбов, Издательский дом ТГУ им. Г.Р. Державина, 2010.

Инвариантное представление симметрий ОДУ второго порядка проективного типа и рациональные интегралы

Ю.Ю. Багдерина
Институт математики с вычислительным центром РАН, Уфа, Россия
yulya@mail.rb.ru

Рассматривается семейство ОДУ второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = S(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3R(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3Q(x,y)\frac{dy}{dx} + P(x,y), \qquad (1)$$

которому, в частности, принадлежат уравнения Пенлеве и линеаризуемые уравнения. Кроме того, проекция системы геодезических на двумерной поверхности с римановой метрикой также имеет вид (1). В [1] построен базис алгераических инвариантов $I_1(x,y)$, $\ldots$, $I_n(x,y)$ уравнений (1), дифференциальный инвариант $I_0(x,y,dy/dx)$ и операторы инвариантного дифференцирования $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$.

В настоящей работе получен известный [2] критерий существования симметрий уравнения (1) в терминах инварианта I_0 и его инвариантных производных и подобный критерий в терминах инвариантов I_1, $\ldots$, I_n и их инвариантных производных. Координаты ξ, η оператора точечной симметрии

$$X = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y,$$

допускаемого уравнением (1), описаны с использованием относительных инвариантов уравнения. Условия существования у уравнения (1) интеграла вида

$$F = \frac{a_1(x,y)y' + a_0(x,y)}{y' + b_0(x,y)} \qquad (2)$$

также выражены в терминах относительных инвариантов уравнения. Найдены примеры уравнений (1), не обладающих симметриями, но имеющих рациональный по y' интеграл. В частности, в случае метрики $ds^2 = \mathrm{e}^{\sigma(x)}((g(x)y + f(x)\sqrt{y})dx^2 + dxdy)$ проекция системы геодезических всегда имеет интеграл вида (2), но только при специальных значениях $f(x)$ может иметь одну или три симметрии.

Список литературы

[1] Yu. Yu. Bagderina. Invariants of a family of scalar second-order ordinary differential equations. J. Phys. A: Math. Theor. **46** (2013), no. 29, paper 295201.

[2] B. Kruglikov. Point classification of 2nd order ODEs: Tresse classification revisited and beyond, see arXiv: `math.CA/0809.4653` (2008).

О характерах Рамануджана

Г.В. Воскресенская

Самарский государственный университет, Самара, Россия

galvosk@mail.ru

В докладе будет рассказано о свойствах характеров Рамануджана.

Пусть Φ — такое представление конечной группы G в пространстве V, что характеристический многочлен любого элемента $g \in G$ имеет вид

$$P_g(x) = \prod_{j=1}^{s} (x^{a_j} - 1)^{t_j},\ a_j \in \mathbb{N},\ t_j \in \mathbb{Z}.$$

Тогда элементу можно сопоставить функцию:

$$g \to \eta_g(z) = \prod_{j=1}^{s} \eta(a_j z)^{t_j}.$$

Если $24 | \dim V$, то $\eta_g(z)$ является модулярной формой с характером χ_g.

Определение. Пусть p — простое число. Характером Рамануджана называется функция

$$\psi_p(g) = \begin{cases} p^{k(g)-1}\chi_g(p), & (\mathrm{ord}(g), p) = 1, \\ 0, & (\mathrm{ord}(g), p) = p. \end{cases}$$

Мы остановимся на следующих аспектах:

1) связь с представлениями группы Матье M_{24};

2) связь с характерами Вейля;

3) роль в теории модулярных форм.

Список литературы

[1] Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М., Наука, 1988.

[2] Г.В. Воскресенская. Модулярные формы и представления групп. Мат. заметки **52** (1992), no. 1, 25–31.

[3] G. Mason. M_{24} and certain automorphic forms. Contemp. Math. **45** (1985), 223–244.

[4] K. Ono. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. CBMS Reg. Conf. Ser. Math., v. **102**, AMS, Providence, RI, 2004.

Об одном способе построения U-проектора для присоединённого действия группы $\mathrm{GL}(n, K)$[1]

К.А. Вяткина

Самарский государственный университет, Самара, Россия

vjatkina.k@gmail.com

Пусть K — поле характеристики нуль, $G = \mathrm{GL}(n, K)$, U — унитреугольная подгруппа в G. Формула $Ad_T X = TXT^{-1}$, $T \in U$, $X \in V$ определяет присоединённое действие группы U в пространстве $V = \mathrm{Mat}(n, K)$. Пусть $A = K[x_{i,j}]$ — кольцо регулярных функций на $\mathrm{Mat}(n, K)$.

Определим на A локально нильпотентное дифференцирование $\partial_{i,j}$, задаваемое формулой

$$\partial_{i,j} f(X) = \left.\frac{\partial(f(Ad_{\exp t \cdot E_{i,j}} X))}{\partial(t)}\right|_{t=0},$$

где $X \in V$, а E_{ij} — матричная единица.

Через $M_{i_1,\dots i_k}$ обозначим минор k-ого порядка матрицы X с системой строк $\{i_1, \dots, i_k\}$ и столбцов $\{1, \dots, k\}$, а через $W_{i_1,\dots i_k}$ — минор k-ого порядка матрицы X с системой столбцов $\{i_1, \dots, i_k\}$ и строк $\{n-k+1, \dots, n-1, n\}$. Обозначим

[1]Работа поддержана грантами РФФИ 14–01–31052–мол_а и 14–01–97017–р_поволжье_а.

$$Q_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{W_{1,\dots,i-1,j}}{M_{n-j+1,\dots,n}} & \text{при } i+j < n+1, \\ \dfrac{M_{i,j+1,\dots,n}}{M_{j+1,\dots,n}} & \text{при } i+j \geq n+1, \end{cases}$$

где $i < j$. Непосредственно проверяется, что для любого $\partial_{i,j}$ выполняется $\partial_{i,j}(Q_{i,j}) = 1$.

Обозначим через A_D локализацию кольца A относительно множества знаменателей, порождённых системой угловых миноров $D = \{M_{i,\dots,n}, 2 \leqslant i \leqslant n\}$. Рассмотрим отображение $S_{i,j}(a)\colon A \to A_D$ вида

$$S_{i,j}(a) = a - \partial_{i,j}(a)Q_{i,j} + {\partial_{i,j}}^2(a)\frac{Q_{i,j}^2}{2!} - {\partial_{i,j}}^3(a)\frac{Q_{i,j}^3}{3!} + \dots$$

Зададим число

$$p = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{если } n \text{ чётное}, \\ \frac{n-1}{2}, & \text{если } n \text{ нечётное}. \end{cases}$$

Для любого $1 \leqslant k \leqslant p$ обозначим

$$P_k = S_{n-k,n-k+1} \dots S_{k+1,n-k+1} S_{k,n-k+1} S_{k,n-k} \dots S_{k,k+2} S_{k,k+1}.$$

Рассмотрим отображение $P\colon A \to A_D$, вида $P = P_p \dots P_2 P_1$.

Теорема 1. *Оператор $P\colon A_D \to A_D$ является проектором на A_D^U.*

Рассмотрим произвольную матрицу $X \in V$. Свяжем с ней множество пар индексов $\{(a,b)\}$. Каждая пара в множестве отвечает за строчку и столбец элемента соответственно. Определим следующие наборы:
$D' = \{(a,b) | a+b = n+1\}$ — побочная диагональ.
$D'_0 = \{(a,b) | a+b = n+1, b < \left[\frac{n}{2}\right]\}$ — элементы побочной диагонали, лежащие под главной диагональю.
Рассмотрим $(a,b) \in D'_0$. Определим множества:
$\Gamma^+_{a,b} = \{(m,b) | b \leq m < a\}$ — столбец над (a,b)
$\Gamma^-_{a,b} = \{(a,k) | b < k < a\}$ — строка слева от (a,b).

$$\Gamma = \bigcup_{(a,b) \in D'_0} (\Gamma^+_{a,b} \cup \Gamma^-_{a,b}).$$

Теорема 2. *Алгебра A_D^U есть кольцо многочленов от $\{P(x_{i,j}) | \ (i,j) \notin \mathit{\Gamma}\}$, локализованное по системе знаменателей, порожденной элементами $\{P(x_{i,j}) | \ (i,j) \in D', i \neq 1\}$.*

Теорема 3. *Поле U-инвариантов есть поле рациональных функций от*
$$\{P(x_{i,j})|\ (i,j) \notin \Gamma\}.$$
Другая система образующих для поля U-инвариантов предложена в [1].

Список литературы

[1] К.А. Вяткина, А.Н. Панов. Поле U-инвариантов присоединенного представления группы $GL(n, K)$. Мат. заметки **93** (2013), no. 1, 144–147.

Построение некоторых рациональных представлений кремоновой группы плоскости

М.Х. Гизатуллин
gizmarat@yandex.ru

Речь идёт о группе Cr_2 всех $\mathbb{C}$-автоморфизмов поля $\mathbb{C}(x, y)$ рациональных функций от двух независимых переменных x, y. Она изоморфна (инверсно) группе бирациональных преобразований проективной плоскости и содержит в качестве подгруппы группу $\mathrm{PGL}(3)$ проективных преобразований.

Нас интересуют представления группы Cr_2, представления в следующем смысле. Известно (S. Cantat, Y. Cornulier, см. [1]), что эта группа не имеет нетривиальных конечномерных линейных представлений, но существуют её нетривиальные и интересные представления бирациональными преобразованиями других проективных пространств, где некая слабая замена линейности имеет место. Последняя состоит в следующем: ограничение представления на подгруппу $\mathrm{PGL}(3)$ является проективизацией некоторого линейного представления этой подгруппы. Разумно, как нам кажется, интересоваться лишь теми случаями, где сопутствующее линейное представление проективной группы неприводимо.

В докладе предполагается рассказать о тензорных представлениях группы Cr_2, построенных в [2].

Список литературы

[1] Y. Cornulier. Nonlinearity of some subgroups of the planar Cremona group, see `http://www.normalesup.org/cornulier/crelin.pdf` (2013).
[2] M. Gizatullin. On some tensor representations of the Cremona group of the projective plane. London Mathematical Soceity, Lecture Note Series **264**. New Trends in Algebraic Geometry, EuroConference on Algebraic Geometry, Warwick, July 1996. Cambridge University Press (1999), 111–150.

Существенные сигнатуры и канонические базисы неприводимых представлений групп B_3 и D_4

А.А. Горницкий
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
gnomage@mail.ru

Рассматриваются конечномерные представления простых комплексных алгебр Ли и вопрос построения «канонического» весового базиса в произвольном неприводимом модуле старшего веса. Э.Б. Винберг предложил метод построения таких базисов путем применения к старшему вектору понижающих операторов, отвечающих всем отрицательным корням, и выдвинул ряд гипотез об их параметризации и структуре. Известно, что гипотезы верны для случаев A_n, C_n [1], [2], а также для случая G_2 [4].

Пусть G — односвязная простая комплексная алгебраическая группа, $\mathfrak{g}$ — ее касательная алгебра Ли. Имеется треугольное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^- \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u}^+$, где $\mathfrak{u}^-$ и $\mathfrak{u}^+$ — касательные алгебры отрицательной и положительной максимальных унипотентных подгрупп, а $\mathfrak{t}$ — картановская подалгебра, то есть касательная алгебра максимального тора T в G. Имеем: $\mathfrak{u}^+ = \langle e_\alpha \mid \alpha \in \Delta_+ \rangle$, $\mathfrak{u}^- = \langle e_{-\alpha} \mid \alpha \in \Delta_+ \rangle$, где Δ_+ — система положительных корней, а $e_{\pm\alpha}$ — корневые векторы.

