МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
СОВМЕСТНАЯ РУССКО-ФРАНЦУЗСКАЯ ЛАБОРАТОРИЯ
ИМЕНИ Ж.-В. ПОНСЕЛЕ

Четвёртая школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов

Москва, Россия
27 января – 1 февраля 2014 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

The Fourth School-Conference on

Lie Algebras, Algebraic Groups and Invariant Theory

Moscow, Russia
January 27 – February 1, 2014

ABSTRACTS

Издательство Московского университета
2014

УДК 512.81+512.74+512.554.3
ББК 22.1
Ч–52

Ч–52 Четвёртая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». Москва, Россия, 27 января – 1 февраля 2014 г. Тезисы докладов. — Издательство Московского университета, 2014. — 64 с.
ISBN 978-5-19-010930-6

Сборник содержит тезисы докладов участников Четвёртой школы-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», проводившейся в Москве с 27 января по 1 февраля 2014 года Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова, Самарским государственным университетом, Независимым Московским университетом и Совместной Русско-Французской лабораторией имени Ж.-В. Понселе.

Адресован научным работникам, преподавателям, студентам и аспирантам математических специальностей.

ISBN 978-5-19-010930-6

Предисловие

Четвёртая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» проходила в Москве с 27 января по 1 февраля 2014 года. Её организаторами были Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Самарский государственный университет, Независимый Московский университет и Совместная Русско-Французская лаборатория им. Ж.-В. Понселе. (Первая школа-конференция проходила в Самаре 2009 году, вторая — в Москве в 2011 году, а третья — в Тольятти в 2012 году, подробности см. на сайте `http://halgebra.math.msu.su/alg_conf/main.shtml`.)

Программный комитет школы конференции: Э.Б. Винберг (МГУ им. М.В. Ломоносова, председатель), И.В. Аржанцев (МГУ им. М.В. Ломоносова), В.А. Артамонов (МГУ им. М.В. Ломоносова), Н.А. Вавилов (СПбГУ), М.Х. Гизатуллин (ТГУ), М.В. Зайцев (МГУ им. М.В. Ломоносова), А.С. Клещёв (Университет Орегона, США), В.Н. Латышев (МГУ им. М.В. Ломоносова), А.Н. Панов (СамГУ), Д.А. Тимашёв (МГУ им. М.В. Ломоносова), В.И. Черноусов (Университет Альберты, Канада), О.К. Шейнман (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН).

Организационный комитет школы-конференции: В.Н. Чубариков (МГУ им. М.В. Ломоносова, председатель), И.В. Аржанцев (МГУ им. М.В. Ломоносова, зам. председателя), А.Н. Панов (СамГУ, зам. председателя), М.А. Цфасман (НМУ), Д.А. Тимашёв (МГУ им. М.В. Ломоносова), С.А. Гайфуллин (МГУ им. М.В. Ломоносова), М.В. Игнатьев (СамГУ), К.Г. Куюмжиян (ВШЭ), П.Ю. Котенкова (МГУ им. М.В. Ломоносова), С.Н. Федотов (МГУ им. М.В. Ломоносова).

Участниками школы были студенты, аспиранты и молодые учёные из России и других стран. Им были прочитаны следующие лекционные курсы:

- *Сферические однородные пространства и сферические многообразия*
  (Р.С. Авдеев, МИОО, Москва, и Д.Н. Ахиезер, ИППИ РАН, Москва);
- *Теоремы типа Шевалле*
  (Э.Б. Винберг, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва);
- *Локально нильпотентные дифференцирования и их приложения*
  (Д. Макар-Лиманов, Институт Макса Планка, Бонн, Германия);
- *Нильпотентные орбиты и орбитальные многообразия*
  (А. Мельникова, Университет Хайфы, Израиль);

- *Обобщённые модули Хариш-Чандры: алгебра и геометрия*
  (И. Пенков, Университет Якобса, Бремен, Германия);

- *Неассоциативная теория Ли*
  (И.П. Шестаков, Университет Сан-Паулу, Бразилия, и Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск).

Сборник содержит тезисы докладов участников школы-конференции.

Проведение школы-конференции было поддержано грантом РФФИ и фондом Дмитрия Зимина «Династия».

Оргкомитет

Бесконечная транзитивность на универсальных торсорах

И.В. Аржанцев
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
arjantse@mccme.ru

Доклад основан на совместной работе с Хендриком Зюссом и Александром Перепечко [4].

Действие группы G на множестве A называется *m-транзитивным*, если для любых наборов попарно различных точек $(a_1, \ldots, a_m)$ и $(a_1', \ldots, a_m')$ в A найдется такой элемент $g \in G$, что $g \cdot a_i = a_i'$ для $i = 1, \ldots, m$. Действие, которое m-транзитивно для всех m, называется *бесконечно транзитивным*.

Пусть X — алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. Рассмотрим регулярное действие $\mathbb{G}_a \times X \to X$ аддитивной группы поля $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$. Образ $\mathbb{G}_a$ в группе $\mathrm{Aut}(X)$ назовем *однопараметрической унипотентной подгруппой* и рассмотрим подгруппу $\mathrm{SAut}(X)$ в $\mathrm{Aut}(X)$, порожденную всеми такими подгруппами. Пусть X_{reg} — множество гладких точек в X. Назовем точку $x \in X_{\mathrm{reg}}$ *гибкой*, если касательное пространство T_xX порождено касательными векторами к орбитам однопараметрических унипотентных подгрупп. Многообразие X *гибкое*, если все точки $x \in X_{\mathrm{reg}}$ являются гибкими. В работе [3] показано, что для неприводимого аффинного многообразия размерности не ниже 2 транзитивность действия группы $\mathrm{SAut}(X)$ на X_{reg} влечет бесконечную транзитивность этого действия, и оба свойства равносильны гибкости X. В данной работе мы переносим этот результат на квазиаффинные многообразия.

Рассмотрим нормальное многообразие Y без непостоянных обратимых функций и со свободной конечно порожденной группой классов дивизоров $\mathrm{Cl}(Y)$. Пусть $\mathrm{WDiv}(Y)$ — группа дивизоров Вейля на Y и $K \subseteq \mathrm{WDiv}(Y)$ — подгруппа, для которой проекция $K \to \mathrm{Cl}(Y)$ является изоморфизмом. Определим *пучок Кокса* как пучок K-градуированных алгебр

$$\mathcal{R} := \bigoplus_{[D] \in \mathrm{Cl}(Y)} \mathcal{R}_{[D]}, \qquad \mathcal{R}_{[D]} := \mathcal{O}_Y(D),$$

где $D \in K$ представляет класс $[D] \in \mathrm{Cl}(Y)$ и умножение в $\mathcal{R}$ определяется умножением однородных элементов в поле $\mathbb{K}(Y)$. *Кольцо Кокса* многообразия Y — это кольцо $R(Y)$ глобальных сечений пучка $\mathcal{R}$.

Пусть Y гладко. Тогда пучок $\mathcal{R}$ локально имеет конечный тип, и относительный спектр $q \colon \mathrm{Spec}_Y \mathcal{R} \to Y$ определяет квазиаффинное многообразие

$X = \mathrm{Spec}_Y \mathcal{R}$. Более того, морфизм q является локально тривиальным расслоением с алгебраическим тором в качестве слоя. Этот морфизм называется *универсальным торсором* над многообразием Y. Подробнее об универсальных торсорах можно прочитать в [6] и [2].

Неприводимое алгебраическое многообразие Y назовем *A-покрытым*, если существует такое открытое покрытие $Y = U_1 \cup \ldots \cup U_r$, что каждая карта U_i изоморфна аффинному пространству $\mathbb{A}^n$.

Теорема. *Пусть Y — A-покрытое многообразие размерности не ниже* 2 *и $q\colon X \to Y$ – универсальный торсор над Y. Тогда группа* $\mathrm{SAut}(X)$ *действует на квазиаффинном многообразии X бесконечно транзитивно.*

Доказательство основано на понятиях цилиндра [5] и трансверсального покрытия цилиндрами [1]. Также в работе мы описываем широкие классы A-покрытых многообразий.

Вопрос. *Пусть Y — A-покрытое многообразие с конечно порожденным кольцом Кокса $R(Y)$. Верно ли, что аффинное многообразие* $\mathrm{Spec}\, R(Y)$ *является гибким?*

Список литературы

[1] А.Ю. Перепечко. Гибкость аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степеней 4 и 5. Функциональный анализ и его приложения **47** (2013), вып. 4, 45–52, см. также arXiv: `math.AG/1108.5841`.

[2] I. Arzhantsev, U. Derenthal, J. Hausen, A. Laface. Cox rings. Книга принята к публикации в издетельстве Cambridge University Press, серия Cambridge Studies in Advanced Mathematics, см. также arXiv: `math.AG/1003.4229`.

[3] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. **162** (2013), no. 4, 767–823, см. также arXiv: `math.AG/1011.5375`.

[4] I. Arzhantsev, A. Perepechko, H. Suess. Infinite transitivity on universal torsors. To appear in the Journal of the London Mathematical Society, см. также arXiv: `math.RT/1302.2309`.

[5] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, M. Zaidenberg. Group actions on affine cones. CRM Proceedings and Lecture Notes **54**, Amer. Math. Soc., 2011, 123–164, см. также arXiv: `math.AG/0905.4647`.

[6] A.N. Skorobogatov. Torsors and rational points. Cambridge Tracts in Mathematics **144**, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

О полупростых конечномерных алгебрах Хопфа

В.А. Артамонов
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
artamon@mech.math.msu.su

Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль или большей размерности H. Обозначим через G группу групповых элементов дуальной алгебры Хопфа H^*. Она состоит из гомоморфизмов k-алгебр $H \to k$. Имеются два перестановочных действия $g \rightharpoonup h$, $h \leftharpoonup g$ группы G в H. Именно, если $h \in H$ и при применении коумножения Δ имеем

$$\Delta(h) = \sum_h h_{(1)} \otimes h_{(2)} \in H \otimes H,$$

то для $g \in G$ и $h \in H$ полагаем

$$g \rightharpoonup h = \sum_h h_{(1)} \langle g, h_{(2)} \rangle, \quad h \leftharpoonup g = \sum_h \langle g, h_{(1)} \rangle h_{(2)}.$$

Предположим, что в каждой размерности, большей 1, у H имеется не более одного неприводимого модуля. В этом случае на каждом неприводимом неодномерном H-модуле имеется проективное представление группы $G \times G$, индуцированное действием $(g, f)h = g \rightharpoonup h \leftharpoonup f$, где $g, f \in G$ и $h \in H$ [3].

Показано, что коумножение в H согласовано с указанным действием в модулях и напоминает матричную коалгебру.

Ранее в [1], [4], [5], [2] описаны алгебры Хопфа H в случае одного неприводимого неодномерного H-модуля.

Показано, что не может быть двух неприводимых неодномерных H-модулей, являющихся неприводимым представлениями G с действием $\rightharpoonup$ и группы $G \times G$ с приведенным выше действием.

Список литературы

[1] Р.Б. Мухатов. О структуре полупростых алгебр Хопфа. Рукопись деп. в ВИНИТИ 17.10.2012, no. 405–B2012, 17 с.

[2] С.Ю. Спиридонова. Обобщенная кокоммутативность некоторых алгебр Хопфа и их связь с конечными полями. Алгебра и анализ **25** (2013), no. 5, 253—269.

[3] V.A. Artamonov. On semisimple Hopf algebras with few representations of dimension greater than one. Revista de la Unión Matemática Argentina **51** (2010), no. 2, 91–105.

[4] V.A. Artamonov, I.A. Chubarov. Dual algebras of some semisimple finite dimensional Hopf algebras. In: Modules and comodules. Trends in Mathematics. Birkhauser Verlag, Basel, Switzerland, 2008, 65–85.
[5] V.A. Artamonov, I.A. Chubarov. Properties of some semisimple Hopf algebras. In: Contemp. Math. **483**. Algebras, representations and applications. A conference in honour of Ivan Shestakov's 60th birthday, August 26 — September 1, 2007, Maresias, Brazil. Edited by: V. Futorny, V. Kac, I. Kashuba and E. Zelmanov. Amer. Math. Soc., 2009, 23–36.

Центральные элементы Капелли в универсальной обёртывающей алгебре $U(\mathfrak{g}_2)$

Д.В. Артамонов
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
artamonov.dmitri@gmail.com

Доклад основан на работе автора [1].

В универсальной обёртывающей алгебре для ортогональной алгебры имеются следующие центральные элементы, называемые элементами Капелли.

Пусть $F_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, N$ — порождающие ортогональной алгебры $\mathfrak{o}_N$, $F = (F_{ij})$ — матрица, из них составленная, $F_I = (F_{ij})_{i,j\in I}$, $I \subset \{1, \ldots, N\}$, — её подматрица. Обозначим через PfF_I пфаффиан этой подматрицы, вычисленный с использованием умножения в универсальной обёртывающей алгебре.

Элементы Капелли определяются формулой

$$C_k = \sum_{I:\ |I|=k} (PfF_I)^2.$$

Эти элементы центральные, алгебраически независимые. Они могут быть охарактеризованы в терминах собственных значений.

В докладе предполагается дать конструкцию аналогичных центральных элементов для случая алгебры Ли $\mathfrak{g}_2$. Будет дана характеризация построенных элементов в терминах их собственных значений.

Список литературы

[1] D.V. Artamonov, V.A. Golubeva. Capelli Elements for the algebra $\mathfrak{g}_2$. J. Lie Theory **23** (2013), 589–606.