Обозначим неприводимый G-модуль со старшим весом λ через $V(\lambda)$, а старший вектор этого модуля через v_λ.

Определение 1. Сигнатурой назовем набор $\sigma = (\lambda, p_1, \dots, p_N)$, где N — число положительных корней, пронумерованных в определенном порядке (см. ниже): $\Delta_+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$, λ — доминантный вес, $p_i \in \mathbb{Z}_+$.

Обозначение 1. $v(\sigma) = e_{-\alpha_1}^{p_1} \cdot \ldots \cdot e_{-\alpha_N}^{p_N} \cdot v_\lambda$.

Пусть $\omega_1, \dots, \omega_n$ — фундаментальные веса. Рассмотрим произвольный порядок на множестве положительных корней. Введем порядок на сигнатурах фиксированного веса λ.

Пусть $\sigma = (\lambda, p_1, \dots, p_N)$, $\sigma' = (\lambda, p'_1, \dots, p'_N)$. Рассмотрим наборы

$$q_i = \sum_{j=1}^{N-i+1} p_j,$$

$$q'_i = \sum_{j=1}^{N-i+1} p'_j.$$

Наборы $(q_1, \ldots, q_N)$ и $(q'_1, \ldots, q'_N)$ лексикографически сравниваем.

Определение 2. Сигнатура σ существенна, если $v(\sigma) \notin \langle v(\tau) \mid \tau < \sigma \rangle$.

Утверждение 1. *Множество векторов* $\{v(\sigma) \mid \sigma$ *существенна*$\}$ *образует базис пространства* $V(\lambda)$.

Утверждение 2. *Существенные сигнатуры образуют полугруппу относительно операции покомпонентного сложения.*

Гипотеза 1. *Полугруппа существенных сигнатур порождается существенными сигнатурами фундаментальных весов.*

Пусть $\Sigma \subset \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}^N$ — полугруппа существенных сигнатур (здесь $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$ — решетка весов), $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ — конус, натянутый на Σ (линейные комбинации с положительными рациональными коэффициентами).

Гипотеза 2. *Полугруппа* Σ *насыщена, то есть* $\Sigma = \Sigma_{\mathbb{Q}} \cap (\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}^N)$.

Гипотеза 3. *Существуют такой набор подмножеств* $M_i \subset \{1, \ldots, N\}$ *и такой набор элементов картановской подалгебры* $l_i \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}$, *что множество существенных сигнатур* $\sigma = (\lambda, p_1, \ldots, p_N)$ *задается неравенствами*

$$\sum_{j \in M_i} p_j \leqslant \lambda(l_i).$$

Для групп B_3 и D_4 верны следующие теоремы:

Теорема 1. *Существует порядок на положительных корнях, при котором гипотезы* 1, 2 *верны.*

При этом порядке гипотеза 3 «почти» верна.

Теорема 2. *Существуют такой набор подмножеств* $M_i \subset \{1, \ldots, N\}$ *и такой набор элементов картановской подалгебры* $l_i \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}$, *что множество существенных сигнатур* $\sigma = (\lambda, p_1, \ldots, p_N)$ *задается неравенствами*

$$\sum_{j \in M_i} a_{ij} p_j \leqslant \lambda(l_i),$$

где a_{ij} — 1 *или* 2 *в случае* B_3; 1, 2 *или* 3 *в случае* D_4.

Список литературы

[1] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann. PBW filtration and bases for irreducible modules in type A_n. Transformation Groups **165** (2011), no. 1, 71–89.
[2] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann. PBW filtration and bases for symplectic Lie algebras. Int. Math. Res. Not. IMRN 2011, no. 24, 5760–5784.

[3] E. Vinberg. On some canonical bases of representation spaces of simple Lie algebra. Conference talk, Bielefeld, 2005.
[4] А.А. Горницкий. Существенные сигнатуры и канонические базисы неприводимых представлений группы G_2. Математические заметки **97** (2015), no. 1, 30–41.

Модель Нерона максимальных алгебраических торов без аффекта в полупростых группах

М.В. Грехов
Самарский государственный университет, Самара, Россия
`m.grekhov@yandex.ru`

Пусть T — алгебраический тор, k — его основное поле, имеющее арифметический тип, а L — какое-либо его поле разложения. Целой моделью алгебраического тора T называется определённая над кольцом $\mathcal{O}_k$ целых элементов поля k схема X такая, что $X \times \mathrm{Spec}\ k \cong T$. Особый интерес представляют целые модели, обладающие какими-либо дополнительными свойствами, поэтому модель Нерона, которая для торов является групповой схемой и по определению всегда гладкая, выделяется как одна из классических (определение и свойства модели Нерона см. в [1]).

Определение модели Нерона не даёт само по себе алгоритма её построения. В [1] был описан абстрактный алгоритм построения модели Нерона, дающий результат за конечное число шагов, однако его аффинная реализация ещё не была известна. Для случая, когда поле k локальное, позднее было получено (см. [2], [3]) явное описание аффинной реализации алгоритма. При этом в качестве начального шага алгоритма использовалась ещё одна классическая целая модель алгебраического тора — модель Воскресенского, которая определяется конструктивно и обладает полезными дополнительными свойствами, хотя, вообще говоря, может не быть гладкой (более подробно см. работы [3], [4]).

Если k — глобальное поле характеристики 0, абстрактный алгоритм построения модели Нерона справедлив, но его аффинная реализация неизвестна. Однако известно (см. [1]), что выполнение определения модели Нерона для модели X тора T равносильно выполнению этого определения для всех её локальных слоёв $X \times \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{k_\wp}$, рассматриваемых как целые модели торов $T_\wp = T \times \mathrm{Spec}\ k_\wp$ (здесь $\wp \subset \mathcal{O}_k$ — простой идеал, $k_\wp$ — пополнение k по $\wp$-адическому показателю). Тогда X можно получить, взяв такую модель X' тора T, что для её слоёв $X' \times \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{k_\wp}$ известна реализация модели Нерона, и применив к ней все преобразования, требующиеся для построения моделей Нерона её локальных слоёв.

В качестве X' можно использовать каноническую целую модель (см. [**?**]), определяемую следующим образом. Пусть k — поле алгебраических чисел, $X_\wp = \text{Spec } B_\wp$ — модель Воскресенского тора $T_\wp = T \times \text{Spec } k_\wp$. Канонической целой моделью тора T называют схему $X = \text{Spec } C$, где $C = \cap_\wp C_\wp$, $C_\wp = B_\wp \cap k[T]$. Основным недостатком канонической целой модели является отсутствие явного задания. Этого недостатка не имеет другая возможная модель — стандартная целая модель (см. [5]). Стандартной целой моделью тора T называется $\mathcal{O}_k$-схема вида $X' = \text{Spec } \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$, где $x_{ij}, y_{ij} \in k[T]$ — координаты при разложении базисных характеров модуля $\hat{T}$ и обратных им по целому базису L/k.

Недостатком стандартной модели над полем алгебраических чисел является неизвестность свойств её локальных слоёв: если для канонической модели X' тора T по определению слои $X'_\wp$ представляют собой модели Воскресенского торов $T_\wp$, то для стандартной модели локальные слои ранее не исследовались. Чтобы использовать стандартную модель для построения модели Нерона, требовалось доказать, что её локальные слои удовлетворяют необходимым для этого свойствам. Этот вопрос был решён автором настоящей работы в статье [6]. Однако оставался вопрос о том, в каких случаях стандартная и каноническая модели совпадают, а в каких различны. Ответ на него дан в настоящей работе, окончательный результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть X и X' — соответственно каноническая и стандартная целые модели тора T, определённого над полем алгебраических чисел k. Тогда $X = X'$.*

С помощью этого результата было продолжено начатое в [6] исследование моделей Нерона выбранных серий алгебраических торов над полями алгебраических чисел, для которых она имеет неслучайный вид. В качестве таких серий торов были выбраны максимальные алгебраические торы без аффекта в полупростых группах. Эти торы выделяются тем свойством, что у них $G \cong \Gamma$, $W(R) \subset \Gamma \subset A(R)$, где R — система корней, задающая группу, $W(R)$ и $A(R)$ — соответственно её группа Вейля и группа автоморфизмов. Было получено описание действия алгоритма построения модели Нерона, позволяющее получить явное задание модели Нерона, для случаев систем корней B_n и A_n. Результаты для случаев B_n и A_n соответственно сформулированы в следующих теоремах.

Теорема 2. *Пусть T — максимальный тор без аффекта в полупростой группе, определённый над полем алгебраических чисел k, с группой Галуа вида $W(B_n)$. Тогда $T = R_{L_2/k}(R^{(1)}_{L_1/L_2}(G_m))$, где $k \subset L_2 \subset L_1 \subset L$, $[L_2 : k] = n$, $[L_1 : L_2] = 2$. Слои $X'_\wp$ стандартной модели X' тора T гладкие, если $\pi \nmid 2$, где $\wp = (\pi)$, и имеют единственную особенность вида μ_2, если $\pi \mid 2$.*

Теорема 3. *Пусть T — максимальный тор без аффекта в полупростой группе, определённый над полем алгебраических чисел k, с группой Галуа вида $W(A_n)$. Тогда слои $X'_\wp$ стандартной модели X' тора T при $n = 1$ имеют единственную особенность вида μ_2, если $\pi \mid 2$, где $\wp = (\pi)$, и гладкие для всех остальных π; при $n = 2$ имеют единственную особенность вида α_2, если $\pi \mid 2$, или α_3, если $\pi \mid 3$, и гладкие для всех остальных π; при $n \geqslant 3$ гладкие для всех π.*

Для обоих указанных случаев было также описано сглаживание всех найденных особенностей и полностью описана последовательность преобразований, позволяющих получить явное задание модели Нерона соответствующего тора T.

Список литературы

[1] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud. Néron Models. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1990.

[2] Ch. Ching-Li, Yu. Jiu-Kang. Congruences of Néron models for tori and the Artin conductor. National Center for Theoretical Science, National Tsing-Hua University, Hsinchu, Taiwan, 1999.

[3] S.Yu. Popov. Standard Integral Models of Algebraic Tori. Preprintreihe des SFB 478 – Geometrische Strukturen in der Mathematik, 2003.

[4] В.Е. Воскресенский. Бирациональная геометрия линейных алгебраических групп. М., МЦНМО, 2009.

[5] В.Е. Воскресенский, Б.Э. Кунявский, Б.З. Мороз. О целых моделях алгебраических торов. Алгебра и анализ **14** (2002), no. 1, 46–70.

[6] М.В. Грехов. Целые модели алгебраических торов над полями алгебраических чисел. Записки научных семинаров ПОМИ **430** (2014), 114–135.

Сеть и элементарная сетевая группа, ассоциированные с надгруппой нерасщепимого максимального тора

Н.А. Джусоева, В.А. Койбаев
Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова, Владикавказ, Россия
djusoevanonna@rambler.ru, koibaev-K1@yandex.ru

В рамках программы (см. [1], [2]) исследования подгрупп полной линейной группы $G = \mathrm{GL}(n,k)$, содержащих нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$, связанный с радикальным расширением $k(\sqrt[n]{d})$ степени n основного поля k, в настоящей заметке мы определяем сеть и элементарную сетевую группу, ассоциированные с промежуточной подгруппой H, $T \leqslant H \leqslant G$. Мы предполагаем, что промежуточная подгруппа H, содержит одномерное преобразование, при этом заметим, что всякая такая подгруппа богата трансвекциями [2], то есть содержит элементарную трансвекцию на любой (недиагональной) позиции, а потому предлагаемая ниже конструкция актуальна.

Мы предполагаем, что основное поле k, $\mathrm{char}\, k \neq 2$, является полем частных области главных идеалов Λ, далее, d — произведение различных (не ассоциированных) простых из Λ, $x^n - d$ — неприводимый многочлен степени n над полем k, $d \in \Lambda$. Тогда $e_i = \theta^{i-1}$, $\theta = \sqrt[n]{d}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, образуют базис поля $k(\sqrt[n]{d})$ над k. Мы рассматриваем нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$, который является образом мультипликативной группы поля $K = k(\sqrt[n]{d})$ при регулярном вложении в G. В выбранном базисе тор $T = T(d)$ определяется как матричная группа $T = \{c(x)\colon x = (x_1, \ldots, x_n) \in k^n \setminus \bar{0}\}$, причем элементы матрицы $c(x) = (c_{ij})$ определяются следующим образом [2]: $c_{ij} = x_{i+1-j}$ при $j \leqslant i$ и $c_{ij} = dx_{n+i+1-j}$ при $j \geqslant i+1$. С каждой матрицей $c = c(x) = (c_{ij})$ связана обратная матрица $c^{-1} = c(y) = (c'_{ij}), y = (y_1, \ldots, y_n) \in k^n$, где $y_i = \frac{C_{1i}}{|C\,(x)|}$, причем C_{1i} — алгебраическое дополнение элемента c_{1i} матрицы $c = c(x)$. Рассматривается унитальное подкольцо $R_0 = R(d)$ поля k [1], [5], порожденное элементами $x_i y_j$, $dx_r y_s$:

$$R_0 = R(d) = \mathrm{ring}\langle x_i y_j,\ dx_r y_s\colon\ i + j \leqslant n+1,\ r+s > n+1,\ \ x \in k^n \setminus \bar{0}\rangle.$$

Напомним, что (общая) трансвекция — это матрица $(\delta_{ij} + \alpha_i\beta_j)$, у которой $\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n = 0,\ \alpha_i, \beta_j \in k,\ \delta_{ij}$ — символ Кронекера. Частным случаем трансвекции является элементарная трансвекция, а именно, матрица $t_{rs}(\alpha) = e + \alpha e_{rs}$, где $r \neq s$, $\alpha \in k$, e — единичная матрица, e_{rs} — матрица, у которой на позиции (r,s) стоит 1, а на остальных местах — нули. Для произвольной сети σ через $E(\sigma)$ обозначается подгруппа, порожденная всеми трансвекциями из сетевой группы $G(\sigma)$ [3].

С промежуточной подгруппой H, $T \leqslant H \leqslant G$, связаны модули трансвекций $(i \neq j)$ $A_{ij} = \{\alpha \in k\colon t_{ij}(\alpha) \in H,\ i \neq j\}$ и их кольца множителей $R_{ij} = \{\lambda \in k\colon \lambda A_{ij} \subseteq A_{ij}\}$. Очевидно, что A_{ij} являются подгруппами аддитивной группы k^+ поля k (R_{ij}-модули). Положим $A_i = A_{i1}, 2 \leqslant i \leqslant n$. Тогда ([4], теорема, п. (1))

$$A_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j < i; \\ dA_{n+i+1-j}, & j \geqslant i+1, \end{cases} \tag{1}$$

причем все кольца множителей R_{ij} совпадают между собой, и это кольцо мы обозначаем через R, далее, модули трансвекций A_i — целые идеалы кольца R, $d \in R$ ([4], теорема, п. (3)). Мы предполагаем [5], что кольцо R содержит подкольцо R_0 и $A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n$. Итак, мы определили все недиагональные подгруппы будущей сети.

Определение. Положим $A_1 = dA_n$. Сеть $\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma_H$, для которой $\sigma_{ij} = A_{ij}$ при всех $i \neq j$ и $\sigma_{rr} = A_1 = dA_n$, $1 \leqslant r \leqslant n$ (и для идеалов $A_i = A_{i1}$ кольца R выполнены включения $A_1 = dA_n \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n$) мы называем *сетью, ассоциированную с подгруппой* H, а элементарную сетевую группу $E(\sigma)$ — *элементарной сетевой группой, ассоциированной с промежуточной подгруппой* H.

Мотивировка названия «элементарная сетевая группа, ассоциированная с промежуточной подгруппой H» вытекает из следующей теоремы.

Теорема. *Если σ — сеть, ассоциированная с подгруппой H, то тор T нормализует группу $E(\sigma)$, далее, произведение $TE(\sigma)$ является подгруппой группы H, $T \leqslant TE(\sigma) \leqslant H$ и $E(\sigma)$ — наибольшая элементарная сетевая подгруппа (нормализуемая тором), содержащаяся в H.*

Работа В.А. Койбаева поддержана РФФИ (проект 13–01–00469). Результаты настоящей заметки были получены в рамках государственного задания Минобрнауки России.

Список литературы

[1] В.А. Койбаев. Подгруппы группы $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})$, содержащие нерасщепимый максимальный тор. Доклады АН СССР **312** (1990), no. 1, 36–38.

[2] В.А. Койбаев. Трансвекции в подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый максимальный тор. Алгебра и анализ **21** (2009), no. 5, 70–86.

[3] З.И. Боревич. Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц. Записки научных семинаров ПОМИ **64** (1976), 12–29.

[4] Н.А. Джусоева, В.А. Койбаев. Модули трансвекций в надгруппах нерасщепимого максимального тора. Владикавказский математический журнал **16** (2014), no. 3, 3–8.
[5] Н.А. Джусоева. Сетевые группы, ассоциированные с тором. Тезисы IX Международной школы-конференции по теории групп. Владикавказ, 9–15 июля 2012 г., с. 47.

Инварианты действия полупростой алгебры Хопфа на алгебре, удовлетворяющей полиномиальному тождеству[1]

М.С. Еряшкин
Казанский федеральный университет, Казань, Россия
mikhail.eryashkin@gmail.com

Классическим результатом теории инвариантов, принадлежащим Э. Нётер, является факт о том, что алгебра A является целым расширением подалгебры инвариантов A^G, в случае действия конечной группы G автоморфизмами на коммутативной алгебре A. В статье [1] этот результат был обобщен на случай действия конечномерной алгебры Хопфа H на коммутативной алгебре A, а именно, было показано, что коммутативная H-модульная H-полупервичная A цела над своей подалгеброй инвариантов A^H. Дальнейшим развитием этого направления исследований является рассмотрение вопроса о целостности H-модульной алгебры над подалгеброй инвариантов для H-модульных алгебр, удовлетворяющих полиномиальному тождеству.

В работах [2] и [3] было показано, что алгебра A цела над подалгеброй центральных инвариантов $Z(A)^H$ при выполнении некоторых дополнительных условий для алгебры A. Так как в работе [4] было показано, что PI-кольцо A цело над подкольцом инвариантов A^G, в случае, когда порядок группы G обратим в алгебре A, то имеет смысл рассмотреть этот вопрос в случае действия полупростой алгебры Хопфа. Этот результат удалось обобщить на случай действия полупростой конечномерной алгебры Хопфа H.

Теорема. *Пусть H — конечномерная полупростая и кополупростая алгебра Хопфа, A — H-модульная PI-алгебра. Тогда алгебра A цела над подалгеброй инвариантов A^H.*

Также планировалось с помощью этого результата показать целостность H-модульной PI-алгебры A над подалгеброй инвариантов в случае действия

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований 14–01–31200 и за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, проект №1.2045.2014.

на алгебре A конечномерной алгебры Хопфа, у которой корадикал является подалгеброй Хопфа. Для этого требуется установить целостность инвариантных относительно действия корадикала H_0 алгебры Хопфа H элементов над подалгеброй инвариантов A^H, но это оказалось не так. Тем не менее удалось показать, что для H-первичной алгебры A алгебра $Z(A)^{H_0}$ цела над подалгеброй центральных инвариантов $Z(A)^H$ в случае, когда характеристика основного поля отлична от нуля. Это позволило установить целостность H-первичной алгебры A над подалгеброй центральных инвариантов $Z(A)^H$, если корадикал H_0 является полупростой подалгеброй Хопфа, char $\mathbf{k} > 0$ и при выполнении некоторых дополнительных условий для алгебры A.

Список литературы

[1] S.M. Skryabin. Invariants of finite Hopf algebras. Advances in math. **183** (2004), no. 2, 209–239.

[2] М.С. Еряшкин. Инварианты и кольца частных H-полупервичных H-модульных алгебр удовлетворяющих полиномиальному тождеству. Изв. вузов. Матем., принята к печати.

[3] P. Etingof. Galois bimodules and integrality of PI comodule algebras over invariants, see arXiv: `math.QA/1306.3821` (2013).

[4] S. Montgomery, L.W. Small. Integrality and prime ideals in fixed rings of PI rings. J. Pure and Applied Algebra **31** (1987), 185–190.

Каскады Костанта, центры и центрально порождённые идеалы $U(\mathfrak{n})$[1]

М.В. Игнатьев

Самарский государственный университет, Самара, Россия

`mihail.ignatev@gmail.com`

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли простой комплексной группы G, T, B и N — максимальный тор в G, содержащая его борелевская подгруппа G и её унипотентный радикал, а $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{n}$ — их алгебра Ли соответственно. Обозначим через Φ систему корней G относительно T, через Φ^+ — множество положительных корней относительно B, а через $U(\mathfrak{n})$ — универсальную обёртывающую алгебру алгебры Ли $\mathfrak{n}$.

Хорошо известно [1], что так называемое *отображение Диксмье* устанавливает взаимно однозначное соответствие между коприсоединёнными N-

[1]Работа частично поддержана фондом Дмитрия Зимина «Династия» и грантами РФФИ 14–01–31052–мол_а и 14–01–97017–р_поволжье_а.

орбитами в $\mathfrak{n}$ и примитивными идеалами в $U(\mathfrak{n})$. Чтобы получить это соответствие, нужно выбрать любую форму на орбите, любую её поляризацию и рассмотреть аннулятор представления, индуцированного с одномерного представления поляризации, задаваемого этой формой. Это можно рассматривать как алгебраическую версию метод орбит Кириллова [2].

С другой стороны, описание центра $Z(\mathfrak{n})$ алгебры $U(\mathfrak{n})$ может быть дано в терминах каскадов Костанта — некоторых максимальных строго ортогональных подмножеств $\mathcal{B} \subset \Phi^+$, см. [3], [4], [6], [7]. К примеру, для $\Phi = A_{n-1}$ каскад Костанта имеет вид

$$\mathcal{B} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_n,\ \varepsilon_2 - \varepsilon_{n-1},\ \ldots\}$$

при стандартном отождествлении Φ с подмножеством $\mathbb{R}^n$ ($\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ — стандартный базис). А именно, $Z(\mathfrak{n})$ является алгеброй многочленов от алгебраически независимых образующих Δ_β, $\beta \in \mathcal{B}$.

В работе [5] И. Пенковым и автором было получено полное описание центрально порождённых примитивных идеалов для случаев A_{n-1} и C_n. Оказалось, что это в точности идеалы, соответствующие орбитам форм вида $\sum_{\beta\in\mathcal{B}'} \varphi(\beta)e_\beta^*$, где $\{e_\alpha,\ \alpha \in \Phi^+\}$ — любой базис $\mathfrak{n}$ из корневых векторов, $\{e_\alpha^*,\ \alpha \in \Phi^+\}$ — двойственный базис $\mathfrak{n}^*$, $\mathcal{B}'$ — некоторое подмножество каскада Костанта $\mathcal{B}$, а $\varphi\colon \mathcal{B}' \to \mathbb{C}^\times$ — произвольное отображение. (Для A_{n-1} это все орбиты максимальной размерности, и только они.) В этой же работе было получено описание центров и центрально порождённых идеалов универсальных обёртывающих алгебр нильрадикалов борелевских подалгебр бесконечномерных простых алгебр $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{C})$ и $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{C})$ с помощью обобщения конструкции каскадов Костанта.