О дифференциальных инвариантах действий полупростых алгебраических групп в неприводимых представлениях

П.В. Бибиков

Институт проблем управления им В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

tsdtp4u@proc.ru

Доклад основан на совместной работе автора и В.В. Лычагина [2].

Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа над комплексным полем $\mathbb{C}$, и $\rho_\lambda\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ — её неприводимое представление со старшим весом λ.

Зафиксируем борелевскую подгруппу B группы G и рассмотрим однородное пространство флагов $M := G/B$. Далее, рассмотрим действие $B : G$ борелевской группы B на G правыми сдвигами: $g \mapsto gb^{-1}$, где $g \in G$ и $b \in B$. Наконец, определим расслоенное произведение $E := G \times_B \mathbb{C} = G \times \mathbb{C}/\sim$, где отношение эквивалентности $\sim$ определено следующим образом: $(g, c) \sim (gb^{-1}, \chi_\lambda(b)c)$, где $\chi_\lambda \in \mathfrak{X}(T)$ — характер тора $T \subset B$, отвечающий старшему весу λ.

Введем расслоение $\pi^\lambda\colon E \to M$, $\pi^\lambda(g, c) = gB$. Голоморфными сечениями этого расслоения являются голоморфные функции $f\colon G \to \mathbb{C}$, удовлетворяющие условию $f(gb) = \chi_\lambda(b)f(g)$ для всех $g \in G$ и $b \in B$.

В расслоении π^λ левыми сдвигами действует группа G. Это действие продолжается до действия на пространстве голоморфных сечений расслоения π^λ. А именно, $g \circ f(g') = f(g^{-1}g')$. Согласно теореме Бореля–Вейля–Ботта (см., например, [3]), если λ — доминантный вес группы G, это действие изоморфно представлению ρ_λ.

В докладе будет изложен новый подход к изучению представлений полупростых алгебраических групп, основанный на теореме Бореля–Вейля–Ботта. Для этого мы введем пространство джетов сечений расслоения π^λ, вычислим поле дифференциальных инвариантов действия группы G на джетах сечений и, наконец, укажем, как построенные дифференциальные инварианты задают G-орбиты регулярных сечений расслоения π^λ.

Итак, рассмотрим расслоение π^λ, отвечающее ненулевому старшему весу λ. Пусть $J^k(\pi^\lambda)$ — пространство k-джетов сечений расслоения π^λ. Канонические проекции обозначим через

$$\pi^\lambda_{k,k-1}\colon J^k(\pi^\lambda) \to J^{k-1}(\pi^\lambda) \quad \text{и} \quad \pi^\lambda_k\colon J^k(\pi^\lambda) \to M.$$

Пусть также $J^\infty(\pi^\lambda) = \varprojlim J^k(\pi^\lambda)$ — пространство бесконечных джетов.

Действие группы G на сечениях расслоения π^λ канонически продолжается до действия на всех пространствах джетов $J^k(\pi^\lambda)$ и на $J^\infty(\pi^\lambda)$ (см. [1]).

Напомним, что рациональная функция $J \in \mathbb{C}(J^k(\pi^\lambda))$ называется *дифференциальным инвариантом действия группы G порядка не выше k*, если J инвариантна относительно продолженного действия группы G на пространстве $J^k(\pi^\lambda)$.

Аналогично, дифференцирование $\nabla\colon C^\infty(J^\infty(\pi^\lambda)) \to C^\infty(J^\infty(\pi^\lambda))$ называется *инвариантным*, если оно перестановочно с продолженным действием группы G. Мы будем рассматривать только инвариантные дифференцирования, компоненты которых рациональны по координатам $J^\infty(\pi^\lambda)$.

Касательная алгебра $\mathfrak{g}$ группы G раскладывается в ортогональную (относительно формы Киллинга) прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus_\perp \mathfrak{m}$ касательных алгебр $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{m}$ борелевской группы B и пространства флагов M соответственно. Это разложение определяет на однородном пространстве M инвариантную связность без кручения Γ (*связность Номидзу*; см. [4]), а в расслоении π^λ — инвариантную связность Δ (*связность Вана*; см. [5]).

Теорема 1. *Симметрические горизонтальные тензоры Q_k, задаваемые равенствами*

$$Q_1 = \widehat{d}^s_\Delta Q_0 \quad \textit{и} \quad Q_{k+1} = \widehat{d}^s_{\Gamma\otimes\Delta} Q_k \quad \textit{при } k \geqslant 1,$$

являются G-инвариантными для всех $k \geqslant 0$ (здесь $\widehat{d}^s_\bullet$ — полные симметрические дифференциалы по соответствующим связностям).

С помощью этих инвариантных тензоров построим набор инвариантных дифференцирований $\nabla_1, \ldots, \nabla_m$, где $m = \dim M$.

Далее, вычислим коэффициенты формы q_1 и связности Номидзу Γ в «инвариантом базисе» $\{\nabla_1, \ldots, \nabla_m\}$:

$$\mathcal{L}_i := q_1(\nabla_i), \quad \Gamma_{\nabla_i}(\nabla_j) = \sum_{k=1}^m \Gamma^k_{ij}\nabla_k, \quad \text{где } 1 \leqslant i, j \leqslant m.$$

Теорема 2. *Поле дифференциальных инвариантов действия группы G на пространстве $J^\infty(\pi^\lambda)$ порождается дифференциальными инвариантами $\mathcal{L}_i$, Γ^k_{ij} и инвариантными дифференцированиями $\nabla_1, \ldots, \nabla_m$.*

Теперь мы укажем критерий, позволяющий разделять G-орбиты сечений расслоения π^λ и, как следствие, G-орбиты неприводимого представления ρ_λ, соответствующего ненулевому старшему весу λ. Для этого рассмотрим произвольное голоморфное сечение s расслоения π^λ. Назовем сечение s *регуляр-*

ным, если множество M_s^{reg} точек $x \in M$, для которых 2-джеты $[s]_x^2$ регулярны, плотно в M.

Ограничения базисных инвариантов $\mathcal{L}_i$ и Γ_{ij}^k на регулярное сечение s являются голоморфными функциями на множестве M_s^{reg} и задают отображение

$$h_s\colon M_s^{\mathrm{reg}} \to \mathbb{C}^N, \quad h_s(x) = (\mathcal{L}_1([s]_x^2), \ldots, \mathcal{L}_m([s]_x^2), \Gamma_{11}^1([s]_x^2), \ldots, \Gamma_{mm}^m([s]_x^2)).$$

Пусть $\mathcal{H}_s := \mathrm{Im}(h_s)$ — образ отображения h_s.

Теорема 3. *Регулярные сечения s и $\widetilde{s}$ расслоения π^λ являются G-эквивалентными, если и только если $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{\widetilde{s}}$.*

Список литературы

[1] Д.В. Алексеевский, А.М. Виноградов, В.В. Лычагин. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. мат. Фунд. направления, т. **28**, 1988.

[2] П.В. Бибиков, В.В. Лычагин. Дифференциальные инварианты действий полупростых алгебраических групп в неприводимых расслоениях. Доклады АН, в печати.

[3] R. Bott. Homogeneous vector bundles. Annals of Mathematics, Second Series **66** (1957), no. 2, 203–248.

[4] K. Nomizu. Invariant affine connections on homogeneous spaces. American J. Math. **76** (1954), no. 1, 33–65.

[5] H.C. Wang. On invariant connections over a principal fiber bundle. Nagoya Math. J. **13** (1958), 1–19.

Расстановки ладей, орбиты и базисные многообразия

А.С. Васюхин

Самарский государственный университет, Самара, Россия

`safian.malk@gmail.com`

Пусть $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ — полная линейная группа, B — её борелевская подгруппа, состоящая из всех верхнетреугольных матриц, U — унипотентный радикал группы B. Обозначим через $\mathfrak{n}$ алгебру Ли группы U (она состоит из всех строго верхнетреугольных матриц с нулями на диагонали) а через $\mathfrak{n}^*$ — сопряжённое к ней пространство, которое удобно отождествить с пространством строго нижнетреугольных матриц с помощью формы следа. Группы B и U действуют на $\mathfrak{n}$ сопряжениями; двойственное действие на $\mathfrak{n}^*$ называется коприсоединённым. Орбиты коприсоединённого действия играют важную роль в теории представлений групп B и U [2].

Отождествим множество положительных корней Φ^+ группы G с множеством пар (i,j), $1 \leqslant i < j \leqslant j$. С каждым подмножеством $D \subset \Phi$ и отображением $\xi\colon D \to \mathbb{C}^\times$ можно связать матрицу

$$f_{D,\xi} = \sum_{(i,j)\in D} \xi(i,j) e_{j,i} \in \mathfrak{n}^*$$

(здесь $e_{i,j}$ — обычные матричные единицы). Подмножество D называется расстановкой ладей, если у этой матрицы в каждой строке и в каждом столбце стоит не более одного ненулевого элемента (это свойство не зависит от выбора отображения ξ).

Мы будем говорить, чтоককоприсоединённая U-орбита $\Theta_{D,\xi}$ и коприсоединённая B-орбита Ω_D матрицы $f_{D,\xi}$ *ассоциированы* с расстановкой ладей D; легко проверить, что $\Omega_D = \bigcup_\xi \Theta_{D,\xi}$ (объединение берётся по всем отображениям из D в $\mathbb{C}^\times$). Практически все сколь-нибудь полно изученные к настоящему времени U-орбиты ассоциированы с теми или иными расстановками ладей (см., к примеру, [1]). В работе [4] мы вычислили размерности орбит $\Theta_{D,\xi}$ и Ω_D, построили поляризации для линейных форм $f_{D,\xi}$ и изучили примыкания орбит Ω_D.

В статье [3] К. Андре для каждой расстановки ладей D и каждого отображения $\xi\colon D \to \mathbb{C}^\times$ определил так называемое базисное многообразие $\mathcal{O}_{D,\xi}$ — орбиту действия группы $U \times U$ на пространстве $\mathfrak{n}^*$, двойственного действию этой группы на пространстве $\mathfrak{n}$, заданному формулой

$$(g,h) \in U \times U,\ x \in \mathfrak{n} \mapsto gxh^{-1}.$$

К. Андре показал, что $\mathfrak{n}^* = \bigsqcup_{D,\xi} \mathcal{O}_{D,\xi}$, и нашёл размерность $\mathcal{O}_{D,\xi}$.

В 2013 году А.Н. Панов сформулировал ряд гипотез о связи базисных многообразий с орбитами, ассоциированными с расстановками ладей (см. также тезисы А.Н. Панова в этом сборнике). В частности, он предположил, что $\Theta_{D,\xi}$ имеет минимальную размерность среди всех U-орбит, лежащих в $\mathcal{O}_{D,\xi}$, и дал гипотетическую формулу для размерности орбиты в терминах подстановок. Доклад посвящён доказательству этой формулы и обсуждению гипотезы для произвольного n.

Доклад основан на совместной работе с М.В. Игнатьевым. Автор поддержан грантами РФФИ 14–01–97017–р_поволжье_а и 14–01–31052–мол_а.

Список литературы

[1] М.В. Игнатьев, А.Н. Панов. Коприсоединённые орбиты группы $\mathrm{UT}(7,K)$. Фунд. и прикл. матем. 13 (2007), no. 5, 127–159, см. также arXiv: `math.RT/0603649`.

[2] А.А. Кириллов. Унитарные представления нильпотентных групп Ли. УМН **57** (1962), 57–110.
[3] C.A.M. Andrè. Basic sums of coadjoint orbits of the unitriangular group. J. Algebra **176** (1995), 959–1000.
[4] M.V. Ignatyev, A.S. Vasyukhin. Rook placements in A_n and combinatorics of B-orbit closures. J. Lie Theory, submitted, см. также arXiv: `math.RT/1310.3164`.

Кватернионы, системы корней и модулярные формы

Г.В. Воскресенская
Самарский государственный университет, Самара, Россия
galvosk@mail.ru

В докладе будет рассказано об исследованиях некоторых рядов по элементам из порядков в алгебре кватернионов, аналогичных L-рядам Гекке с грессенхарактерами. В этих исследованиях используются свойства систем корней.

Теорема 1. *Пусть M — порядок в алгебре кватернионов над $\mathbf{Q}$, который является решёткой уровня N относительно квадратичной формы $q(\alpha) = N\alpha$, $\omega = \dfrac{\bar{\alpha}}{\alpha}$, $\mu(\alpha) = 1 + \omega + \ldots + \omega^{2k}$, k — неотрицательное целое число. Тогда*

$$\sum_{\alpha \in M} \mu(\alpha)\alpha^{2k} e^{2\pi i z N(\alpha)}$$

является модулярной формой уровня N веса $2k + 2$.

При специализации M формулы могут быть более явными. Например, верна

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{H}$ — алгебра кватернионов над $\mathbf{Q}$, Γ_4 — решётка кватернионов Гурвица:*

$$\alpha = \frac{a + bi + cj + dk}{2},\ a \equiv b \equiv c \equiv d \pmod 2, a, b, c, d \in \mathbf{Z}.$$

Тогда

$$\frac{1}{12} \cdot \sum_{\alpha \in \Gamma_4 \subset \mathbf{H}} \alpha^6 e^{2\pi i z N(\alpha)} = \eta^8(z)\eta^8(2z).$$

Здесь $\eta(z)$ — эта-функция Дедекинда.

Список литературы
[1] Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М., Наука, 1988.
[2] Б.А. Венков. Исследования по теории чисел. М., Наука, 1981.
[3] A.G. van Asch. Modular forms and root systems. Math. Ann. **222** (1976), 145–170.
[4] K. Ono. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. CBMS Reg. Conf. Ser. Math., v. **102**, AMS, Providence, RI, 2004.