В докладе будут обсуждаться случаи B_n и D_n, а также исключительные системы корней. Фактически, центры $U(\mathfrak{n})$ для B_n и D_n были описаны в [5]; мы дадим описание центрально порождённых идеалов по модулю гипотезы Диксмье, которая гласит, что любой ненулевой эндоморфизм алгебры Вейля есть автоморфизм.

Список литературы

[1] Ж. Диксмье. Универсальные обёртывающие алгебры. М., Мир, 1978.

[2] А.А. Кириллов. Лекции по методу орбит. Новосибирск, Научная книга ИДМИ, 2002.

[3] А.Н. Панов. Редукция сферических функций. Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия 2010, no. 6(80), 54–68, см. также arXiv: `math.RT/0911.2369`.

[4] J. Dixmier. Idéaux primitifs dans les algèbres enveloppantes, preprint, Paris, 1976.

[5] M.V. Ignatyev, I. Penkov. Infinite Kostant cascades and centrally generated primitive ideals of $U(\mathfrak{n})$ in types A_∞, C_∞. J. ALgebra, submitted, see also arXiv: `math.RT/1502.05486` (2015).
[6] A. Joseph. A preparation theorem of the prime spectrum of a semisimple Lie algebra, J. Algebra **48** (1977), 241–289.
[7] B. Kostant. The cascade of orthogonal roots and the coadjoint structure of the nilradical of a Borel subgroup of a semisimple Lie group. Moscow Math. J. **12** (2012), no. 3, 605–620.

О пределах подалгебр Бете в янгиане

А.И. Ильин
Высшая школа экономики, Москва, Россия
`alex_omsk@211.ru`

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ – алгебра Ли, $\mathfrak{h}^{reg}$ — множество регулярных элементов картановской подалгебры диагональных матриц. Янгиан для $\mathfrak{gl}_n$ — это ассоциативная алгебра $Y(\mathfrak{g})$, исторически первый пример квантовой группы. Эта алгебра впервые рассматривалась в работах ленинградской школы, возглавляемой Л.Г. Фадеевым, см. [2]. Определим семейство *подалгебр Бете* в янгиане $Y(\mathfrak{g})$ следующим образом (для подробностей, см. [2]):

Определение 0.1. Для любого $1 \leqslant k \leqslant n$ и любого $C \in \mathfrak{g}$ положим

$$\tau_k(u, C) = \frac{1}{k!}\mathrm{tr}\, A_k C_1 \dots C_k T_1(u) \dots T_k(u - k + 1),$$

где след берётся по всем копиям алгебры $\mathrm{End}\,\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$. Подалгебру, порожденную всеми коэффициентами рядов $\tau_k(u, C)$, будем называть подалгеброй Бете.

Хорошо известно, что эти подалгебры коммутативны и, более того, если $C \in \mathfrak{h}^{reg}$, то коэффициенты рядов $\tau_k(u, C)$ алгебраически независимы и порождают максимальную коммутативную подалгебру в $Y(\mathfrak{g})$, см. [1]. Можно естественно определить класс *предельных* подалгебр Бете. Мы будем рассматривать случай, когда предел берётся по $\mathfrak{h}^{reg}$. В этом случае, используя результаты [3], [4] и централизаторную конструкцию (см, например, [2]), мы докажем следующую теорему.

Теорема 0.2. *Предельная подалгебра является максимальной коммутативной и свободной.*

Список литературы

[1] M. Nazarov, G. Olshanski. Bethe subalgebras in twisted Yangians, see arXiv: `q-alg/9507003` (1995).
[2] А.И. Молев. Янгианы и классические алгебры Ли. М., МЦНМО, 2009.
[3] А.А. Тарасов. Максимальность некоторых коммутативных подалгебр в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли. УМН **57** (2002), no. 5(347), 165–166.
[4] В.В. Шувалов. О пределах подалгебр Мищенко–Фоменко в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли. Функц. анализ и его прил. **36** (2002), no. 4, 55–64.

Формулы характеров и теорема Бриона

И.Ю. Махлин
Высшая школа экономики, Москва, Россия
imakhlin@mail.ru

Теорема Бриона — это формула, раскладывающая сумму экспонент целых точек выпуклого рационального многогранника в некоторую сумму по его вершинам. Я расскажу о том, как при помощи этого результата и его взвешенной версии можно получать комбинаторные формулы для $\mathfrak{gl}_n$- и $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$-характеров: неприводимых характеров и функций Холла–Литтлвуда.

Таким образом, если время позволит, я обсужу четыре случая. От базового:

$$\text{многогранник Гельфанда–Цетлина} + \text{теорема Бриона} = \\ = \text{формула для неприводимых характеров } \mathfrak{gl}_n \text{ (многочленов Шура),}$$

до наиболее сложного:

$$\text{определенный счетномерный многогранник}+\text{взвешенная теорема Бриона} = \\ = \text{формула для функций Холла–Литтлвуда аффинной алгебры } \widehat{\mathfrak{sl}}_n.$$

Последнее — новый результат, которому посвящена работа [1].

Список литературы

[1] B. Feigin, I. Makhlin. A combinatorial formula for affine Hall–Littlewood functions via a weighted Brion theorem, see arXiv: `math.CO/1505.04269` (2015).

Графы Риба матричных элементов вещественных неприводимых представлений связных полупростых компактных групп Ли

М.В. Мещеряков
Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва, Саранск, Россия
`mesh@math.mrsu.ru`

В докладе будет дано описание вещественных неприводимых представлений связных полупростых компактных групп Ли, графы Риба всех морсовских матричных элементов которых изоморфны диаграмме Кокстера типа A. Вопросы о классификации морсовских функций по их графам Риба, как обобщение 16 проблемы Гильберта, были инициированы В.И. Арнольдом в последние десятилетие. Опираясь на ранее полученную классификацию упругих неприводимых представлений компактных связных групп Ли, мы доказываем, что верна

Теорема. *Среди неприводимых вещественных представлений связных полупростых компактных групп Ли только классические матричные группы $SO(n)$ и $SP(n)$ в их стандартных представлениях имеют у всех морсовских матричных элементов графы Риба изоморфные диаграмме Кокстера типа A.*

Для других групп и представлений графы Риба матричных элементов оказываются деревьями более общего вида, а характеры представлений не всегда являются функциями Морса–Ботта.

Список литературы

[1] М.В. Мещеряков. Классификация упругих линейных неприводимых представлений компактных связных групп Ли. Четвертая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». Москва, Россия, 27 января – 1 февраля 2014 г. Тезисы докладов. М., Изд-во Московского университета, с. 29.
[2] В.И. Арнольд. Топологическая классификация тригонометрических многочленов аффинной группы Кокстера$\widetilde{}_2$. Труды МИАН **258** (2007), 7–16.
[3] M. Kaluba, W. Marzantowicz, N. Silva. On representation of the Reeb graph as a sub-complex of manifold, see arXiv: `math.GT/1405.4579`

Совпадение гомоморфизма Гизина и трансфера для пучков с трансферами

А.А. Мингазов
Санкт-Петербургское отделение математического института им. В.А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия
mingazov88@gmail.com

Пусть k — основное поле, $\operatorname{char} k = 0$. Пусть $f\colon X \to Y$ — конечное отображение гладких многообразий над k. Обозначим через $G(f)\colon M(Y) \to M(X)$ гомоморфизм Гизина в категории мотивов Воеводского $DM(k)$ для морфизма f. Он определяется аналогично гомоморфизму Гизина в ориентированных теориях когомологий, что описано в [1]. Кроме того, пусть $\mathcal{F}$ — пучок с трансферами, обозначим через $Tr(f)\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ отображение, заданное транспонированным графиком $\Gamma_f^t \in Cor(X, Y)$ морфизма f. Основным результатом является следующая

Теорема. *В описанных условиях отображения $Tr(f)$ и $\mathcal{F}(G(f))$, действующие из $\mathcal{F}(X)$ в $\mathcal{F}(Y)$, совпадают.*

Совпадение этих отображений является следствием совпадения отображений гомоморфизма Гизина и трансфера для конечных этальных морфизмов в категории мотивов $DM(k)$. Для доказательство этого строятся категория относительных мотивов $DM(S)$ над достаточно малым многообразием S и функтор $\Theta_*\colon DM(S) \to DM(k)$. При этом оказывается, что отображения гомоморфизма Гизина и трансфера имеют прообразы в категории $DM(S)$, где их совпадение можно установить благодаря наличию тензорного произведения в $DM(S)$, индуцированного расслоенным произведением над многообразием S.

Список литературы

[1] I. Panin. Oriented cohomology theories of algebraic varieties II (after I. Panin and A. Smirnov). Homology, Homotopy and Applications **11** (2009), no. 1, 349–405.

Представления дискретной группы Гейзенберга в пространстве распределений двумерного локального поля

Д.В. Осипов
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
d_osipov@mi.ras.ru

Доклад основан на совместной работе автора с А.Н. Паршиным [4] и работе автора [2].

В работе [5, §5.4(v)] А.Н. Паршин поставил вопрос о структуре естественного представления дискретной группы Гейзенберга $G = \mathrm{Heis}(3, \mathbb{Z})$ в бесконечномерном $\mathbb{C}$-векторном пространстве $V = \mathcal{D}'_{\mathcal{O}}(K)^{\mathcal{O}'^*}$. Здесь группа G может быть явно описана как группа матриц размера 3×3 с целыми коэффициентами, единицами на диагонали и нулями под диагональю. Также K есть двумерное локальное поле, кольцо $\mathcal{O}$ является кольцом дискретного нормирования поля K. Кольцо $\mathcal{O}'$ есть кольцо нормирования ранга 2 поля K. Пространство $\mathcal{D}'_{\mathcal{O}}(K)$ есть пространство распределений на двумерном локальном поле K, введенное в работе [3].

В своем докладе я расскажу о частичном ответе на поставленный вопрос. В частности, будут явно описаны некоторые неприводимые подпредставления представления группы G в пространстве V. Будет описана взаимосвязь этих представлений с классификацией некоторых неприводимых представлений группы G из работы [5], которые параметризованы точками эллиптической кривой. Отметим, что группа $\widetilde{G} = G \rtimes \mathbb{Z}$ действует также естественным образом в пространстве V. Будут вычислены следы группы $\widetilde{G}$ в некоторых неприводимых подпредставлениях представления группы G в пространстве V. Эти следы являются тэта-рядами.

Гомоморфизм $\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(G)$, который использовался для построения группы $\widetilde{G}$, можно применить также для изучения группы $\mathrm{Aut}(G)$. При помощи этого гомоморфизма будет доказано, что группа $\mathrm{Aut}(G)$ изоморфна группе $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \rtimes \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$. Таким образом, при помощи других методов, передоказывается результат П. Кана из работы [1].

Список литературы

[1] P. Kahn. Automorphisms of the discrete Heisenberg groups, preprint, 2005, 7 pp., see `http://www.math.cornell.edu/m/People/Faculty/kahn`.

[2] Д.В. Осипов. Дискретная группа Гейзенберга и её группа автоморфизмов. Мат. заметки **98** (2015), no. 1, 152–155, см. также arXiv: `math.GR/1505.00348`.