Образующие полей U-инвариантов и B-инвариантов присоединённого представления группы $\mathbf{GL}(n, K)$

К.А. Вяткина
Самарский государственный университет, Самара, Россия
`vjatkina.k@gmail.com`

Пусть K — поле характеристики нуль, $G = \mathrm{GL}(n, K)$ и B (соотв., U) — её треугольная (соотв., унитреугольная) подгруппа. Формула $Ad_g X = gXg^{-1}$, $g \in U,\ X \in V$, определяет присоединённое представление группы G в линейном пространстве $V = \mathrm{Mat}(n, K)$. Известно [1], что поле инвариантов любого действия связной разрешимой группы является полем рациональных функций. В докладе будет рассказано, как найти систему образующих полей инвариантов для присоединенного действия групп B и U в V.

С любым $X \in V$ можно связать набор из n угловых миноров вида

$$J_{1,0} = x_{n,1},\ J_{2,0} = \begin{vmatrix} x_{n-1,1} & x_{n-1,2} \\ x_{n,1} & x_{n,2} \end{vmatrix},\ \ldots,\ J_{n,0} = \mathrm{det} X.$$

Расширим данный набор следующим образом: с каждым минором $J_{k,0}$ свяжем систему из k определителей $J_{k,i}$, где $0 \leqslant i \leqslant k-1$. В определителе $J_{k,i}$ первые $k-i$ строк совпадают с последними $k-i$ строками минора $J_{k,0}$, а последние i строк совпадают с аналогичными строками из минора $J_{k,0}(X^*)$ присоединённой матрицы $X^* = \{x^*_{ij}\}$.

Теорема 1. [2] *Поле U-инвариантов присоединённого представления группы $\mathrm{GL}(n, K)$ есть поле рациональных функций от системы образующих полиномов $\{J_{k,i},\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ 0 \leqslant i \leqslant k-1\}$.*

Введём обозначения

$$y_1 = J_{1,0},\ y_i = \frac{J_{i,i-1}}{J_{i-1,0}}\ , \text{ где } 2 \leqslant i \leqslant n,$$

$$Y_{i,j} = \frac{J_{i,j} \cdot y_{n-i+j+1}}{J_{i-1,j} \cdot y_i} \text{ , где } 2 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant j \leqslant i-2.$$

Теорема 2. *Поле B-инвариантов присоединённого представления группы* $\mathrm{GL}(n,K)$ *является полем рациональных функций от* $\{y_n,\ Y_{i,j},\ 2 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant j \leqslant i-2\}$.

Работа поддержана грантом РФФИ 14–01–97017–р_поволжье_а.

Список литературы

[1] Э.Б. Винберг, В.Л. Попов. Теория инвариантов. Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направл., т. **55**, 1989. 137–309.

[2] К.А. Вяткина, А.Н. Панов. Поле U-инвариантов присоединённого действия группы $\mathrm{GL}(n,k)$. Математические заметки **93** (2013), no. 1, 144–147.

Слабо полупростые дифференцирования кольца многочленов от двух переменных

В.С. Гавран, В.В. Степух

Киевский национальный университет им. Т. Шевченко, Киев, Украина

svvhelios@gmail.com

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики 0 и $W_2(\mathbb{K})$ — алгебра Ли всех $\mathbb{K}$-дифференцирований кольца многочленов $\mathbb{K}[x,y]$. Для многочленов $f, g \in \mathbb{K}[x,y]$ положим $[f,g] = \det J(f,g)$, где $J(f,g)$ — матрица Якоби. Для фиксированного многочлена f линейный оператор D_f на $\mathbb{K}[x,y]$, заданный по правилу $D_f(g) = [f,g]$, является $\mathbb{K}$-дифференцированием кольца многочленов $\mathbb{K}[x,y]$, дифференцирование D_f называется якобиевым. Якобиевы дифференцирования образуют подалгебру $sa_2(\mathbb{K})$ алгебры Ли $W_2(\mathbb{K})$, которая изучалась многими авторами (см,, например, [1]).

В работе [3] многочлен $f \in \mathbb{K}[x,y]$ был назван слабо полупростым, если для некоторого многочлена g и ненулевого элемента $\lambda \in \mathbb{K}$ выполняется равенство $D_f(g) = \lambda g$. Последнее равенство означает, что для слабо полупростого многочлена f дифференцирование D_f может быть включено в неабелеву двумерную подалгебру из $sa_2(\mathbb{K})$. Так как строение алгебры Ли $sa_2(\mathbb{K})$. тесно связано с проблемой якобиана, то изучение слабо полупростых дифференцирований представляет интерес (вопрос о строении слабо полупростых многочленов был поставлен в [3]).

Мы даем описание всех слабо полупростых многочленов $f(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$ с разделёнными переменными, то есть таких, которые имеют вид $f(x,y) =$

$f_1(x)\cdot f_2(y)$, и их собственных функций $g(x,y)\in\mathbb{K}[x,y]$, для которых $[f,g]=\lambda g, \lambda\in\mathbb{K}^\star$. При этом использовались результаты работы [2]), где изучались собственные функции якобианных дифференцирований.

Теорема. *Многочлен $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)\in\mathbb{K}[x,y]$ будет слабо полупростым тогда и только тогда, когда f не имеет кратных корней и хотя бы один из многочленов $f_1(x)$ или $f_2(y)$ линейный, и если, например, $f_2(y)=ay+b, a,b\in\mathbb{K}$ и $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ — корни $f_1(x)$, то $l_i=\frac{1}{af_1'(\alpha_i)}\in\mathbb{Z}, i=1,\dots,n$. При этом если $g=g(x,y)$ — собственная функция для D_f с собственным числом 1, то $g=F(f)\cdot f_2(y)^k\cdot\prod\limits_{x=1}^{n}(x-\alpha_i)^{k-l_i}$, где $F(f)\in\mathbb{K}[t]$ и $k\in\mathbb{N}$ такое, что $k\geqslant l_i, i=1,\dots,n$.*

Пример. Многочлен $f=y(x-1)(x-\frac{1}{2})\cdots(x-\frac{1}{n}), n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2?$ слабо полупростой. Действительно, полагая $f_1(x)=(x-1)(x-\frac{1}{2})\cdots(x-\frac{1}{n})$, мы получим для каждого i, $1\leqslant i\leqslant n$, равенство $f_1'(\frac{1}{i})=(-1)^{i-1}(i^{n-1}\binom{n}{i})^{-1}$. Так как $f_2(y)=ay+b=y$ и $\frac{1}{af_1'(\alpha_i)}\in\mathbb{Z}, i=1,\dots,n$, то ввиду теоремы получим, что f — слабо полупростой многочлен.

Список литературы

[1] A.P. Petravchuk, O.G. Iena. On centralizers of elements in the Lie algebra of the special Cremona group $sa(2,k)$. J. Lie Theory **16** (2006), no. 3, 561–567.
[2] Y. Stein. The total reducibility order of a polynomial in two variables. Israel J. Math. **68** (1989), 109–122.
[3] Y. Stein. Weakly nilpotent and weakly semisimple polynomials of the plane. Int. Math. Research Notes **13** (2000), 681–698.

Непростота кремоновой группы трёхмерного пространства

М.Х. Гизатуллин
Тольяттинский государственный университет, Тольятти, Россия
gizmarat@yandex.ru

Основное поле — поле комплексных чисел $\mathbf{C}$. Указанная в заголовке доклада группа — это группа всех автоморфизмов поля $\mathbf{C}(x,y,z)$ рациональных функций от трёх независимых переменных x,y,z. Она инверсно изоморфна группе бирациональных преобразований трёхмерного проективного (или аффинного) пространства. Обозначается символом $\mathrm{Cr}_3(\mathbf{C})$ или кратко Cr_3. Занимающий нас вопрос: имеются ли в этой группе собственные нормальные делители? В работе [1] утверждается существование нетривиальных нормальных подгрупп в кремоновой группе плоскости Cr_2.

В докладе будут описаны несколько нормальных делителей в Cr_3 и тем самым доказана

Теорема. *Кремонова группа пространства непростая.*

Список литературы

[1] S. Cantat, S. Lamy. Normal subgroups in the Cremona group. Acta Mathematica **210** (2013), 31–94.

О некоторых подходах к классификации произвольных конечномерных алгебр Ли

В.В. Горбацевич

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского, Москва, Россия

vgorvich@yandex.ru

Со времен С. Ли стоит задача классификации конечномерных алгебр Ли. Для небольших размерностей классификация была получена еще самим С. Ли (и его последователями на начальном этапе развития теории алгебр Ли). Была затем получена исчерпывающая классификация полупростых алгебр Ли (над полями характеристики 0 — алгебраически замкнутыми или совершенными). С помощью разложения Леви классификация произвольных алгебр Ли в значительной мере сводится к классификации простых алгебр Ли (в настоящее время доведенной почти до совершенства, хотя и тут остаются интригующие вопросы — например, о «происхождении» пяти простых исключительных алгебр Ли) и к классификации разрешимых алгебр Ли. С помощью конструкции расщепления Мальцева классификация разрешимых алгебр Ли, как можно иногда прочесть, сводится к классификации нильпотентных алгебр Ли. Это не совсем так — мало получить классификацию нильпотентных алгебр Ли, нужно еще иметь описания их алгебр дифференцирований (или хотя бы коммутативных вполне приводимых подалгебр в алгебрах дифференцирований), что представляет собой очень непростую задачу. Но, так или иначе, пути классификации конечномерных алгебр Ли приводят к необходимости изучать и классифицировать нильпотентные алгебры Ли. Однако здесь возникли огромные препятствия. Произвольные нильпотентные алгебры Ли не удается описать хотя бы в какой-то нетривиальной форме. Многие конструкции, прекрасно работающие для полупростых или разрешимых алгебр Ли, для нильпотентных алгебр Ли часто «вырождаются» в тривиальности. Например, картановская подалгебра для произвольной нильпотентной алгебры Ли совпадает с ней самой. Классификации нильпотентных алгебр Ли получены для размерностей $\leqslant 7$ (для полей $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$). Для размерностей $\geqslant 8$ имеются только частичные классификации — для некоторых специальных классов нильпотентных алгебр Ли. Никаких подходов к классификации произвольных конечномерных нильпотентных алгебр Ли в настоящее время не имеется. Тем самым сведение классификации произвольных алгебр Ли к нильпотентным натыкается на непреодолимые (пока?) препятствия.

Было предложено для изучения произвольных алгебр Ли использовать «обходный маневр». Если классифицировать все нильпотентные алгебры Ли не удаётся, то можно принять их за исходный объект и на их основе классифицировать более общие алгебры Ли. А именно, изучать все те алгебры Ли, у которых нильрадикал (то есть наибольший нильпотентный идеал) изоморфен заданной нильпотентной алгебре Ли. Этот подход используется в целом ряде недавно опубликованных статей. Но в них обычно рассматриваются очень частные случаи (на основе весьма узких классов нильпотентных алгебр Ли), причем используются довольно элементарные методы (на уровне линейной алгебры и вычислений конкретных коммутаторов).

В докладе будет рассмотрен более тонкий подход, основанный на понятии расщепления алгебр Ли. Пусть L — произвольная конечномерная алгебра Ли над полем k. Далее будет обычно предполагаться, что $k = \mathbb{C}$ (фактически достаточно предполагать, что k — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики). В докладе будет также отмечено, как изменить утверждения доклада, если поле k не обязательно алгебраически замкнуто, но совершенно (например, если $k = \mathbb{R}$).

Через $\mathcal{L}_n(k)$ обозначим пространство n-мерных алгебр Ли над k (образованное компонентами структурных тензоров c_{ij}^k, кососимметричных по нижним индексам и удовлетворяющими следствиям тождества Якоби). На этом пространстве естественным образом действует группа $\mathrm{GL}_n(k)$; орбиты этого действия состоят из всех попарно изоморфных алгебр Ли. Через $\mathcal{R}_n(k)$ обозначим подмножество в $\mathcal{L}_n(k)$, образованное разрешимыми алгебрами Ли.

Пусть теперь N — некоторая нильпотентная алгебра Ли. Через $\mathcal{L}(k, N)$ (или, если это не вызовет недоразумений, сокращенно, $\mathcal{L}(N)$) обозначим подмножество в объединении всех $\mathcal{L}_n(k)$, образованное алгебрами Ли (любой конечной размерности), нильрадикалы которых изоморфны нильпотентной алгебре Ли N. Аналогично определяется подмножество $\mathcal{R}(k, N)$.

Мы будем рассматривать максимальные (в том или ином смысле) элементы множеств $\mathcal{L}(N)$ и $\mathcal{R}(N)$.

Пусть N — некоторая нильпотентная алгебра Ли. С помощью понятия расщепления строится алгебра Ли $H(N)$, лежащая в $\mathcal{R}(N)$. Оказывается, что эта алгебра Ли — весьма важный элемент в $\mathcal{R}(N)$. Алгебра Ли, лежащая в $\mathcal{R}(N)$, называется сильно максимальной, если она не содержится (с точностью до изоморфизма, конечно) ни в какой другой алгебре Ли из $\mathcal{R}(N)$, и d-максимальной, если ее размерность — максимальная в $\mathcal{R}(N)$. Ясно, что из сильной максимальности вытекает d-максимальность. Обратное утверждение, видимо, неверно.

Теорема 1. *Пусть N — произвольная нильпотентная комплексная, конечномерная алгебра Ли, а $R \in \mathcal{R}(N)$. Тогда $\dim R \leqslant \dim H(N)$. Поэтому алгебра Ли $H(N)$ d-максимальна в $\mathcal{R}(N)$ и сильно максимальна в $\mathcal{R}(N)$.*

Будет также показано, что максимальные (в обоих указанных выше смыслах) алгебры Ли в $\mathcal{R}(N)$ не всегда единственны.

Для произвольных (не обязательно разрешимых) алгебр Ли тоже полезно изучать максимальные элементы в $\mathcal{L}(N)$. При этом естественно ограничиться точными алгебрами Ли — у которых нет полупростых прямых слагаемых.

Теорема 2. *Пусть N — произвольная нильпотентная комплексная, конечномерная алгебра Ли, а $L \in \mathcal{L}(N)$ — некоторая точная алгебра Ли. Тогда $\dim L \leqslant \dim H(N)$. Поэтому алгебра Ли $H(N)$ d-максимальна в $\mathcal{L}(N)$ и сильно максимальна в $\mathcal{L}(N)$.*

Существенные сигнатуры и канонические базисы неприводимых представлений группы G_2

А.А. Горницкий
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
gnomage@mail.ru

Рассматриваются представления простых алгебр Ли и вопрос построения «канонического» весового базиса в произвольном неприводимом модуле старшего веса. Э.Б. Винберг предложил метод построения таких базисов путём применения к старшему вектору понижающих операторов, отвечающих всем отрицательным корням, и выдвинул ряд гипотез об их параметризации и структуре. Из работ Фейгина–Фурье–Литтельмана можно вывести истинность этих гипотез для случаев A_n, C_n. Кроме того, гипотезы верны для случая G_2.

Пусть G — односвязная полупростая комплексная алгебраическая группа, $\mathfrak{g}$ — её касательная алгебра Ли. Имеется треугольное разложение

$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^- \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u}^+$, где $\mathfrak{u}^-$ и $\mathfrak{u}^+$ — касательные алгебры отрицательной и положительной максимальных унипотентных подгрупп, а $\mathfrak{t}$ — картановская подалгебра, то есть касательная алгебра максимального тора T в G. Имеем: $\mathfrak{u}^+ = \langle e_\alpha \mid \alpha \in \Delta_+ \rangle$, $\mathfrak{u}^- = \langle e_{-\alpha} \mid \alpha \in \Delta_+ \rangle$, где Δ_+ — система положительных корней, а $e_{\pm\alpha}$ — корневые векторы.

Обозначим неприводимый G-модуль со старшим весом λ через $V(\lambda)$.

Определение 1. *Сигнатурой* назовём набор $\sigma = (\lambda, p_1, \dots, p_N)$, где N — число положительных корней, пронумерованных в определенном порядке (см. ниже): $\Delta_+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$, λ — доминантный вес, $p_i \in \mathbb{Z}_+$.

Обозначение 1. $v(\sigma) = e_{-\alpha_1}^{p_1} \cdot \ldots \cdot e_{-\alpha_N}^{p_N} \cdot v_\lambda$.

Пусть $\omega_1, \dots, \omega_n$ — фундаментальные веса. Рассмотрим стандартный частичный порядок $\prec$ на множестве положительных корней: $\alpha \prec \beta$, если $\beta - \alpha$ — линейная комбинация простых корней с целыми неотрицательными коэффициентами. Перенумеруем положительные корни так, чтобы из $\alpha_j \prec \alpha_i$ следовало $j > i$. Введём порядок на сигнатурах:

1. Вначале введём порядок на доминантных весах $\lambda = \sum k_i \omega_i$, $k_i \in \mathbb{Z}_+$: сравниваем $\sum k_i$, а потом сравниваем наборы $(k_1, \dots, k_n)$ лексикографически. Сперва будем сравнивать сигнатуры по их весам.

2. Затем сравниваем сигнатуры с фиксированным весом λ. Рассмотрим

$$q_i = \sum_{j=1}^{N-i+1} p_j.$$

   Наборы $(q_1, \dots, q_N)$ лексикографически сравниваем.

Определение 2. Сигнатура σ *существенна*, если $v(\sigma) \notin \langle v(\tau) \mid \tau < \sigma \rangle$.

Утверждение 1. *Множество векторов $\{v(\sigma) \mid \sigma$ существенна$\}$ образует базис пространства $V(\lambda)$.*

Утверждение 2. *Существенные сигнатуры образуют полугруппу.*

Рассмотрим убывающую фильтрацию на алгебре $\mathbb{C}[G/U]$, члены которой нумеруются сигнатурами:

$$\mathbb{C}[G/U]^\sigma = \bigoplus_{\mu > \lambda} \mathbb{C}[G]_\mu^{(B)} \oplus \mathbb{C}[G]_\lambda^\sigma, \quad \text{где}$$

$$\mathbb{C}[G]_\lambda^\sigma = \left\{ f_\omega \mid f_\omega|_{U^-} = c \prod t_i^{p_i} + \dots,\ \omega \in V(\lambda^*) \right\}.$$

Многоточие обозначает члены более высокого порядка. Константа c может быть нулём. Рассмотрим присоединённую градуированную алгебру $\operatorname{gr}\mathbb{C}[G/U]$.

Гипотеза 1. *Алгебра* $\operatorname{gr}\mathbb{C}[G/U]$ *порождается как алгебра подпространствами* $\operatorname{gr}\mathbb{C}[G]^{(B)}_{\omega_i}$.

Пусть $\Sigma \subset \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}^N$ — полугруппа существенных сигнатур (здесь $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$ — решётка весов), $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ — конус, натянутый на Σ (линейные комбинации с положительными рациональными коэффициентами).

Гипотеза 2. *Полугруппа* Σ *насыщена, то есть* $\Sigma = \Sigma_{\mathbb{Q}} \bigcap (\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}^N)$.

Гипотеза 3. *Существуют такой набор подмножеств* $M_i \subset \{1, \ldots, N\}$ *и такой набор элементов картановской подалгебры* $l_i \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}$, *что множество существенных сигнатур* $\sigma = (\lambda, p_1, \ldots, p_N)$ *задается неравенствами*

$$\sum_{j \in M_i} p_j \leqslant \lambda(l_i).$$

Основная теорема 1. *Гипотезы* 1–3 *верны для особой простой группы Ли* $G = G_2$.

Список литературы

[1] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann. PBW filtration and bases for irreducible modules in type A_n. Transformation Groups **165** (2011), no. 1, 71–89.
[2] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann. PBW filtration and bases for symplectic Lie algebras. Int. Math. Res. Not. IMRN 2011, no. 24, 5760–5784.
[3] E.B. Vinberg. On some canonical bases of representation spaces of simple Lie algebra, conference talk, Bielefeld, 2005.

Простые лиевы Γ-конформные алгебры конечного типа для группы Γ без кручения

В.Ю. Губарев
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
`vsevolodgu@mail.ru`

Доклад является продолжением работы [1].

Определение 1. [3] Пусть задана группа Γ. Левый $\Bbbk\Gamma$-модуль A, снабжённый множеством $\{\cdot_{(\gamma)}\cdot \mid \gamma \in \Gamma\}$ билинейных операций, называется Γ-*конформной алгеброй Ли*, если для любых $a, b \in A$ и $\alpha, \gamma \in \Gamma$ выполняются следующие аксиомы:

(Г1) $a_{(\delta)}b = 0$ для почти всех $\delta \in \Gamma$;
(Г2) $\alpha a_{(\gamma)}b = a_{(\gamma\alpha)}b$;
(Г3) $a_{(\alpha)}b = -\alpha(b_{(\alpha^{-1})}a)$;
(Г4) $a_{(\alpha)}(b_{(\beta)}c) = (a_{(\alpha\beta^{-1})}b)_{(\beta)}c + b_{(\beta)}(a_{(\alpha)}c)$.

Из (Г2) и (Г3) следует
(Г5) $a_{(\gamma)}\alpha b = \alpha(a_{(\alpha^{-1}\gamma)}b)$.

В [3] показано, что Г-конформная алгебра Ли A — это то же самое, что обычная алгебра Ли, на которой группа Г действует автоморфизмами, и при этом для любых $a, b \in A$ выполнено $[\gamma a, b] = 0$ для почти всех $\gamma \in \Gamma$.

Г-конформная алгебра A называется *простой*, если соответствующая ей обычная алгебра Ли $(A, [\cdot,\cdot])$ не содержит ненулевых собственных Г-инвариантных идеалов и $[A, A] = A$; A называется *алгеброй конечного типа*, если она конечно порождена как $\Bbbk\Gamma$-модуль.

Пример 1. Рассмотрим для произвольной алгебры A пространство $\Bbbk\Gamma \otimes_{\Bbbk} A$ с γ-произведениями, заданными по правилу $(1\otimes a)_{(\gamma)}(1\otimes b) = 1\otimes(ab)$, если $\gamma = e$, и 0 в противном случае. Распространяя действие $\gamma \in \Gamma$ на пространство $\Bbbk\Gamma \otimes_{\Bbbk} A$ по (Г2), (Г5), зададим на нём структуру Г-конформной алгебры. Полученную алгебру обозначим как $\mathrm{Cur}(A)$.

Теорема 1. *Пусть A — простая Г-конформная алгебра Ли конечного типа для группы Г без кручения. Тогда $A \cong \mathrm{Cur}(\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли над $\Bbbk$.*

Определение 2. [3] *Модулем* над Г-конформной алгеброй R называется такой $\Bbbk\Gamma$-модуль M с линейным отображением $a \to a^M_{(\alpha)}$ из R в $\mathrm{End}_{\Bbbk} M$ для каждого $\alpha \in \Gamma$, что выполняются следующие свойства для любых $a, b \in R$, $\alpha, \beta \in \Gamma$:
(M1) $a^M_{(\alpha)}v = 0$ для $v \in M$ и почти всех α;
(M2) $(\alpha a)^M_{\beta)} = a^M_{(\beta\alpha)}$;
(M3) $a^M_{(\beta)}\alpha = \alpha a^M_{(\alpha^{-1}\beta)}$;
(M4) $[a^M_{(\alpha)}, b^M_{(\beta)}] = (a_{(\beta^{-1}\alpha)}b)^M_{(\beta)}$.

Пусть A — Г-конформная алгебра Ли, тогда A-модуль M *конечного ранга*, если он конечно порождён над $\Bbbk\Gamma$; M *неприводим*, если он не содержит собственных A-подмодулей.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, U — $\mathfrak{g}$-модуль. Тогда пространство $\mathrm{Cur}(U) = \Bbbk\Gamma \otimes_{\Bbbk} U$ наделяется структурой $\mathrm{Cur}(\mathfrak{g})$-модуля относительно действия, заданного следующим образом: $a_{(e)}u = au$, $a_{(\gamma)}u = 0$ для $\gamma \neq e$, $a \in \mathfrak{g}$, $u \in U$.

Теорема 2. *Пусть $A \cong \mathrm{Cur}(\mathfrak{g})$ — простая Γ-конформная алгебра Ли конечного типа для группы Γ без кручения, M — неприводимый A-модуль конечного ранга. Тогда $M = \mathrm{Cur}(U)$, где U — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль.*

Список литературы

[1] В.Ю. Губарев. Простые ассоциативные Γ-конформные алгебры конечного типа для группы Γ без кручения. Алгебра и логика **52** (2013), no. 5, 559–581.
[2] П.С. Колесников. О неприводимых алгебрах конформных эндоморфизмов над линейной алгебраической группой. Современная математика и её приложения **60** (2008), 42–56.
[3] M.I. Golenishcheva-Kutuzova, V.G. Kac. Γ-conformal algebras. J. Math. Phys. **39** (1998), no. 4, 2290–2305.

Свойства фактор отображения моментов симплектических многообразий с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями

В.С. Жгун[1], Д.А. Тимашёв[2]
[1]Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, Москва, Россия,
[2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
[1]`zhgoon@mail.ru`, [2]`timashev@mccme.ru`

В настоящем докладе, основанном на работе [1], мы приведём новые результаты о геометрии гамильтоновых многообразий (а именно, симплектических многообразий, снабжённых действием редуктивной группы и отображением моментов), содержащих инвариантные лагранжевы подмногообразия (такие многообразия исследовались например в [4]). Основным результатом является обобщение теоремы Ф. Кнопа о равноразмерности фактор отображения моментов для кокасательных расслоений к многообразиям с действием редуктивной группы.

Также будет приведено новое доказательство того, что малая группа Вейля порождена отражениями.

Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ нулевой характеристики. Обозначим через B борелевскую подгруппу в G, через U — унипотентный радикал B, через T — максимальный тор в B. Алгебры Ли этих и других групп мы будем обозначать соответствующими готическими буквами. Нам понадобится группа Вейля $W = N_G(T)/T$.

Пусть M — симплектическое G-многообразие с формой ω. Многообразие M называется *гамильтоновым*, если существует такое G-эквивариантное отображение $\Phi\colon M \to \mathfrak{g}^*$, называемое *отображением моментов*, что для $\xi \in \mathfrak{g}$, рассматриваемого как линейная функция на $\mathfrak{g}^*$, косой градиент его обратного образа $\Phi^*\xi \in \Bbbk[M]$ является полем скоростей ξ_*. Это эквивалентно условию: $\langle d_x\Phi(\nu), \xi\rangle = \omega(\xi x, \nu)$, $\forall x \in M$, $\nu \in T_xM$, $\xi \in \mathfrak{g}$, где ξx — вектор скорости ξ в точке x. Также нас будет интересовать факторизованное отображение моментов $\Phi_{/\!\!/G}\colon M \to \mathfrak{g}^*/\!\!/G \cong \mathfrak{t}^*/W$, полученное как композиция отображения моментов и последующего категорного фактора π_G по действию группы G.

Основным результатом доклада является следующая теорема.