[3] Д.В. Осипов, А.Н. Паршин. Гармонический анализ на локальных полях и пространствах аделей. I. Изв. РАН. Сер. матем. **72** (2008), no. 5, 77–140.
[4] Д.В. Осипов, А.Н. Паршин. Представления дискретной группы Гейзенберга в пространстве распределений двумерного локального поля. Труды Математического института им. В.А. Стеклова **292** (2016), принята к печати.
[5] A.N. Parshin. Representations of higher adelic groups and arithmetic. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Hyderabad, India, 19–27 August, 2010. Volume 1: Plenary lectures and ceremonies. World Scientific, 2010, 362–392.

Суперхарактеры и суперклассы конечных групп треугольного типа

А.Н. Панов
Самарский государственный университет, Самара, Россия
apanov@list.ru

Пусть G — конечная группа. Предположим, что задана некоторая система

$$\mathcal{CH} = \{\chi_\alpha |\ \alpha \in \mathcal{A}\}$$

характеров (представлений) группы G.

Определение. Система характеров $\mathcal{CH}$ задает теорию суперхарактеров на G, если характеры из $\mathcal{CH}$ попарно дизъюнктны и существует разбиение группы G на систему подмножеств $\mathcal{K} = \{K_\beta |\ \beta \in \mathcal{B}\}$, удовлетворяющее следующим условиям:
S1) $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$;
S2) каждый характер χ_α постоянен на каждом подмножестве K_β;
S3) $\{1\} \in \mathcal{K}$ (здесь 1 — единичный элемент в группе).
При этом каждый характер из $\mathcal{CH}$ называют суперхарактером, а подмножество из $\mathcal{K}$ — суперклассом.

Конечная группа треугольного типа — это группа вида $G = H + J$, где J — нильпотентная ассоциативная конечномерная алгебра над конечным полем $k = \mathbb{F}_q$, и H — конечная абелева группа, причем $\operatorname{char} k$ не делит $|H|$. В докладе будет рассказан метод построения теории суперхарактеров для групп этого вида, частными случаями которой являются теории суперхарактеров из [1] и [2].

Рассмотрим группу $\widetilde{G} = H \ltimes (N \times N)$ — полупрямое произведение H и $N \times N$, где $N = 1 + J$. Группа $\widetilde{G}$ действует на J по формуле $\rho_\tau(x) = taxb^{-1}t^{-1}$, где $\tau = (t, a, b)$, $t \in H$, $a, b \in N$. Группа $\widetilde{G}$ также действует на G по формуле

$$R_\tau(g) = 1 + ta(g-1)b^{-1}t^{-1}.$$

Здесь $g - 1$ элемент алгебры $kH + J$. Будем называть суперклассом произвольную $\widetilde{G}$-орбиту в G.

Для любого идемпотента $e \in kH$ рассмотрим разложение Пирса

$$J = eJe \oplus eJe' \oplus e'Je \oplus e'Je',$$

где $e' = 1 - e$. Компонента $J_e = eJe$ является подалгеброй в J.
Определение. Элемент $x \in J_e$ назовем регулярным, если не существует x' из $\widetilde{G}$-орбиты элемента x, лежащего в некоторой подалгебре J_f, $f < e$.

Рассмотрим подгруппу

$$H(e) = \{h \in H:\ hx = xh = x\} = \{h \in H:\ he = e\}.$$

Пусть $H_e = H/H(e)$. Тогда $G_e = H_e + J_e$ — конечная группа треугольного типа.

Рассмотрим $\mathcal{B} = \{(e, h, \omega)\colon h \in H(e),\ \omega$ — регулярная G_e-орбита в $J_e\}$. Каждому $\beta \in \mathcal{B}$ поставим в однозначное соответствие суперкласс K_β, содержащий элементы $h + \omega$.

Предложение. *Два суперкласса K_{β_1} и K_{β_2} совпадают тогда и только тогда, когда $\beta_1 = \beta_2$. Любой супекласс имеет вид K_β для некоторого $\beta \in \mathcal{B}$.*

Рассмотрим множество

$$\mathcal{A} = \{(e, \theta, \omega^*)\colon \theta \in \mathrm{Irr}(H(e)),\ \omega^* \text{ — регулярная } G_e\text{-орбита в } J_e^*\}.$$

Заметим, что $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$. Выберем $\lambda \in \omega^*$.

Рассмотрим подгруппу $G_\lambda = H(e)N_{\lambda,\ \mathrm{right}}$, где

$$N_{\lambda,\ \mathrm{right}} = \{a \in N\colon \lambda a = \lambda\},$$

$$H(e) = \{h \in H\colon h\lambda = \lambda h = \lambda\} = \{h \in H\colon he = e\}$$

Определим линейный характер $\xi(g) = \theta(h)\varepsilon^{\lambda(x)}$, где $g = h + x \in G_\lambda$, группы G_λ. Назовем суперхарактером $\chi_\alpha = \mathrm{ind}(\xi, G_\lambda, G)$.

Теорема.
1) *Суперхарактеры $\{\chi_\alpha\}$ попарно дизъюнктны.*
2) *Каждый χ_α постоянен на каждом суперклассе K_β.*
3) *$\{1\}$ совпадает с $K(g)$ для $g = 1$.*

Следствие. *Система суперхарактеров $\{\chi_\alpha\}$ и суперклассов $\{K_\beta\}$ задают теорию суперхарактеров на группе G.*

Список литературы
[1] P. Diaconis, I.M. Isaacs. Supercharacters and superclasses for algebra groups. Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 2359–2392.
[2] A.N.Panov. Supercharacter theory for groups of invertible elements of reduced algebras, see arXiv: `math.RT/1409.5565`.

Группы автоморфизмов поверхностей, не допускающих $\mathbb{G}_a$-действий

А.Ю. Перепечко
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
`perepeal@gmail.com`

Работа выполнена в соавторстве с М.Г. Зайденбергом. Хорошо известно, что связная компонента группы автоморфизмов проективного алгебраического многообразия является алгебраической группой. Однако это свойство не выполняется для аффинных многообразий размерности $\geqslant 2$, допускающих действие аддитивной группы поля $\mathbb{G}_a$. Действительно, в таком случае $\mathbb{G}_a$-действия, эквивалентные данному, порождают бесконечномерную абелеву унипотентную подгруппу в связной компоненте. Мы выдвигаем гипотезу, что это необходимое и достаточное условие:

Гипотеза. *Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие размерности $\geqslant 2$ над несчётным алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики. Тогда связная компонента группы его автоморфизмов $\operatorname{Aut}^\circ X$ является алгебраической группой, если и только если многообразие X не допускает нетривиальных $\mathbb{G}_a$-действий.*

Нами получено доказательство данной гипотезы для аффинных поверхностей в терминах преобразований граничного дивизора компактификации поверхности. В докладе будет представлен данный метод и связанная с ним комбинаторика взвешенных графов, а также будет дано описание групп автоморфизмов аффинных поверхностей, не допускающих $\mathbb{G}_a$-действий, с точностью до конечного индекса.

Работа выполнена при поддержке гранта СПбГУ 6.50.22.2014 и частичной финансовой поддержке фонда Дмитрия Зимина «Династия».

Список литературы
[1] H. Flenner, S. Kaliman, M. Zaidenberg. Birational transformations of weighted graphs, in: Affine algebraic geometry, 107–147. Osaka Univ. Press, 2007. Corrigendum, in: Affine algebraic geometry, 35–38. CRM Proc. Lecture Notes **54**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

Аннуляторы модулей старшего веса алгебры Ли $\mathfrak{sl}(\infty)$

А.В. Петухов
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия
alex-2@yandex.ru

Доклад основан на моей совместной работе с И. Пенковым [3]. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная простая алгебра Ли. Описание аннуляторов $\mathfrak{g}$-модулей старшего веса является ключевым для описания решётки двусторонних идеалов алгебры $U(\mathfrak{g})$ (см. [1]). Соответственно, можно ожидать, что для бесконечномерных алгебр Ли $\mathfrak{g}$ описание аннуляторов модулей старшего веса играет схожую роль.

В докладе будет доказано, что аннулятор любого $\mathfrak{sl}(\infty)$-модуля старшего веса принадлежит к «легко описываемому» классу «локально интегрируемых» идеалов, который мы сейчас определим. Двусторонний идеал I алгебры A назовём *интегрируемым*, если он является пересечением (возможно, бесконечного числа) аннуляторов конечномерных A-модулей. Идеал I алгебры A называется *локально интегрируемым*, если $I \cap A'$ является интегрируемым идеалом алгебры A' для всякой конечнопорождённой подалгебры A' алгебры A.

Описание интегрируемых идеалов алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}(\infty))$ неявно содержится (см. [2]) в работе [4]. Основным результатом, который хочу обсудить в докладе, является следующая теорема.

Теорема. *Аннулятор любого бесконечномерного* $\mathfrak{sl}(\infty)$*-модуля старшего веса является локально интегрируемым идеалом алгебры* $U(\mathfrak{sl}(\infty))$, *а всякий локально интегрируемый идеал алгебры* $U(\mathfrak{sl}(\infty))$ *является аннулятором какого-то* $\mathfrak{sl}(\infty)$*-модуля старшего веса.*

Список литературы
[1] W. Borho, A. Joseph. Sheets and topology of primitive spectra for semisimple Lie algebras. J. Algebra **244** (2001), no. 1, 76–167.

[2] I. Penkov, A. Petukhov. On ideals in the enveloping algebra of a locally simple Lie algebra. IMRN, 2014, doi: `10.1093/imrn/rnu085`.
[3] I. Penkov, A. Petukhov. Annihilators of highest weight $\mathfrak{sl}(\infty)$-modules, see arXiv: `math.RT/1410.8430`.
[4] А.Г. Жилинский. Когерентные системы конечного типа индуктивных семейств недиагональных вложений. ДАН Беларуси **36** (1992), no. 1, 9–13.

Гиперэллиптические кривые над конечными полями без рациональных точек

И.А. Погильдяков
Высшая школа экономики,
Université de la Polynésie française, Москва, Россия
`vania_pogi@mail.ru`

Хорошо известно, что число рациональных точек на произвольной неособой неприводимой проективной алгебраической кривой $\mathcal{C}$ над $\mathbb{F}_q$ рода g можно оценить следующим образом:

$$q + 1 - \lfloor 2\sqrt{q} \rfloor g \leqslant \#\mathcal{C}(\mathbb{F}_q) \leqslant q + 1 - \lfloor 2\sqrt{q} \rfloor g.$$

Эта оценка принадлежит Серру и является наилучшей из известных на данный момент.

При условии $q + 1 \leqslant \lfloor 2\sqrt{q} \rfloor g$ нижняя оценка Серра даёт неположительное число. Это наводит на мысль о существовании таких кривых при данных q и g, у которых нет рациональных точек вовсе.

В работе [1] для нечетного $q = p^n$ при различных условиях были найдены нетривиальные оценки для g. Ниже приводятся некоторые из них.

Теорема 1. *Пусть $0 \leqslant a < p - 1$ и $g \equiv a$ по модулю p. Если $g \geqslant (q-1)(p-a-1)$, то существует кривая рода g над $\mathbb{F}_q$ ровно с $2q+2$ рациональными точками. Если $0 \leqslant a < \frac{p-3}{2}$, то кривая рода g над $\mathbb{F}_q$ с $2q+2$ точками существует, если $g \geqslant \frac{q-1}{2}(p-2a-2)$.*

Теорема 2. *Пусть $(g+1, \frac{p-1}{2}) = 1$ и $g \geqslant \frac{p-3}{2}$. Тогда существует кривая рода g над $\mathbb{F}_p$ без точек.*

В работе автора [2] были получены следующие результаты. Пусть $q = p^n$, $p > 2$. Обозначим через $\mathcal{H}_{p,g}$ множество всех гладких неприводимых гиперэллиптических кривых над $\mathbb{F}_q$ рода g. Пусть $\mathcal{H}_{q,g}^N$ — подмножество кривых в $\mathcal{H}_{q,g}$, имеющих в точности N рациональных точек.

Теорема 3. *Пусть $g > q - 3$, тогда $\mathcal{H}^0_{q,g}$ не пусто.*

В большинстве случаев данную оценку можно улучшить.

Теорема 4. *За исключением ситуации, когда $q = p^{2n+1}$, $n > 1$, $p \neq 1(8)$ и $g = \frac{p(2k+1)-5}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$, множество $\mathcal{H}^0_{q,g}$ не пусто при $g \geqslant \frac{q-3}{2}$.*

Последние две теоремы улучшают результаты работы [1].

Список литературы

[1] R. Becker, D. Glass. Pointless hyperelliptic curves. Finite Fields and Their Applications **21** (2013), 50–57.

[2] I.A. Pogildiakov. Pointless hyperelliptic curves over finite fields, in preparation.

Многообразие йордановых алгебр, имеющее дробно-экспоненциальный рост

А.В. Попов

Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия

klever176@rambler.ru

Пусть $F\{X\}$ – свободная неассоциативная алгебра от счетного множества порождающих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ над полем нулевой характеристики F и A – некоторая F-алгебра. Идеалом тождеств $I\left(A\right)$ называется идеал $\bigcap\limits_{\varphi} \ker\varphi$, где пересечение берется по всем гомоморфизмам $\varphi\colon F\left\{X\right\} \to A$. Элементы $I\left(A\right)$ называются тождествами алгебры A. Другими словами, тождеством алгебры A называется любой неассоциативный многочлен такой, что при любой подстановке элементов алгебры в него получаем тождественный 0.

С другой стороны можно рассматривать некоторый идеал тождеств I и изучать алгебры, удовлетворяющие им. Класс всех таких алгебр называется многообразием и обозначается $\mathrm{var}\left(I\right)$. Сразу же заметим, что не всякий идеал алгебры $F\{X\}$ можно рассматривать как идеал тождеств. Идеал тождеств должен быть замкнут относительно всех эндоморфизмов алгебры $F\{X\}$. Это свойство является также и достаточным. Такие идеалы также называют T-идеалами.

Хорошо известно, что в случае поля нулевой характеристики всякое тождество эквивалентно некоторому набору однородных полилинейных тождеств. Поэтому для изучения T-идеалов в случае поля нулевой характеристики достаточно изучать пространства $P_n \cap I$ где P_n — пространство всех полилинейных неассоциативных многочленов степени n от свободных образующих $x_1, \ldots, x_n$.

Числовой характеристикой, позволяющей оценить «размер» многообразия V, является последовательность коразмерностей $c_n(V) = \dim {}^{P_n}/_{P_n \cap I}$. В зависимости от асимтотического поведения выделяют многообразия полиномиального, экспоненциального, сверхэкспоненциального роста.

Поведение последовательности $c_n(V)$ наиболее изучено для многообразий ассоциативных алгебр. Всякое нетривиальное многообразие ассоциативных алгебр (то есть удовлетворяющее тождествам, не следующим из тождества ассоциативности) имеет либо экспопненциальный рост, либо полиномиальный. Прич‘м для многообразий экспоненциального роста последовательность c_n растет как экспонента с целым показателем [1].

В случае алгебр Ли, поведение последовательности c_n более разнообразно. Есть примеры многообразий, имеющих сверхэкспоненциальный рост [2] или дробно-экспоненциальный [3]. Но так же, как для ассоциативных алгебр, доказано, что не существует многообразий промежуточного между полиномиальным и экспоненциальным роста [4].

Менее изученными являются многообразия йордановых алгебр, то есть алгебр, удовлетворяющих тождествам

$$xy = yx,$$
$$\left(x^2y\right)x \equiv (xy)\,x^2.$$

Есть примеры когда последовательность c_n для многообразий йордановых алгебр растет как экспонента с целым показателем, как полином, или же имеет сверхэкспоненциальный рост.

В докладе будет расказано о полученном автором первом примере многообразия йордановых алгебр V, имеющего дробно-экспонециальный рост, а именно

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(V)} \approx 3.22.$$

Будет приведен пример йордановой алгебры A_J, порождающей многообразие V, и удовлетворяющей, помимо тождеств йордановых алгебр, тождествам

$$x^2yx \equiv 0,$$
$$(x_1y_1)(x_2y_2)(x_3y_3) \equiv 0,$$
$$(x_1x_2x_3x_4)(y_1y_2y_3y_4) \equiv 0,$$

а также некоторым другим.

Данный результат во многом основывается на результатах работы [5]. В частности, в ней приведена конструкция йордановой алгебры, удовлетворяющей тождествам $x^2yx \equiv 0$ и $(x_1y_1)(x_2y_2)(x_3y_3) \equiv 0$, небольшая модификация которой позволила построить алгебру A_J.

Работа частично поддержана грантом МОЛ–А–2014 14–01–31084.

Список литературы

[1] A. Giambruno, M.V. Zaicev. Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate. Adv. Math. **142** (1999), 221–243.

[2] И.Б. Воличенко. Множество алгебр Ли с тождеством $(x_1x_2x_3)(y_1y_2y_3) \equiv 0$ над полем характеристики 0. Сибирский математический журнал **25** (1984), no. 3, 40–54

[3] S.P. Mischenko, M.V. Zaicev. An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent. J. Math. Sci. **93** (1999), no. 6., 977–982.

[4] С.П. Мищенко. Рост многообразий алгебр Ли. Успехи мат. наук **45** (1990), no. 6(276), 25–45.

[5] В.Г. Скосырский. Разрешимость и сильная разрешимость йордановых алгебр. Сибирский математический журнал **30** (1989), no. 2, 167–171.

О коразмерностях алгебр Пуассона с лиево нильпотентным коммутантом

С.М. Рацеев, О.И. Череватенко

Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия

ratseevsm@mail.ru

Векторное пространство A над полем K с двумя K-билинейными операциями умножения $\cdot$ и $\{,\}$ называется алгеброй Пуассона, если относительно операции $\cdot$ пространство A является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции $\{,\}$ — алгеброй Ли и данные операции связаны правилом Лейбница:

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \qquad a, b, c \in A.$$

Будем опускать скобки $\{,\}$ при их левонормированной расстановке: $\{\{a, b\}, c\} = \{a, b, c\}$. Пусть $F(X)$ — свободная алгебра Пуассона над счетным множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, P_n — пространство в $F(X)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \ldots, x_n$, Γ_n — собственное подпространство в P_n, $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие алгебр Пуассона, $Id(\mathbf{V})$ — идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$. Обозначим

$$P_n(\mathbf{V}) = P_n/(P_n \cap Id(\mathbf{V})), \quad \Gamma_n(\mathbf{V}) = \Gamma_n/(\Gamma_n \cap Id(\mathbf{V})),$$

$$c_n(\mathbf{V}) = dim\ P_n(\mathbf{V}), \quad \gamma_n(\mathbf{V}) = dim\ \Gamma_n(\mathbf{V}).$$

Определим многообразие алгебр Пуассона $\mathbf{V}_s$ следующими тождествами:

$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \quad \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \dots, \{x_{2s+1}, x_{2s+2}\}\} = 0.$$

Для произвольного многообразия $\mathbf{V}$ определим функцию сложности

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(\mathbf{V})}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — две функции натурального аргумента. Будем обозначать $f(n) \approx g(n)$, если $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

Теорема. Для многообразия $\mathbf{V}_s$ над произвольным полем выполнены следующие равенства:

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}_s, z) = exp(z) + exp(z) \cdot \left(\sum_{r=1}^{s} \frac{1}{r} \Big(1 + (z-1) exp(z) \Big)^r \right),$$

$$\gamma_n(\mathbf{V}_s) = \sum_{r=1}^{s} \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r} k^n \sum_{i=0}^{k} \binom{r}{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} k^{-i} \frac{n!}{(n-i)!}, \quad n \geq 2,$$

$$\gamma_n(\mathbf{V}_s) \approx n^s s^{n-s-1}, \quad n \to \infty,$$

$$c_n(\mathbf{V}_s) = 1 + \sum_{r=1}^{s} \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r+1} k^n \sum_{i=0}^{k-1} \binom{r}{k-1} \binom{k-1}{i} (-1)^{k-1-i} k^{-i} \frac{n!}{(n-i)!}, \quad n \geq 2,$$

$$c_n(\mathbf{V}_s) \approx s^{-1} n^s (s+1)^{n-s}, \quad n \to \infty.$$

Симметрические супералгебры Ли и деформированные операторы Калоджеро–Мозера

А.Н. Сергеев

Саратовский государственный университет,

Высшая школа экономики, Саратов, Россия

SergeevAN@info.sgu.ru

Доклад основан на совместной работе автора [1].

Изучается действие алгебры дифференциальных операторов $\mathfrak{D}_{n,m}$ задачи Калоджеро–Мозера–Сазерленда на алгебре лорановских полиномов

$f \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}, y_1^{\pm 1} \ldots, y_m^{\pm 1}]^{S_n \times S_m}$, удовлетворяющих условию квазиинвариантности

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - k y_j \frac{\partial f}{\partial y_j} \equiv 0 \qquad (1)$$

на гиперплоскости $x_i = y_j$ для всех $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ при $k = -\frac{1}{2}$. Оказывается, что обобщенные собственные подпространства $\mathfrak{A}_{n,m}(\chi)$ в соответствующем спектральном разложении

$$\mathfrak{A}_{n,m} = \oplus_\chi \mathfrak{A}_{n,m}(\chi),$$

где χ — определенное множество гомоморфизмов $\chi\colon \mathfrak{D}_{n,m} \to \mathbb{C}$, вообще говоря, не являются одномерными.

Основным результатом работы является взаимно однозначное соответствие между конечномерными обобщенными подпространствами в $\mathfrak{A}_{n,m}$ и проективными накрытиями определенных неприводимых конечномерных модулей над супералгеброй $\mathfrak{gl}(n, 2m)$. Более точно, доказывается следующая теорема.

Пусть $Z(\mathfrak{g})$ будет центром обертывающей алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, 2m)$. Для $\mathfrak{g}$-модуля U обозначим через $U^\mathfrak{k}$ подпространство инвариантных векторов относительно $\mathfrak{k} = \mathfrak{osp}(n, 2m)$.

Теорема. *Для любого конечномерного обобщенного собственного подпространства в $\mathfrak{A}_{n,m}(\chi)$ существует единственный проективный неразложимый модуль P над $\mathfrak{gl}(n, 2m)$ и естественное отображение*

$$\Psi\colon (P^*)^\mathfrak{k} \longrightarrow \mathfrak{A}_{n,m}(\chi),$$

которое является изоморфизмом $Z(\mathfrak{g})$-модулей.

Соответствующие проективные модули могут быть описаны в терминах старших весов супералгебры $\mathfrak{gl}(n, 2m)$, удовлетворяющих некоторым условиям типичности. Эти условия типичности являются естественным обобщением условий типичности В. Каца

Список литературы

[1] A.N. Sergeev, A.P. Veselov. Symmetric Lie superalgebras and deformed quantum Calogero–Moser problems, see arXiv: `math.RT/1412.8768` (2014).