Теорема. *Пусть M — гамильтоново G-многообразие, обладающее G-инвариантным лагранжевым подмногообразием $S \subset M$. Тогда вне G-инвариантного подмногообразия в M коразмерности $\geqslant 2$ отображение $\Phi_{/\!\!/G}$ равноразмерно.*

Для доказательства были использованы результаты, доказанные в работе [4] (см. также [2]), которые для удобства читателя мы сформулируем в виде одной теоремы.

Теорема. *Пусть M — гамильтоново G-многообразие, $S \subset M$ — G-инвариантное лагранжево подмногообразие. Пусть $P \supset B$ — нормализатор типичной B-орбиты в S, а P_0 — нормализатор типичной U-орбиты в S. Тогда $\overline{\Phi(M)} = G\mathfrak{p}_0^{\perp}$, причем существует такая компонента $\mathcal{W}$ многообразия $\Phi^{-1}(\mathfrak{p}_0^{\perp})$, что $G\mathcal{W}$ плотно в M, а морфизм действия $G *_P \mathcal{W} \to M$ является рациональным накрытием.*

Список литературы

[1] В.С. Жгун, Д.А. Тимашёв. Свойства фактор отображения моментов симплектических многообразий с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями, препринт.

[2] В.С. Жгун, Д.А. Тимашёв. Симплектические многообразия с инвариантными лагранжевыми подмногообразиями. Доклады Академии наук **443** (2012), 418–421.

[3] F. Knop. Weylgruppe und Momentabbildung. Invent. Math. **99** (1990), no. 1, 1–23.

[4] D.A. Timashev, V.S. Zhgoon. Hamiltonian actions on symplectic varieties with invariant Lagrangian subvarieties, см. arXiv: `math.SG/1109.5239`.

Центрально порождённые идеалы универсальных обёртывающих алгебр локально нильпотентных алгебр Ли

М.В. Игнатьев

Самарский государственный университет, Самара, Россия

mihail.ignatev@gmail.com

Оригинальный метод орбит А.А. Кириллова описывает в терминах орбит коприсоединённого действия унитарные неприводимые представления нильпотентных групп Ли [2]. Его алгебраическая версия, позволяющая описать примитивные идеалы универсальных обёртывающих алгебр нильпотентных конечномерных алгебр Ли, принадлежит, по существу, Ж. Диксмье [1, Теорема 6.2.4]; ключевой ингредиент здесь — так называемое отображение Диксмье (см. ниже). В докладе обсуждается перенос конструкции отображения Диксмье на случай бесконечномерных локально нильпотентных алгебр Ли.

Пусть $\mathfrak{n}$ — комплексная конечномерная нильпотентная алгебра Ли, $U(\mathfrak{n})$ — её универсальная обёртывающая алгебра, $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{n})$ — множество примитивных идеалов этой алгебры (то есть аннуляторов её неприводимых представлений). Выберем произвольную линейную форму $f \in \mathfrak{n}^*$ и любую её поляризацию $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{n}$ (то есть подалгебру, являющуюся одновременно максимальным f-изотропным подпространством). Рассмотрим представление алгебры $\mathfrak{n}$, индуцированное с одномерного представления подалгебры $\mathfrak{p}$ вида $x \mapsto f(x)$. Это представление всегда будет неприводимым; его аннулятор $J = J_f$ зависит только от выбора формы f; возникающее отображение

$$D\colon \mathfrak{n}^* \to \operatorname{Prim} U(\mathfrak{n})\colon f \mapsto J_f$$

называется *отображением Диксмье.*

Оказывается, что отображение Диксмье сюръективно, причём $J_f = J_{f'}$ тогда и только тогда, когда формы f и f' лежат на одной коприсоединённой N-орбите (здесь N — связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{n}$). Другими словами, существует биекция между $\mathfrak{n}^*/N$ и $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{n})$. Более того, в случае, когда $\mathfrak{n}$ — это алгебра всех строго верхнетреугольных матриц размера $n \times n$, можно показать, что примитивный идеал будет центрально порождён тогда и только тогда, когда он соответствует регулярной орбите. Напомним, что идеал называется *центрально порождённым*, если он порождается как идеал своим пересечением с центром $Z(\mathfrak{n})$ алгебры $U(\mathfrak{n})$, а *регулярная* орбита — это орбита максимально возможной размерности.

В работах И. Пенкова, В. Сергановой, И. Димитрова, А.В. Петухова и др. изучалась структура бесконечномерных алгебр Ли, являющихся прямыми пределами простых алгебр Ли относительно естественных вложений, в частности, идеалы в их универсальных обёртывающих алгебрах (см., к примеру, [3], [4], [5]). Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли всех *финитарных* матриц, то есть прямой предел естественно вложенных друг в друга алгебр $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Обозначим через $\mathfrak{n}$ подалгебру Ли в $\mathfrak{g}$, натянутую на матричные единицы $e_{i,j}$, $i \succ j$. Через $\succ$ обозначен частичный порядок на $\mathbb{N}$ вида

$$1 \succ 3 \succ 5 \succ \ldots \succ 6 \succ 4 \succ 2.$$

С определённой точки зрения именно эта алгебра является естественным аналогом алгебры строго треугольных матриц в конечномерном случае. В частности, её универсальная обёртывающая алгебра имеет нетривиальный центр, который удаётся описать: как и в конечномерном случае, он порождается так называемыми *минорами Костанта.*

Для каждого k обозначим через $\mathfrak{n}_k$ подалгебру в $\mathfrak{n}$, натянутую на $e_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2k$, $i \succ j$; она изоморфна алгебре строго верхнетреугольных матриц размера $2k \times 2k$. Назовём форму $f \in \mathfrak{n}^*$ *регулярной*, если коприсоединённая орбита её ограничения f_k на $\mathfrak{n}_k$ регулярна для всех k. Коприсоединённая орбита группы $N = \exp \mathfrak{n}$, состоящая из регулярных форм, называется *регулярной.* На каждой регулярной орбите лежит ровно одна *каноническая форма* f_ξ; её значения на $e_{1,2}$, $e_{3,4}$, … равны фиксированным ненулевым константам $\xi_{1,2}$, $\xi_{3,4}$, …, а на остальных матричных единицах равны нулю. Обозначим через $\mathfrak{p}$ подалгебру в $\mathfrak{n}$, натянутую на все $e_{i,j}$, $i \leqslant j$, i нечётно. Она будет поляризацией для f_ξ при любом ξ, причём представление $\mathfrak{n}$, индуцированное с одномерного представления $x \mapsto f_\xi(x)$ подалгебры $\mathfrak{p}$, будет неприводимым. Наконец, обозначим через J_ξ его аннулятор.

Теорема. *Примитивный идеал в алгебре $U(\mathfrak{n})$ будет центрально порождённым тогда и только тогда, когда он имеет вид J_ξ для какого-нибудь ξ.*

Доклад основан на совместной работе с И. Пенковым. Автор был поддержан фондом Дмитрия Зимина «Династия» и грантом РФФИ 14–01–31052–мол_а.

Список литературы

[1] Ж. Диксмье. Универсальные обёртывающие алгебры. М., Мир, 1978.
[2] А.А. Кириллов. Унитарные представления нильпотентных групп Ли. УМН **57** (1962), 57–110.
[3] I. Dimitrov, I. Penkov. Borel subalgebras of $\mathfrak{gl}(\infty)$. Resenhas IME–USP **6** (2004), 111–119.

[4] I. Penkov, A.V. Petukhov. On ideals in the enveloping algebra of a locally simple Lie algebra, see arXiv: `math.AG/1210.0466`.
[5] I. Penkov, V. Serganova. Categories of integrable $\mathfrak{sl}(\infty)$-, $\mathfrak{o}(\infty)$-, $\mathfrak{sp}(\infty)$-modules. In: Representation Theory and Mathematical Physics. Contemporary Mathematics **557**, AMS, 2011, 335–357.

Транзитивность групп автоморфизмов квазиоднородных поверхностей

С.А. Коваленко
Фрайбургский университет Альберта и Людвига, Фрайбург, Германия
sergei.kovalenko@math.uni-freiburg.de

Доклад основан на работе автора [2].

Квазиоднородной аффинной поверхностью мы называем определённую над алгебраически замкнутым полем k нормальную алгебраическую поверхность V, которая содержит некоторую точку $x_0 \in V$, для которой множество $O := \{\varphi(x_0) \mid \varphi \in \mathrm{Aut}(V)\}$ имеет конечное дополнение. Множество O называется большой орбитой группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(V)$ поверхности V. Для всех поверхностей кроме $V = k^* \times k^*$, это свойство равносильно тому, что поверхность V пополняется до поверхности X *зигзагом*, то есть кривой вида $D = \bigcup_0^n C_i$, где C_i — гладкие рациональные кривые и $C_i.C_j = 1$ для $|i-j| = 1$ и $C_i.C_j = 0$ для $|i-j| > 1$.

Автор работы [1] сформулировал следующую гипотезу:

Гипотеза. (М.Х. Гизатуллин, [1])[1] *Если основное поле k имеет характеристику 0, то квазиоднородная аффинная поверхность V однородна, то есть $O = V$.*

Мы приведём класс примеров гладких квазиоднородных, но не однородных поверхностей. В некоторых частных случаях мы даже дадим полное разложение поверхности V на орбиты действия группы $\mathrm{Aut}(V)$. Далее, мы покажем, что группа автоморфизмов этих поверхностей может быть записана как амальгамированное произведение двух подгрупп.

Список литературы

[1] М.Х. Гизатуллин. Квазиоднородные аффинные поверхности. Изв. АН СССР. Сер. матем. **35** (1971), no. 5, 1047–1071.

[1] М.Х. Гизатуллин проинформировал автора, что примеры таких поверхностей уже были найдены в 1973 г., но не были опубликованы. Их нашли В.И. Данилов и М.Х. Гизатуллин.

[2] S. Kovalenko. Transitivity of automorphism groups of Gizatullin surfaces, см. arXiv: `math.AG/1304.7116` (2013).

Свободное ассоциативное кольцо, рассматриваемое как кольцо Ли

А.Н. Красильников
Университет Бразилиа, Бразилиа, Бразилия
alexei@unb.br

Доклад основан на работе докладчика [4] и на работе [1], совместной с Г. Дерябиной.

Пусть A — свободная ассоциативная алгебра над K. Положим $L_1 = A$, $L_{n+1} = [L_n, A]$ для $n > 0$. Тогда $L_1 > L_2 > L_3 > \dots$ — нижний центральный ряд алгебры A, рассматриваемой как алгебра Ли.

Первые значительные результаты о факторах L_n/L_{n+1} при $K = \mathbb{C}$ были получены в [3]. Для $K = \mathbb{Z}$ факторы L_n/L_{n+1} и связанные с ними факторы M_n/M_{n+1}, где $M_n = AL_nA = AL_n$, впервые изучались в [2]. В частности, в [2] показано, что аддитивная группа факторкольца A/M_3 — свободная абелева.

Теорема. *При $K = \mathbb{Z}$ аддитивная группа факторкольца A/M_4 является прямой суммой $B \oplus C$ свободной абелевой группы B и элементарной абелевой 3-группы C.*

Более точно, пусть I — двусторонний идеал в A, порождённый L_4 и всеми элементами $[a_1, a_2]\big[[a_3, a_4], a_5\big]$ $(a_i \in A)$. Тогда $C = I/M_4$, а группа B изоморфна аддитивной группе факторкольца A/I.

Следствие. *Пусть $x_1, \dots, x_5$ — различные свободные порождающие A. Тогда $\big[x_1\big[[x_2, x_3], x_4\big], x_5\big] + L_4$ — элемент порядка 3 в L_3/L_4.*

Список литературы

[1] S. Bhupatiraju, P. Etingof, D. Jordan, W. Kuszmaul, J. Li. Lower central series of a free associative algebra over the integers and finite fields. J. Algebra **372** (2012), 251–274, см. также arXiv: `math.RA/1203.1893`.
[2] G. Deryabina, A. Krasilnikov. The torsion subgroup of the additive group of a Lie nilpotent associative ring of class 3, см. arXiv: `math.RA/1308.4172` (2013).
[3] B. Feigin, B. Shoikhet. On $[A, A]/[A, [A, A]]$ and on a W_n-action on the consecutive commutators of free associative algebras. Mathematical Research Letters **14** (2007), 781–795, см. также arXiv: `math/0610410`.
[4] A. Krasilnikov. The additive group of a Lie nilpotent associative ring. J. Algebra **392** (2013), 10–22, см. также arXiv: `math.RA/1204.2674`.

Классификация упругих линейных неприводимых представлений компактных связных групп Ли

М.В. Мещеряков
Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва, Саранск, Россия
mesh@math.mrsu.ru

В докладе будет дано описание неприводимых компактных связных линейных подгрупп Ли G, являющихся упругими подмногообразиями (`taut submanifolds`) в соответствующем пространстве матриц, то есть таких подгрупп, что все их матричные элементы суть совершенные функции Морса–Ботта на G относительно поля вычетов $\mathbb{Z}_2$.

Теорема. *Среди всех компактных связных неприводимых подгрупп* $G \subset U_n(F)$ *классические унитарные матричные группы* $U_n(F)$, *где* $F = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, *стандартно вложенные в пространство матриц* $\mathrm{Mat}_n(F)$, *и только они, являются упругими подмногообразиями.*

Это утверждение дополняет некоторым образом определённые результаты работ [1], [2], [3].

Список литературы

[1] А.П. Веселов, И.А. Дынников. Интегрируемые градиентные потоки и теория Морса. Алгебра и анализ **8** (1996), no. 3, 78–103.