Гомологические свойства действий алгебр Хопфа

С.М. Скрябин
Казанский федеральный университет, Казань, Россия
Serge.Skryabin@kpfu.ru

В [1] был поставлен вопрос о том, является ли конечность инъективной размерности свойством всех нётеровых алгебр Хопфа. В настоящее время не имеется подходов к исследованию этого вопроса в полной общности. Однако в случае, когда алгебра Хопфа конечно порождена и удовлетворяет полиномиальному тождеству, положительный ответ был получен в [2]. Аналогичный вопрос представляет интерес не только для самих алгебр Хопфа, но и для H-модульных алгебр. Так называются ассоциативные алгебры, на которых заданная алгебра Хопфа H действует согласованно с умножением в A.

В некоммутативной теории конечность гомологических размерностей выделяет чересчур большое подмножество колец, и по этой причине вводятся некоторые дополнительные условия. Нётерово кольцо R называется горенштейновым в смысле Артина–Шельтера, если R имеет конечную инъективную размерность, скажем d, и при этом $\mathrm{Ext}_R^i(V,R)=0$ для каждого простого R-модуля V и каждого $i \neq d$, а функтор $\mathrm{Ext}_R^d(?,R)$ устанавливает биективное соответствие между классами изоморфизма простых левых и правых R-модулей.

Формулировка основного результата использует понятие H-орбиты простого идеала, вводимое с помощью некоторого отношения эквивалентности. Существование такого отношения эквивалентности доказано в [3] для H-модульной алгебры A, которая конечно порождена как модуль над своим центром. Алгебра A называется H-простой, если A не содержит нетривиальных H-инвариантных двусторонних идеалов. Снабдим множество $\operatorname{Max} A$ всех максимальных идеалов алгебры A топологией Зарисского.

Теорема. *Пусть H — алгебра Хопфа с биективным антиподом, A — некоторая H-простая H-модульная алгебра, которая конечно порождена как алгебра над основным полем и конечно порождена как модуль над своим центром. Предположим, что H-орбиты максимальных идеалов плотны в пространстве* $\operatorname{Max} A$. *Тогда A горенштейнова в смысле Артина–Шельтера.*

В случае, когда $\operatorname{Max} A$ является одной H-орбитой, оказывается возможным найти кратности неразложимых слагаемых в минимальной инъективной резольвенте алгебры A, рассматриваемой как A-модуль над собой.

Список литературы

[1] K.A. Brown, K.R. Goodearl. Homological aspects of Noetherian PI Hopf algebras and irreducible modules of maximal dimension. J. Algebra **198** (1997), 240–265.

[2] Q.-S. Wu, J.J. Zhang. Noetherian PI Hopf algebras are Gorenstein. Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 1043–1066.

[3] S. Skryabin. Hopf algebra orbits on the prime spectrum of a module algebra. Algebr. Represent. Theory **13** (2010), 1–31.

Сферические двойные многообразия флагов

Е.Ю. Смирнов

Высшая школа экономики, Независимый Московский университет, Москва, Россия

esmirnov@hse.ru

Ключевую роль в классическом исчислении Шуберта играют орбиты борелевской подгруппы в группе $\mathrm{GL}(V)$, действующей на грассманиане $\mathrm{Gr}(k,V)$ подпространств размерности k в векторном пространстве V. Эти орбиты, называемые *клетками Шуберта*, и их замыкания, *многообразия Шуберта*, очень хорошо изучены как с геометрической, так и с комбинаторной точки зрения. Так, например, классический результат Сешадри [3] гласит, что многообразия Шуберта являются нормальными и обладают рациональными особенностями.

Можно пойти дальше: рассмотреть прямое произведение двух грассманианов $\mathrm{Gr}(k,V)\times\mathrm{Gr}(l,V)$ и борелевскую подгруппу $B\subset\mathrm{GL}(V)$, действующую на этом многообразии диагональным образом. Оказывается, число орбит этой группы по-прежнему будет конечно (то есть многообразие $\mathrm{Gr}(k,V)\times\mathrm{Gr}(l,V)$ является *сферическим*), но комбинаторика этих орбит и геометрия их замыканий уже будут устроены значительно сложнее (см. [2]). В докладе будет дано комбинаторное описание этих орбит и приведена конструкция разрешения особенностей их замыканий, аналогичная разрешению Ботта–Самельсона–Демазюра–Хансена для многообразий Шуберта. С ее помощью удается доказать аналоги результатов Сешадри о нормальности и рациональности особенностей этих многообразий.

Наконец, в докладе пойдет речь об обобщении этих результатов на случай произвольных полупростых групп. Оказывается, что «правильным» аналогом двойных грассманианов являются так называемые двойные комикровесовые многообразия флагов. Будет рассказано о работе П. Ахингера и

Н. Перрена [1], в которой показано, что «хорошие» геометрические свойства замыканий B-орбит на таких многообразиях имеют место лишь для групп с простыми связями (то есть типа ADE), и о принадлежащей докладчику классификации B-орбит на двойных комикровесовых многообразиях флагов для классических групп.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РНФ 14–11–00414.

Список литературы

[1] P. Achinger, N. Perrin. Spherical multiple flags, see arXiv: `math.AG/1307.7236` (2013).

[2] Е.Ю. Смирнов. Разрешения особенностей для многообразий Шуберта в двойных грассманианах. Функц. анализ и его прил. **42** (2008), no. 2, 56–67.

[3] C.S. Seshadri. Line bundles over Schubert varieties, in: Vector Bundles on Algebraic Varieties, Bombay Colloquium 1984, Oxford University Press, 1987, 499–528.

Универсальная R-матрица квантового дубля янгиана странной супералгебры Ли типа Q_n

В.А. Стукопин

Донской государственный технический университет, Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН и Правительства Республики Северная Осетия–Алания, Ростов-на-Дону, Россия

`stukopin@gmail.com`

Доклад представляет работу, являющуюся естественным продолжением работ [1], [2], в которых в рамках подхода В.Г. Дринфельда определён янгиан $Y(Q_n)$ странной супералгебры Ли Q_n и доказана теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта для $Y(Q_n)$.

Мы будем использовать формулу для универсальной R-матрицы квантового дубля топологической супералгебры Хопфа:

$$R = \sum_i e_i \otimes e^i. \tag{1}$$

Здесь $\{e_i\}$ — базис в топологической супералгебре Хопфа A, а $\{e^i\}$ — двойственный базис в супералгебре Хопфа A^0. Сходимость понимается здесь в $\hbar$-адической топологии. Мы будем также использовать описанное выше треугольное разложение янгиана и индуцированное им разложение квантового дубля янгиана $DY(Q_n)$ [2]:

$$DY(Q_n) \cong Y_+ \hat{\otimes} Y_0 \hat{\otimes} Y_- \hat{\otimes} Y_-^0 \hat{\otimes} Y_0^0 \hat{\otimes} Y_+^0. \tag{2}$$

Здесь изоморфизм индуцируется просто умножением в квантовом дубле. А тензорное произведение — это топологическое тензорное произведение.

Для описания $DY(Q_n)$ удобно использовать следующие порождающие функции (см. [1], [2]):

$$x_{i,j}^{\pm +}(u) = \sum_{k \geq 0} x_{i,j,k}^{\pm} u^{-k-1}, \quad x_{i,j}^{\pm -}(u) = -\sum_{k<0} x_{i,j,k}^{\pm} u^{-k-1},$$

$$h_{i,j}^{+}(u) = 1 + \sum_{k \geq 0} h_{i,j,k} u^{-k-1}, \quad h_{i,j}^{-}(u) = 1 - \sum_{k<0} h_{i,j,k} u^{-k-1}, \quad j \in \mathbb{Z}_2.$$

Сформулируем теорему, дающую представление об общей структуре мультипликативной формулы универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана странной супералгебры Ли. Отметим, что здесь мы понимаем тензорное произведение супералгебр как тензорное топологическое произведение. Мы также будем работать в категории топологических супералгебр. Саму формулу мы понимаем как формальный ряд.

Теорема 1. *Универсальная R-матрица R квантового дубля $DY(Q_n)$ может быть представлена в следующей факторизованной форме*:

$$R = R_+ R_0 R_-, \tag{3}$$

где

$$R_{\pm} = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \sum_{k \geq 0} \exp(-x_{\alpha,0,k}^{\pm} \otimes x_{-\alpha,0,-k-1}^{\mp} - x_{\alpha,1,k}^{\pm} \otimes x_{-\alpha,1,-k-1}^{\mp}), \tag{4}$$

$$R_0 \in Y_0 \hat{\otimes} Y_0^0.$$

Опишем явно член R_0.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi_i^{\pm}(u) = \ln(h_{i,0}^{\pm}(u))$, $\tilde{\varphi}_i^{\pm}(u) = \ln(h_{i,1}^{\pm}(u))$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ *— симметризуемая матрица для* A_n, $A = a_{ij}(q) = [a_{ij}]_q = \dfrac{q^{a_{ij}} - q^{-a_{ij}}}{q - q^{-1}}$, $A(q) = (a_{ij}(q))_{i,j=1}^{n}$. *Пусть* $C(q) = (c_{ij}(q))_{i,j=1}^{n}$ *— матрица, пропорциональная матрице* $A(q)^{-1}$, *и* T *— оператор сдвига*: $Tf(v) = f(v-1)$. *Аналогично,* $\tilde{A} = (\tilde{a_{ij}})_{i,j=1}^{n}$, $\tilde{a}_{ij} = (\alpha_i, \tilde{\alpha_j})$, $\tilde{a}_{ij}(q) = [\tilde{a}_{ij}]_q = \dfrac{q^{\tilde{a}_{ij}} - q^{-\tilde{a}_{ij}}}{q - q^{-1}}$, $\tilde{A}(q) = (\tilde{a}_{ij}(q))_{i,j=1}^{n}$,

$\tilde{C}(q) = (\tilde{c}_{ij}(q))_{i,j=1}^n$ — матрица, пропорциональная матрице $\tilde{A}(q)^{-1}$. Тогда

$$R_0 = \prod_{m\geq 0}(\exp \sum_{1\leq i,j\leq n} Res_{u=v}(\varphi_i^+(u))' \otimes c_{ji}(T^{-1/2})\varphi_j^-(v+(n+1/2)h) \cdot \\ \exp(\sum_{1\leq i,j\leq n} Res_{u=v}(\tilde{\varphi}_i^+(u))' \otimes \tilde{c}_{ji}(T^{-1/2})\tilde{\varphi}_j^-(v+(n+1/2)h)),$$

где h – некоторая константа, $T^{-1/2}$ подставляет $c_{ji}(q)$, $\tilde{c}_{ji}(q)$ соответственно вместо q.

Список литературы

[1] V. Stukopin. Quantum double of Yangian of «strange» Lie superalgebra. Drinfeld approach. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications **3** (2007), no. 069, 12 pp.
[2] В.А. Стукопин. Янгиан странной супералгебры Ли и его дубль. Теоретическая и математическая физика **174** (2013), no. 1, 140–153.