[2] М.В. Мещеряков. Морсовские свойства матричных элементов неприводимых линейных представлений связных компактных групп Ли. XLI Огаревские чтения: материалы научн. конф. в 3 ч. Ч. 2. Естественные науки. Саранск, Изд-во Мордов. ун-та, 2013, с. 152–158.

[3] C. Gorodski, G. Thorbergsson. The classification of taut irreducible representations. J. Reine Angew. Math. B. **555** (2003), 187–235.

[4] C. Gorodski. Taut representations of compact simple Lie groups. Illinois J. Math. **52** (2008), no. 1, 121–143.

Равнохарактеристический случай гипотезы Герстена для пучков с трансферами

А.А. Мингазов
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия
alexander.molev@sydney.edu.au

Используя методы статьи [1], мы доказываем следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок с трансферами, R — локальное регулярное равнохарактеристическое кольцо, K — его поле частных. Обозначим $X = Spec\ R$ и $X^{(i)}$ — точки схемы X коразмерности i. Тогда комплекс Герстена*

$$0 \to \mathcal{F}(R) \to \mathcal{F}(K) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathcal{F}_{-1}(k(x)) \to \bigoplus_{y \in X^{(2)}} \mathcal{F}_{-2}(k(y)) \to \dots$$

точен.

В доказательстве мы даем определение дифференциала в комлексе Герстена независимо от статьи [3]. Для отождествления полученного комплекса с комплексом Кузена мы используем трансферы для проективных морфизмов в мотивах гладких многообразий. Трансферы строятся аналогично статье [2].

Список литературы

[1] I.A. Panin. The equicharacteristic case of the Gersten Conjecture. Теория чисел, алгебра и алгебраическая геометрия. Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика И.Р. Шафаревича. Труды МИАН **241**. М., Наука, 2003, 169–178.
[2] I. Panin, A. Smirnov. Oriented cohomology theories of algebraic varieties II. K-Theory **30** (2003), 265–314.
[3] V. Voevodsky. Cohomology theory of presheaves with transfers, preprint (1995).

Дифференциальные центральные расширения SL_2

А.Н. Минченко
Институт Вайцмана, Реховот, Израиль
an.minchenko@gmail.com

Доклад частично основан на работе автора [1].

Дифференциальные алгебраические группы определяются аналогично алгебраическим, только вместо полиномов используются дифференциальные полиномы. Алгебраические группы могут рассматриваться как частный случай дифференциальных. Например, дифференциальное уравнение $y''y - (y')^2 = 0$ задает дифференциальную подгруппу в GL_1: если k — дифференциальное поле, то ненулевые решения этого уравнения в k образуют группу по умножению. Можно рассматривать дифференциальные группы относительно нескольких коммутирующих дифференцирований. Такие группы возникают как группы Галуа линейных дифференциальных уравнений с параметрами.

Известно, что все центральные расширения $G \to \mathrm{SL}_2$ алгебраических групп расщепляются. Мы увидим на примере, что подобное неверно для дифференциальных алгебраических групп.

Теорема. *Ядро универсального центрального расширения* SL_2 *в категории дифференциальных алгебраических групп над дифференциальным полем с* m *различными коммутирующими дифференцированиями изоморфно векторной группе размерности* $\frac{m(m-1)}{2}$.

Список литературы

[1] A. Minchenko. On central extensions of simple differential algebraic groups, см. arXiv: `math.AC/1401.0522` (2014).

Проблема Винберга для классических алгебр Ли

А.И. Молев

Университет Сиднея, Сидней, Австралия

`alexander.molev@sydney.edu.au`

Для каждой простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ классического типа и регулярного элемента $\mu \in \mathfrak{g}^*$ в явном виде построены алгебраически независимые семейства образующих в максимальной коммутативной подалгебре $\mathcal{A}_\mu$ универсальной обёртывающей алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Подалгебры $\mathcal{A}_\mu$ были построены в работах Рыбникова (2006) и Фейгина–Френкеля–Толедано Ларедо (2010) с использованием центров аффинных вертексных алгебр на критическом уровне. В этих работах показано, что алгебры $\mathcal{A}_\mu$ являются квантованиями подалгебр Мищенко–Фоменко и, тем самым, дают решение проблемы Винберга (1990).

Некоммутативные законы взаимности на двумерных арифметических схемах

Д.В. Осипов
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
d_osipov@mi.ras.ru

Доклад основан на работах автора [1], [2].

Пусть X — нормальная алгебраическая поверхность над конечным полем $\mathbb{F}_q$.

Пусть $\mathbb{A}_X$ — кольцо аделей Паршина–Бейлинсона поверхности X. По определению имеем $\mathbb{A}_X \subset \prod_{x \in C} K_{x,C}$, где $x \subset C$ пробегает все пары: точка x и неприводимая кривая $C \ni x$ на X, а кольцо $K_{x,C}$ есть конечное произведение двумерных локальных полей, где каждое двумерное локальное поле неканонически изоморфно полю итерированных рядов Лорана $\mathbb{F}_{q'}((u))((t))$.

Пусть целое $n \geqslant 2$. Канонически строится центральное расширение групп

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widehat{GL_n(\mathbb{A}_X)} \longrightarrow GL_n(\mathbb{A}_X) \longrightarrow 1, \qquad (1)$$

которое при ограничении на группы $GL_n(\mathbb{F}_{q'}((u))((t)))$ не расщепляется и соответствует неразветвленной локальной двумерной теории полей классов (здесь подгруппа $GL_n(\mathbb{F}_{g'}((u))((t)))$ вложена в группу $GL_n(\mathbb{A}_X)$ при помощи вложения локальной компоненты $K_{x,C}$ в кольцо аделей $\mathbb{A}_X$).

Пусть $a \in \mathbb{F}_q(X)^*$ любой элемент. Канонически строится центральное расширение групп

$$1 \longrightarrow \mathbb{F}_q^* \longrightarrow \widehat{GL_{n,a}(\mathbb{A}_X)} \longrightarrow GL_n(\mathbb{A}_X) \longrightarrow 1,$$

которое при ограничении на группы $GL_n(\mathbb{F}_{q'}((u))((t)))$ не расщепляется и соответствует локальной двумерной теории полей классов для куммеровых расширений (здесь подгруппа $GL_n(\mathbb{F}_{g'}((u))((t)))$ вложена в группу $GL_n(\mathbb{A}_X)$ при помощи вложения локальной компоненты $K_{x,C}$ в кольцо аделей $\mathbb{A}_X$).

Для любой точки $x \in X$ определим подкольцо $K_x = \mathbb{F}_q(X) \cdot \hat{\mathcal{O}}_x$ внутри кольца $\mathrm{Frac}\,\hat{\mathcal{O}}_x$. Для любой неприводимой кривой $C \subset X$ определим поле K_C как пополнение поля рациональных функций $\mathbb{F}_q(X)$ по дискретному нормированию, задаваемому кривой C.

Теорема. *Центральные расширения $\widehat{GL_n(\mathbb{A}_X)}$ и $\widehat{GL_{n,a}(\mathbb{A}_X)}$ канонически расщепляются над следующими подгруппами группы $GL_n(\mathbb{A}_X)$:* 1) *над $GL_n(K_x)$, где x — любая точка на X;* 2) *над $GL_n(K_C)$, где C — любая неприводимая кривая на X;* 3) *над $GL_n(\mathbb{F}_q(X))$ в случае, если X проективна.*

В [1] доказан также аналог этой теоремы для арифметической поверхности X (то есть для нормальной двумерной схемы конечного типа над $\mathbb{Z}$, так что X сюрьективно отображается на $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$) и для аналога центрального расширения (1), где группу $\mathbb{Z}$ в ядре точной последовательности (1) надо заменить на группу $\mathbb{R}_+^*$. При этом надо рассматривать также группы $GL_n(\mathbb{R}((t)))$ и $GL_n(\mathbb{C}((t)))$, возникающие из локальных архимедовых компонент арифметического кольца аделей схемы X.

Сформулированная выше теорема обобщается также на случай нормальной алгебраической поверхности, определённой над произвольным совершенным полем k, см. [2].

Список литературы

[1] Д.В. Осипов. Неразветвленное двумерное соответствие Ленглендса. Изв. РАН. Сер. матем. **77** (2013), вып. 4, 73–102, см. также arXiv: `math.AG/1210.3780`.

[2] Д.В. Осипов. Некоммутативные законы взаимности на алгебраических поверхностях: случай ручного ветвления. Матем. сб. **204** (2013), вып. 12, 105–118, см. также arXiv: `math.AG/1307.1995`.

Инварианты базисных многообразий

А.Н. Панов

Самарский государственный университет, Самара, Россия

apanov@list.ru

Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль, $N = \mathrm{UT}(n, K)$ — группа верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали, $\mathfrak{n}$ — её алгебра Ли, $\mathfrak{n}^*$ — сопряжённое пространство к $\mathfrak{n}$, реализованное как подпространство нижнетреугольных матриц с нулями по диагонали. На $\mathfrak{n}$ определено лево-правое представление группы $N \times N$. Соответствующее представление в $\mathfrak{n}^*$ будем также называть лево-правым; *базисные многообразия* — орбиты этого представления [1], [2].

Пусть D — подмножество типа расстановки ладей в множестве положительных корней $\Delta^+ = \{(i,j) \mid n \geqslant i > j \geqslant 1\}$, $\varphi\colon D \to K^*$ и $V_{D,\varphi}$ — лево-правая орбита группы $N \times N$ элемента $\sum_{\eta\in D} \varphi(\eta) E_\eta$. Известно [1], [2], что всякое базисное многообразие имеет вид $V_{D,\varphi}$ для некоторых D и φ. *Базисный конус* V_D — замыкание объединения $V_{D,\varphi}$ по всем $\varphi : D \to K^*$. Элемент группы Вейля w назовем *однородным*, если пересечение многообразия Шуберта X_w с главной аффинной окрестностью $N_-B \bmod B$ является конусом с центром в начальной точке $p = B \bmod B$.

Теорема 1. *Базисные конусы — это в точности касательные конусы для однородных элементов группы Вейля.*

Для данного D обозначим соответствующий однородный элемент через w_D. Упорядочим множество положительных корней: $(i,j) \succ (a,b)$, если $i > a$ или $i = a$ и $j < b$.

Теорема 2. *Расширим D до $C(D) = \{\xi_1 \succ \ldots \succ \xi_c\} \subset \Delta^+$, где*
1) $r_{\xi_1} \ldots r_{\xi_i}(\xi_j) > 0$ *для всех* $1 \leqslant i < j$;
2) *либо* $\xi_j \in D$, *либо корень* ξ_j *является* D*-сингулярным*;
3) ξ_j *— наибольший корень, удовлетворяющий* 1) *и* 2).
Тогда $w_D = r_{\xi_1} \ldots r_{\xi_c}$.

Теорема 3. *Поле инвариантов коприсоединённого представления группы N на базисном конусе V_D (соотв., на базисном многообразии $V_{D,\varphi}$) является чисто трансцендентным расширением поля K степени $|C(D)|$ (соотв., степени $|C(D)| - |D|$).*

Список литературы

[1] C.A.M. André. Basic characters of the unitriangular group. J. Algebra **175** (1995), no. 1, 287–319.
[2] N. Yan. Representation theory of finite unipotent linear groups. Ph.D. thesis. Department of Math., University of Pennsylvania, 2001, см. также arXiv: `math.RT/1004.2674`.

Комплексная геометрия момент-угол-многообразий

Т.Е. Панов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

tpanov@mech.math.msu.su

Момент-угол-комплексы $\mathcal{Z}_K$ представляют собой пространства с действием тора, параметризуемые конечными симплициальными комплексами K. Они являются одними из основных объектов исследования в торической топологии.

В случае, когда K — триангуляция сферы, $\mathcal{Z}_K$ является топологическим многообразием, называемым *момент-угол-многообразием*. Триангуляции, двойственные к простым многогранникам P, предоставляют важный класс триангуляций сфер; соответствующие момент-угол-многообразия являются гладкими и обозначаются $\mathcal{Z}_P$. Многообразия $\mathcal{Z}_P$ тесно связаны с конструкцией *гамильтоновых торических многообразий* при помощи симплектической редукции: $\mathcal{Z}_P$ возникает как множество уровня отображения моментов и вкладывается в $\mathbb{C}^m$ как невырожденное пересечение вещественных квадрик. Топология пространств $\mathcal{Z}_K$ и многообразий $\mathcal{Z}_P$ достаточно сложна даже для простых K и P.

Такие пересечения квадрик также возникали в голоморфной динамике как пространства листов голоморфных слоений в $\mathbb{C}^m$. Их изучение привело к открытию нового класса компактных некэлеровых комплексных многообразий, известных как *LVM-многообразия*. Как было обнаружено Босио и Мерсманом, гладкие многообразия, соответствующие широкому классу LVM-многообразий, представляют собой в точности момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_P$. Тем самым многообразия $\mathcal{Z}_P$ приобретают некэлеровы комплексные структуры, обобщающие известные семейства *многообразий Хопфа* и *Калаби–Экмана*.

Мы строим и изучаем комплексные структуры на более широком классе момент-угол-многообразий $\mathcal{Z}$, соответствующих *полным симплициальным веерам*.

В случае рациональных вееров многообразие $\mathcal{Z}$ является пространством голоморфного расслоения над торическим многообразием со слоем голоморфный (компактный) тор. Спектральные последовательности Бореля и Фрёлихера этого расслоения вырождаются в члене E_3, что приводит к описанию когомологий Дольбо многообразия $\mathcal{Z}$.