Дифференциальные характеристические классы метрик и связностей

Д.А. Тимашёв
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
timashev@mech.math.msu.su

Пусть M — n-мерное дифференцируемое многообразие (вещественное или комплексное). Корепером порядка k в точке $z \in M$ называется k-струя системы локальных координат $x = (x^1, \dots, x^n)$ на M с центром в точке z. Кореперы порядка k образуют главное расслоение над M, структурной группой которого является группа $\mathrm{GL}_n^{(k)}$ k-струй локальных диффеоморфизмов координатного пространства в начале координат. Это алгебраическая группа, изоморфная группе автоморфизмов алгебры усечённых многочленов $\mathbb{K}[x^1, \dots, x^n]/(x^1, \dots, x^n)^{k+1}$ (где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Любое расслоение $\mathcal{F} \to M$, ассоциированное с расслоением кореперов порядка k, называется естественным расслоением порядка k над многообразием M. Естественное расслоение $\mathcal{F}$ тривиализуется над локальными картами многообразия M, а функции перехода определяются действием структурной группы $\mathrm{GL}_n^{(k)}$ k-струй замен локальных координат на типичный слой F. Характерные примеры естественных расслоений порядка 1 — это расслоения тензоров, а расслоение линейных связностей на многообразии M даёт пример естественного расслоения порядка 2. Подробнее об этом см. [1].

Под геометрической структурой на M понимается сечение φ естественного расслоения $\mathcal{F} \to M$, возможно, удовлетворяющее дополнительным условиям дифференциального характера. Примерами геометрических структур являются всевозможные тензорные поля, в частности, римановы и кэлеровы метрики, а также линейные связности и пр.

Дифференциальный характеристический класс геометрических структур данного типа — это отображение D из пространства геометрических структур в дифференциальные формы некоторой степени m, обладающее следующими свойствами:

(A) компоненты формы $\omega = D(\varphi)$ в локальных координатах задаются алгебраическими выражениями от компонент геометрической величины φ и их частных производных по координатам до некоторого порядка k, причём эти выражения одинаковы во всех локальных системах координат;

(B) для любой геометрической структуры φ дифференциальная форма ω замкнута;

(C) при непрерывной деформации структуры φ класс когомологий $[\omega] \in \mathrm{H}^m(M, \mathbb{K})$ не изменяется.

Свойство (A) — это условие естественности, позволяющее склеивать полученные дифференциальные формы на разных локальных картах и определить дифференциальный характеристический класс данного типа на *любом* многообразии данной размерности n. Свойство гомотопической инвариантности (C) говорит о том, что дифференциальный характеристический класс определяет топологический инвариант многообразия.

Мы описываем дифференциальные характеристические классы метрик и связностей на многообразиях.

Теорема 1. *Дифференциальные характеристические классы римановых метрик на вещественных многообразиях являются многочленами (в алгебре когомологий де Рама) от классов дифференциальных форм вида*

$$\omega = \operatorname{tr}(\underbrace{R \wedge \cdots \wedge R}_{l}) = \sum R^{i_1}_{i_2, p_1 q_1} R^{i_2}_{i_3, p_2 q_2} \cdots R^{i_{l-1}}_{i_l, p_{l-1} q_{l-1}} R^{i_l}_{i_1, p_l q_l} \times$$
$$\times\, dx^{p_1} \wedge dx^{q_1} \wedge dx^{p_2} \wedge dx^{q_2} \wedge \cdots \wedge dx^{p_{l-1}} \wedge dx^{q_{l-1}} \wedge dx^{p_l} \wedge dx^{q_l},$$

где R — тензор кривизны римановой метрики, а l чётно. Эти классы алгебраически эквивалентны классам Понтрягина (то есть порождают ту же подалгебру в алгебре когомологий).

Эта теорема является версией знаменитой теоремы Гилки [4], позволившей Атье, Ботту и Патоди получить новое изящное доказательство теоремы Атьи–Зингера об индексе [3]. Аналогичные теоремы имеют место для кэлеровых метрики и линейных связностей на многообразии.

Теорема 2. *Дифференциальные характеристические классы кэлеровых метрик на комплексных многообразиях являются многочленами от классов дифференциальных форм вида $\omega = \mathrm{tr}(R \wedge \cdots \wedge R)$ (любое число сомножителей), где R — тензор кривизны кэлеровой метрики. Эти классы алгебраически эквивалентны классам Чжэня.*

Теорема 3. *Дифференциальные характеристические классы линейных связностей в касательном расслоении многообразия являются многочленами от классов дифференциальных форм вида $\omega = \mathrm{tr}(R \wedge \cdots \wedge R)$, где R — тензор кривизны связности.*

Доказательства этих теорем проводятся методом теоретико-инвариантной редукции [1]. Суть метода заключается в сведении проблемы описания дифференциальных характеристических классов к описанию полиномиальных отображений пространства $F^{(k)}$ струй геометрических величин заданного типа в пространство $\bigwedge^m(\mathbb{K}^n)^*$, эквивариантных по отношению к естественному действию структурной группы. В рассматриваемых ситуациях (метрики и связности) для действия унипотентного радикала структурной группы на пространстве $F^{(k)}$ имеется сечение $F_0^{(k)}$, трансверсально пересекающее все орбиты. Поэтому проблема сводится к описанию $GL_n(\mathbb{K})$-эквивариантных полиномиальных отображений $F_0^{(k)} \to \bigwedge^m(\mathbb{K}^n)^*$, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, происходящим из условий (B) и (C). Последнее может быть получено методами теории представлений и классической теории инвариантов.

Подробное изложение имеется в работе автора [2].

Список литературы

[1] П.И. Кацыло, Д.А. Тимашёв. Естественные дифференциальные операции на многообразиях: алгебраический подход. Матем. сборник **199** (2008), no. 10, 63–86.

[2] Д.А. Тимашёв. О дифференциальных характеристических классах метрик и связностей. Фундам. и прикл. математика **20** (2015), в печати.

[3] M. Atiyah, R. Bott, V.K. Patodi. On the heat equation and the index theorem. Inv. Math. **19** (1973), 279–330.

[4] P.B. Gilkey. Curvature and the eigenvalues of the Laplacian for elliptic complexes. Adv. Math. **10** (1973), 344–382.

Фильтрации Пуанкаре–Биркгофа–Витта и многообразия флагов

Е.Б. Фейгин
Высшая школа экономики, Москва, Россия
evgfeig@gmail.com

Рассмотрим неприводимое представление V простой алгебры Ли. Фильтрация Пуанкаре–Биркгофа–Витта на универсальной обёртывающей нильпотентной алгебры порождающих операторов индуцирует ПБВ фильтрацию на V. Присоединённое градуированное (вырожденное) пространство относительно этой фильтрации является циклическим представлением абелевой алгебры Ли. Соответствующее вырожденное многообразие флагов определяется как замыкание орбиты прямой, содержащей старший вектор, в проективизации ПБВ вырожденного представления (рассматривается орбита абелевой унипотентной группы).

Эта простая конструкция имеет разнообразные приложения и обобщения в коммутативной алгебре, теории торических многообразий, теории представлений простых и аффинных алгебр, теории представлений колчанов. В наших лекциях мы опишем основные имеющиеся результаты о структуре градуированных представлений и соответствующих многообразий флагов и обсудим разнообразные приложения. В частности, мы обсудим связи с торической геометрией и вырождениями многообразий флагов. Мы также сформулируем ряд открытых задач.

Касательные конусы к многообразиям Шуберта для типа D_n[1]

А.А. Шевченко
Самарский государственный университет, Самара, Россия
shevchenko.alexander.1618@gmail.com

Доклад основан на совместной работе с М.В. Игнатьевым [5].

Пусть G — комплексная редуктивная алгебраическая группа, T — максимальный тор, B — содержащая его борелевская подгруппа, W — группа Вейля G относительно T. Обозначим через $F = G/B$ многообразие флагов. Оно распадается в объединение клеток Шуберта $F = \bigsqcup_{w \in W} X_w^o$. Замыкание

[1]Работа поддержана грантами РФФИ 14–01–31052–мол_а и 14–01–97017–р_поволжье_а.

клетки Шуберта X_w^o обозначается X_w и называется многообразием Шуберта, соответствующим элементу w. Обозначим через C_w касательный конус к X_w в точке $p = eB$, рассматриваемый как подсхема в касательном пространстве $T_pX_w \subset T_pF$. Описание касательных конусов — сложная задача геометрии Шуберта [1]. В 2011 году Д.Ю. Елисеев и А.Н. Панов [3] вычислили касательные конусы в явном виде для $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $n \leqslant 5$. На основании полученных результатов А.Н. Панов выдвинул следующую гипотезу.

Гипотеза. *Пусть $w_1,\ w_2 \in W$ — различные инволюции, тогда $C_{w_1} \neq C_{w_2}$.*

Легко показать, что гипотезу достаточно проверить для групп Вейля, соответствующих неприводимым системам корней. В 2013 году гипотеза была доказана Д.Ю. Елисеевым и М.В. Игнатьевым [4] для групп Вейля, соответствующих неприводимым системам корней типов A_n, F_4, G_2. В 2014 году гипотеза была доказана совместно М.А. Бочкарёвым, М.В. Игнатьевым и автором [2] для групп Вейля, соответствующих неприводимым системам корней типов B_n, C_n.

Введём обозначение $[\pm n] = [1, 2, \ldots, n, -n, -n+1, \ldots]$. Пусть теперь W — группа Вейля типа D_n. С помощью естественного изоморфизма

$$s_{\epsilon_i - \epsilon_j} \longmapsto (i, j)(-i, -j),$$
$$s_{\epsilon_i + \epsilon_j} \longmapsto (i, -j)(j, -i)$$

W отождествляется с подгруппой в $S_{[\pm n]}$.

Определение. Инволюция $w \in W$ типа D_n называется базисной, если $w(i) \neq -i$ для любых $i \in \overline{1, n}$.

В докладе будет рассказано о доказательстве верности гипотезы А.Н. Панова для базисных инволюций в типе D_n. А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть W — группа Вейля типа D_n. Пусть $w_1, w_2 \in W$ — различные базисные инволюции, тогда $C_{w_1} \neq C_{w_2}$.*

Также мы обсудим полученные результаты для исключительных групп Вейля типов E_6, E_7, E_8.

Список литературы

[1] S. Billey, V. Lakshmibai. Singular locus of Schubert varieties. Progr. in Math. **86**, Birkhäuser, 2000.

[2] M.A. Bochkarev, M.V. Ignatyev, A.A. Shevchenko. Tangent cones to Schubert varieties in types A_n, B_n and C_n. J. Algebra, submitted, see also arXiv: `math.RT/:1310.3166`.

[3] Д.Ю. Елисеев, А.Н. Панов. Касательные конусы многообразий Шуберта для A_n малого ранга. Записки научных семинаров ПОМИ **394** (2011), 218–225, см. также arXiv: `math.RT/1109.0399`.
[4] Д.Ю. Елисеев, М.В. Игнатьев. Многочлены Костанта–Кумара и касательные конусы к многообразиям Шуберта для инволюций в A_n, F_4 и G_2. Записки научных семинаров ПОМИ **414** (2013), 82–105, см. также arXiv: `math.RT/:1210.5740`.
[5] М.В. Игнатьев, А.А. Шевченко. О касательных конусах к многообразиям Шуберта типа D_n. Алгебра и анализ, принято к печати, см. также arXiv: `math.AG/1410.4025` (2014).

Содержание

Научное издание

Пятая школа-конференция

АЛГЕБРЫ ЛИ, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ

Самара, Россия
22–27 июня 2015 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Публикуется в авторской редакции
Титульное редактирование *Л. А. Кнохиновой*
Компьютерная верстка в пакете LaTeX, макет *М. В. Игнатьева*

Подписано в печать 17.06.2015. Формат 60х84/16. Бумага офсетная.
Печать оперативная. Усл.-печ.л. 3,25. Уч.-изд. л 3,5.
Гарнитура Times New Roman. Тираж 100 экз. Заказ № 2635.
Издательство «Самарский университет»,
443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1. Тел. 8(846)334–54–23.

Отпечатано с готового оригинала-макета на УОП СамГУ

Для заметок

Для заметок