В общем (нерациональном) случае многообразие $\mathcal{Z}$ снабжено каноническим голоморфным слоением $\mathcal{F}$ и действием алгебраического тора, транзитивным в трансверсальном направлении к слоению. Мы строим трансверсально кэлеровы метрики на $\mathcal{Z}$. При помощи них доказывается, что все кэлеровы подмногообразия в $\mathcal{Z}$ лежат в голоморфном торе, содержащемся в листе слоения $\mathcal{F}$. При условии общности комбинаторных данных, задающих комплексную структуру, мы доказываем, что любое аналитическое подмножество в $\mathcal{Z}$ является момент-угол-многообразием меньшей размерности. В частности, имеется лишь конечное число аналитических подмножеств, что радикально отличает многообразия $\mathcal{Z}$ от комплексных многообразий, возникающих в алгебраической геометрии.

Доклад основан на совместных работах с М. Вербицким и Ю. Устиновским.

Список литературы

[1] T. Panov, Yu. Ustinovsky. Complex-analytic structures on moment-angle manifolds. Moscow Math. J. **12** (2012), no. 1, 149–172.

[2] T. Panov, Yu. Ustinovsky. M. Verbitsky. Complex geometry of moment-angle manifolds, см. arXiv: `math.CV/1308.2818` (2013).

О люстиговском q-аналоге кратности веса
Д.И. Панюшев
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия
panyushev@iitp.ru

Доклад основан на моей работе [1].

Пусть G — комплексная связная полупростая алгебраическая группа с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и T — максимальный тор в борелевской подгруппе B. Если $\mathbb{V}_\lambda$ — простой конечномерный G-модуль со старшим весом λ и $\mathbb{V}_\lambda = \oplus_{\mu\in\mathfrak{t}^*}\mathbb{V}_\lambda^\mu$ — весовое разложение относительно T, то $m_\lambda^\mu = \dim(\mathbb{V}_\lambda^\mu)$. В докладе будет рассказано о люстиговских q-аналогах $\mathfrak{M}_\lambda^\mu(q)$ кратности веса m_λ^μ. Многочлены $\mathfrak{M}_\lambda^\mu(q)$ определяются алгебраически через знакопеременное суммирование по группе Вейля, при помощи q-аналога функции разбиения Костанта. При этом $\mathfrak{M}_\lambda^\mu(q)|_{q=1} = m_\lambda^\mu$. Первоначально, Люстиг (1983) определял q-аналоги только для доминантных весов μ. Однако это ограничение несущественно и многочлены $\mathfrak{M}_\lambda^\mu(q)$ можно рассматривать для всех μ таких, что $\lambda-\mu$ есть линейная комбинация простых корней с неотрицательными коэффициентами; в частности, для всех весов представления $\mathbb{V}_\lambda$. Люстиговские q-аналоги возникают в различных задачах теории представлений и теории инвариантов. Известно, что $\mathfrak{M}_\lambda^\mu(q)$ имеет неотрицательные коэффициенты, если μ – доминантный вес. Кроме того, если $\mathbb{V}_\lambda$ имеет нулевой вес и $m_\lambda^0 = n$, то $\mathfrak{M}_\lambda^0(q) = \sum_{i=1}^n q^{m_i(\lambda)}$, где $m_1(\lambda), \dots, m_n(\lambda)$ – *обобщенные показатели* представления $\mathbb{V}_\lambda$. Обобщенные показатели были введены Костантом (1963) в связи с изучением структуры градуированного G-модуля $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$, где $\mathcal{N} \subset \mathfrak{g}$ – это конус нильпотентных элементов. Новые результаты, о которых я собираюсь рассказать, состоят в следующем.

(A) Для простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, со старшим корнем θ, мы вычислим многочлены $\mathfrak{M}_\lambda^\mu(q)$ для всех корней алгебры $\mathfrak{g} = \mathbb{V}_\theta$ и покажем, что взвешенная сумма $\sum_\mu m_\theta^\mu \mathfrak{M}_\theta^\mu(q)$ зависит только от $\mathfrak{M}_\theta^0(q)$ и от числа Кокстера алгебры $\mathfrak{g}$. (Похожие результаты справедливы и для *младшего присоединённого* представления).

(B) Основной результат состоит в том, что для любых G-модулей $\mathbb{V}_\lambda$ и $\mathbb{V}_\gamma$ взвешенная сумма $\sum_\mu m_\gamma^\mu \mathfrak{M}_\lambda^\mu(q)$ равняется q-аналогу кратности нулевого веса (приводимого) G-модуля $\mathbb{V}_\lambda \otimes \mathbb{V}_\gamma^*$. Поэтому $\sum_\mu m_\gamma^\mu \mathfrak{M}_\lambda^\mu(q) = \sum_\mu m_\lambda^\mu \mathfrak{M}_\gamma^\mu(q)$, и это также даёт другой подход к вычислению $\mathbb{Z}[q]$-значной симметричной билинейной формы на кольце характеров алгебры $\mathfrak{g}$, которая была введена в работах R. Brylinski (Gupta) (1987). Сравнение двух формул для $\sum_\mu m_\theta^\mu \mathfrak{M}_\theta^\mu(q)$

даёт также интересное тождество, включающее многочлен Пуанкаре подгруппы W_θ и многочлен $\mathfrak{M}^0_\theta(q)$.

(C) Если $\mathfrak{g}$ простая и η_i — число положительных корней высоты i, то разбиение, образованное показателями алгебры $\mathfrak{g}$, двойственно к разбиению $(\eta_1, \eta_2, \ldots)$ [Kostant (1959), Macdonald (1972)]. Я приведу некоторое геометрическое объяснение и, как следствие, обобщение данного свойства, которое использует результаты R. Brylinski (1990) и свойства регулярных нильпотентных элементов в $\mathfrak{g}$.

Список литературы

[1] D.I. Panyushev. On Lusztig's q-analogues of all weight multiplicities of a representation, 15 pp., submitted.

Гибкость аффинных многообразий

А.Ю. Перепечко
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия
perepeal@gmail.com

Доклад основан на совместной работе с Хендриком Зюссом (Hendrik Süß) и Матеушем Мишалеком (Mateusz Michałek). В нём изучается гибкость двух семейств аффинных многообразий, наделённых действием алгебраического тора.

Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие размерности $\geqslant 2$, определённое над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль, и пусть $\operatorname{SAut} X$ — подгруппа автоморфизмов X, порождённая всеми действиями аддитивной группы поля $\mathbb{G}_a = \mathbb{G}_a(\mathbb{K})$.

Многообразие X называется *гибким*, если касательное пространство к X в произвольной гладкой точке порождается касательными векторами к орбитам $\mathbb{G}_a$-действий. Это эквивалентно бесконечной транзитивности действия группы $\operatorname{SAut} X$ на подмножестве гладких точек $X_{\mathrm{reg}} \subset X$, см. [3].

Ранее описанные классы гибких многообразий включают аффинные конусы над многообразиями флагов, невырожденные торические многообразия размерности $\geqslant 2$ и надстройки над гибкими многообразиями [1]; аффинные конусы над поверхностями дель Пеццо степени $\geqslant 4$ [2]; универсальные торсоры над A-покрытыми многообразиями [4].

Мы доказываем гибкость следующих двух семейств многообразий:

1. аффинные конусы над многообразиями секущих многообразий Веронезе–Сегре;

2. тотальные координатные пространства (то есть спектры колец Кокса) гладких проективных T-многообразий сложности один.

В доказательстве мы используем конструкцию из [5], которая по каждому открытому цилиндрическому подмножеству некоторого специального вида в проективном многообразии Y позволяет построить регулярное $\mathbb{G}_a$-действие на аффинном конусе над Y.

Список литературы

[1] И.В. Аржанцев, М.Г. Зайденберг, К.Г. Куюмжиян. Многообразия флагов, торические многообразия и надстройки: три примера бесконечной транзитивности. Математический сборник **203** (2012), no. 7, 3–30.
[2] А.Ю. Перепечко. Гибкость аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степени 4 и 5. Функц. анализ и его прил. **47** (2013), вып. 4, 45–52.
[3] I.V. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. **162** (2013), no. 4, 767–823.
[4] I.V. Arzhantsev, A. Perepechko, H. Süß. Infinite transitivity on universal torsors. Journal of the LMS, accepted, см. также arXiv: `math.AG/1302.2309`.
[5] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, M. Zaidenberg. Group actions on affine cones. In: Montreal Centre de Recherches Mathématiques, CRM Proceedings and Lecture Notes **54** (2011), 123–163.

Действие группы SL_2 на многообразии Sp_4-флагов и $(\mathfrak{sp}_4, \mathfrak{sl}_2)$-модули

А.В. Петухов
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия
`alex- -2@yandex.ru`

Цель данного доклада — показать, как общие понятия и методы теории $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модулей применяются к паре алгебр Ли $(\mathfrak{sp}_4, \mathfrak{sl}_2)$. Понятие $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модуля естественным образом возникло в работах Хариш-Чандры при изучении бесконечномерных унитарных представлений вещественных полупростых групп Ли. В этом случае $\mathfrak{k}$ является симметрической подалгеброй в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Теории $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модулей для симметрических пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ и её связям с другими областями теории представлений посвящены сотни работ и десятки книг. И. Пенков, В. Серганова, Г. Цукерман [1] заметили, что одно из центральных понятий этой теории, допустимость, может быть обобщено на произвольную пару алгебр Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ и что для широкого класса пар алгебр Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ хотя бы один нетривиальный допустимый $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модуль существует.

В кандидатской диссертации автора доклада [2] был развит геометрический подход к теории допустимых $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модулей, основанный на классической теории инвариантов. В процессе доклада я покажу, как этот подход применяется к паре $(\mathfrak{sp}_4, \mathfrak{sl}_2)$, то есть как описание орбит действия группы SL_2 на многообразии флагов группы Sp_4 и нуль-конуса для действия SL_2 на $V_{6\pi_1}$ (объектов коммутативной алгебры) ведёт к описанию допустимых $(\mathfrak{sp}_4, \mathfrak{sl}_2)$-модулей (объектов алгебры некоммутативной).

Список литературы

[1] I. Penkov, V. Serganova, G. Zuckerman. On the existence of $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-modules of finite type. Duke Math. J. **125** (2004), no. 2, 329–349.

[2] A.V. Petukhov, A geometric approach to $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-modules of finite type, Ph.D. thesis. Jacobs University, Bremen, 2011, см. также arXiv: `math.RT/1105.5020`.

Группы автоморфизмов мономиальных алгебр

А.В. Печина

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

`pechina.anna@mail.ru`

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики.

Мы рассматриваем алгебру

$$A = \mathbb{K}[x, y]/\langle x^{k_0}y^{m_0}, \ldots, x^{k_n}y^{m_n}\rangle,$$

где $k_{i+1} > k_i$, $m_{i+1} < m_i$ для $i = 0, \ldots, n$ и $k_0 = m_n = 0$. Это конечномерная локальная алгебра. Такие алгебры возникают во многих задачах, например, см. [1].

Целью нашей работы является описание структуры группы автоморфизмов алгебры A как аффинной алгебраической группы.

Работа [2] содержит критерии разрешимости $(AutA)^0$.

Будем называть алгебру A *симметричной*, если $k_i = m_{n-i}$, $i = 0, \ldots, n$. Обозначим

$$d_x = \max_{i=1,\ldots,n} (k_i - k_{i-1}), \; d_y = \max_{i=1,\ldots,n} (m_{i-1} - m_i),$$

$\mathbb{T}^2$ — двумерный алгебраический тор $(\mathbb{K}^*)^2$, $\mathbb{Z}_2$ — группа из двух элементов.

Теорема. *В разложении* $\mathrm{Aut} A = R \leftthreetimes U$ *на редуктивную и унипотентную части*

- $R \cong GL_2(\mathbb{K})$, *если A симметрична и* $d_x = d_y = 1$;
- $R \cong \mathbb{T}^2 \leftthreetimes \mathbb{Z}_2$, *если A симметрична и* $d_x + d_y > 2$;
- $R \cong \mathbb{T}^2$, *если A не симметрична.*

Утверждение. *Во введенных ранее обозначениях*

$$\dim U = 2(\dim A - n) + (m_0 - d_y) + (k_n - d_x).$$

Утверждение. *С точностью до изоморфизма существуют всего* 13 *локальных алгебр рассматриваемого вида, у которых унипотентная часть коммутативна*:

- $\mathbb{K}[x, y]/\langle y^m, xy, x^k \rangle$, *где* $1 \leqslant k \leqslant m \leqslant 4$;
- $\mathbb{K}[x, y]/\langle y^m, xy^2, x^2y, x^k \rangle$, *где* $2 \leqslant k \leqslant m \leqslant 3$.

Список литературы

[1] I.V. Arzhantsev, E.V. Sharoyko. Hassett–Tschinkel correspondence: Modality and projective hypersurfaces. J. Algebra **348** (2011), no. 1, 217–232, см. также arXiv: `math.AG/0912.1474`.
[2] A. Perepechko. On solvability of the automorphism group of a finite-dimensional algebra, см. arXiv: `math.AG/1012.0237`.

Инварианты колец Кокса двойных многообразий флагов малой сложности классических групп

Е.В. Пономарёва
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
lizaveta@yandex.ru

Пусть G — комплексная простая алгебраическая группа, B — её борелевская подгруппа, $U \subseteq B$ — максимальная унипотентная подгруппа G.

Определение 1. Сложностью действия G на неприводимом алгебраическом многообразии X называется коразмерность типичной B-орбиты.

Определение 2. Двойными многообразиями флагов называются многообразия вида $G/P \times G/Q$, где $P, Q \subseteq G$ — параболические подгруппы.

Задача описания U-инвариантов колец Кокса двойных многообразий флагов тесно связана с задачей разложения тензорного произведения двух неприводимых представлений группы G в прямую сумму неприводимых представлений. Любой неприводимый G-модуль можно реализовать как пространство сечений некоторого G-линейного расслоения над обобщённым многообразием флагов G/P. В свою очередь, тензорное произведение пространств сечений $H^0(G/P, \mathcal{L})$ и $H^0(G/Q, \mathcal{M})$ можно реализовать как пространство сечений тензорного произведения расслоений $\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M}$ над двойным многообразием флагов $X = G/P \times G/Q$. Если многообразие X имеет сложность 0 или 1, то согласно теоремам Бриона [2] и Тимашёва [5] знание алгебры U-инвариантов колец Кокса позволяет получить разложение пространства сечений $H^0(X, \mathcal{N})$ в прямую сумму неприводимых G-модулей.

Все двойные многообразия флагов сложности 0 и 1 классифицированы [1]. Для случая классических групп найдены алгебры U-инвариантов колец Кокса всех двойных многообразий флагов сложности 0 и 1. Алгебры унипотентных инвариантов колец Кокса двойных многообразий флагов сложности 0 и 1 для случая максимальных параболических подгрупп были ранее найдены Литтельманом [3] и Панюшевым [4] соответственно.

Для случая сложности 0 известна следующая теорема о строении алгебры U-инвариантов колец Кокса.

Теорема 1. *Пусть сложность X равна 0. Тогда алгебра U-инвариантов кольца Кокса конечно порождена и свободна.*

Оказалось, что для случая сложности 1 для классических групп данные алгебры устроены тоже довольно хорошо, а именно, верна следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть сложность* $X = G/P \times G/Q$ *равна* 1, G *— классическая группа. Тогда алгебра* U*-инвариантов кольца Кокса конечно порождена и свободна или является гиперповерхностью.*

Список литературы

[1] Е.В. Пономарёва. Классификация двойных многообразий флагов сложности 0 и 1. Изв. РАН. Сер. матем. **77** (2013), no. 5, 155–178.
[2] M. Brion. Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques. Duke Math. J. **58** (1989), 397–424.
[3] P. Littelmann. On spherical double cones. J. Algebra **166** (1994), 142–157.
[4] D.I. Panyushev. Complexity and rank of double cones and tensor product decompositions. Comment. Math. Helv. **68** (1993), no. 3, 455–468.
[5] D.A. Timashev. Cartier divisors and geometry of normal G-varieties. Transformation Groups **5** (2000), no. 2, 181–204.

Пример многообразия йордановых алгебр, имеющего сверхэкспоненциальный рост

А.В. Попов
Industrial Management Consulting Slovakia s.r.o., Братислава, Словакия
klever176@rambler.ru

Пусть V — многообразие линейных алгебр над полем F, то есть класс всех линейных алгебр, удовлетворяющих некоторому набору полиномиальных тождеств. Для алгебр многообразия наряду с тождествами, определяющими многообразие, оказывается справедливым бесконечное множество тождеств-следствий. Все вместе эти тождества образуют T-идеал $T(V)$ в свободной неассоциативной алгебре $F\{X\}$ от счётного множества образующих X.

Далее будем считать, что поле F имеет нулевую характеристику. В этом случае все тождества многообразия V являются следствиями полилинейных тождеств и вся информация о многообразии содержится в его полилинейной части $P_n(V)$. Пространства $P_n(V)$ определяются как $P_n/P_n \cap T(V)$, где P_n — пространство всех полилинейных неассоциативных многочленов степени n от свободных образующих $x_1, \ldots, x_n$.

Важной числовой характеристикой многообразия V является последовательность коразмерностей $c_n(V) = \dim P_n(V)$. В зависимости от асимптотического поведения коразмерностей $c_n(V)$ говорят о том, что многообразие имеет полиномиальный, экспоненциальный, сверхэкспоненциальный рост.

Первым примером многообразия йордановых алгебр сверхэкспоненциального роста является многообразие, порожденное тождествами йордановой алгебры, соответствующей бесконечномерной симметричной билинейной форме [2].

Новым примером многообразия йордановых алгебр, имеющего сверхэкспоненциальный рост, является многообразие со следующими дополнительными тождествами (помимо тождеств йордановых алгебр):

$$\left(x^2 y\right) x \equiv 0,$$
$$(x_1 y_1)(x_2 y_2)(x_3 y_3) \equiv 0.$$

Данный результат во многом основывается на результатах работы [1]. В частности, в данной работе построен пример алгебры, удовлетворяющей выше приведенным тождествам.

Из полученного примера многообразия в частности следует, что многообразия йордановых алгебр, определяемые дополнительным тождеством разрешимости порядка больше двух, имеют сверхэкспоненциальный рост.

Список литературы

[1] В.Г. Скосырский. Разрешимость и сильная разрешимость йордановых алгебр. Сибирский математический журнал **30** (1989), вып. 2, 167–171.
[2] V. Drensky. Polynomial identities for the Jordan algebra of a symmetric bilinear form. J. Algebra **108** (1987), 67–87.

Аддитивные действия на проективных квадриках коранга один

А.Б. Поповский
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
popovskiya@gmail.com

Доклад основан на совместной работе автора с И.В. Аржанцевым [2].

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль и $\mathbb{G}_a$ — аддитивная группа поля $\mathbb{K}$. Рассмотрим коммутативную унипотентную аффинную алгебраическую группу $\mathbb{G}_a^n$, то есть аддитивную группу n-мерного векторного пространства над $\mathbb{K}$.

Аддитивным действием на алгебраическом многообразии X назовем такое эффективное регулярное действие группы $\mathbb{G}_a^n$ на X, что одна из орбит открыта в X. Изучение таких действий было инициировано Хассеттом и Чинкелем в [3]. Они показали, что аддитивные действия на проективном пространстве $\mathbb{P}^n$, с точностью до автоморфизма $\mathbb{P}^n$, находятся во взаимно однозначном соответствии с классами изоморфизма локальных $(n+1)$-мерными $\mathbb{K}$-алгебр.

В докладе мы рассматриваем аддитивные действия на проективных квадриках $F(x) = 0$. В случае, когда квадратичная форма F невырождена, аддитивные действия описаны в работе Е.В. Шаройко [1]. Там показано, что в каждой размерности аддитивное действие единственно. Мы рассматриваем случай, когда квадратичная форма F отвечает билинейной форме с одномерным ядром.

Аддитивные действия на проективных квадриках $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$, индуцированные действиями $\mathbb{G}_a^n \times \mathbb{P}^{n+1} \to \mathbb{P}^{n+1}$, могут быть описаны в терминах локальных $(n+2)$-мерных алгебр R с дополнительной структурой на них. А именно, на алгебре R фиксируется квадратичная форма F (задающая квадрику X), и в максимальном идеале $\mathfrak{m} \triangleleft R$ выделяется гиперплоскость W так, что

$$F(ab_1, b_2) + F(b_1, ab_2) = 0 \text{ для всех } b_1, b_2 \in R \text{ и } a \in W,$$
$$F(1,1) = 0.$$

В случае, когда квадратичная форма F отвечает билинейной форме с одномерным ядром, верна следующая теорема.

Теорема. *В приведенных выше обозначениях тройка (R, W, F) приводится к виду*

$$M(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $M(F)$ — матрица формы F в базисе R, согласованном с включениями $W \subset \mathfrak{m} \subset R$, $W = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, и R изоморфна одной из следующих алгебр:

1. $\mathbb{K}[e_1, \dots, e_n]/(e_ie_j - \lambda_{ij}e_n, e_i^2 - e_j^2 - (\lambda_{ii} - \lambda_{jj})e_n, e_se_n, 1 \leqslant i < j \leqslant n-1,$ $1 \leqslant s \leqslant n, n \geqslant 3)$ *где λ_{ij} — это элементы симетричной блочно-диагональнойl $(n-1) \times (n-1)$-матрицы Λ такой, что каждый блок Λ_k —*

это

$$\lambda_k \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ 0 & -1 & & 0 \end{pmatrix}$$

для некоторого $\lambda_k \in \mathbb{K}$;

2. $\mathbb{K}[e_1, e_2]/(e_1^3, e_1e_2, e_2^2)$ *или* $\mathbb{K}[e_1]/(e_1^4)$ с $e_2 = e_1^3, e_3 = e_1^2$.

Список литературы

[1] Е.В. Шаройко. Соответствие Хассетта–Чинкеля и автоморфизмы квадрик. Математический сборник **200** (2009), вып 11, 1715–1729.
[2] I.V. Arzhantsev, A.B. Popovskiy. Additive actions on projective hypersurfaces. To appear in GABAG-2012, Springer Verlag, the Proceedings of the Conference “Groups of Automorphisms in Birational and Affine Geometry”, Levico Terme (Trento), 2012, см. также arXiv: `math.AG/1307.7341`.
[3] B. Hassett, Yu. Tschinkel. Geometry of equivariant compactifications of G_a^n. Int. Math. Res. Not. **20** (1999), 1211–1230.

Сохраняющие меру элементы на многообразии метабелевых колец Ли

Е.Н. Порошенко[1], Е.И. Тимошенко[2, 3]
[1,2]Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия
[1]`auto_stoper@ngs.ru`, [2]`algebra@nstu.ru`

В [1] было доказано, что элемент свободной метабелевой группы является примитивным тогда и только тогда, когда он сохраняет меру. В данной работе получен аналогичный результат для элементов свободных метабелевых алгебр Ли.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — n-элементное множество. Через $L(X)$ обозначим свободное кольцо Ли, а через $M(X)$ — свободное метабелево кольцо, то есть свободную и свободную метабелеву $\mathbb{Z}$-алгебры соответственно. Каждый элемент g алгебры $M(X)$ можно рассматривать как некоторый многочлен от $x_1, x_2, \dots, x_n$. Соответственно, мы будем использовать обозначение $g(x_1, \dots, x_n)$.

[3]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12–01–00084).

Определение 1. Элемент называется *примитивным*, если он может быть включен в некоторую систему свободных порождающих кольца $M(X)$.

Для произвольного кольца S через S^t обозначим прямую сумму t копий кольца S, то есть кольцо $\underbrace{S \oplus S \oplus \dots \oplus S}_{t \text{ раз}}$. Набор элементов $(p_1, p_2, \dots, p_t)$ (то есть элемент кольца S^t) будем для краткости обозначать p^t.

Пусть R — некоторое конечное метабелево кольцо. Для произвольного элемента $g \in L(X)$ определим отображение $\psi\colon R^n \to R$: $\psi(r^n) = g(r_1, r_2, \dots, r_n)$. Иными словами, образ элемента $r^n = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ кольца R^n получается посредством подстановки элементов $r_1, r_2, \dots, r_n$ в многочлен g. Отметим, что так как любое отображение порождающих свободного кольца многообразия в кольцо этого же многообразия единственным образом продолжается до гомоморфизма, значения выражения $g(r^n)$ зависит только от элемента в алгебре $M(X)$, задаваемого многочленом $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, но не от того, какой из многочленов, задающих этот элемент, был выбран. Рассмотрим значения $\psi(r^n)$, где r^n пробегает все множество R^n.

Определение 2. Пусть R —конечное метабелево кольцо. Элемент g алгебры $M(X)$ называется *сохраняющим меру на* R, если каждый элемент $p \in R$ является образом (под действием ψ) в точности $|R|^{n-1}$ элементов r^n кольца R^n.

Определение 3. Элемент g алгебры $M(X)$ называется *сохраняющим меру*, если он сохраняет меру на любом конечном метабелевом кольце Ли.

Свойство сохранения меры не зависит от того, какое множество свободных порождающих было выбрано в алгебре $M(X)$.

Определение 4. Пусть S — произвольное кольцо Ли. Вектор $(s_1, s_2, \dots, s_k) \in S^k$ называется *унимодулярным*, если идеал, порождённый его координатами, совпадает с S.

Для произвольного кольца Ли S его универсальную обёртывающую обозначим через $U(S)$. Рассмотрим образ $f \in L(X)$ в универсальной обёртывающей $U(L(X))$ при естественном вложении. Для упрощения обозначений будем обозначать его тоже f. Нетрудно видеть, что существуют и единственны такие элементы $\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_n f \in U(L(X))$, что

$$f = x_1\partial_1 f + x_2\partial_2 f + \ldots + x_n\partial_n f.$$

Эти элементы называются *частными производными* элемента f.

Рассмотрим теперь свободное метабелево кольцо Ли $M(X)$. Через $\mathbb{Z}[X]$ множество коммутативных ассоциативных многочленов от переменных из множества X. Пусть $\varphi\colon L(X) \to M(X)$ — естественный гомоморфизм и $\varphi'\colon U(L(X)) \to \mathbb{Z}[X]$ — также естественный гомоморфизм колец. Тогда определим отображения $\partial_i' = \varphi' \circ \partial_i \circ \varphi^{-1}$. Непосредственно показывается, что эти отображения определены корректно.

Пусть p, q, m — целые положительные числа, причём $m \geqslant 2$. Через $I_{p,q,m}$ обозначим идеал кольца многочленов $\mathbb{Z}[X]$, порождённый элементами m и $x_i^p(x^q - 1)$, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через $\mathbb{Z}_{p,q,m}[X]$ коммутативное ассоциативное кольцо $\mathbb{Z}[X]/I_{p,q,m}$.

Пусть $\eta\colon \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}_{p,q,m}[X]$ — естественный гомоморфизм. Через $\overline{\partial}_i g$ обозначим образ $\partial_i' g$ под действием η.

Из [2] следует, что элемент $g \in M(X)$ является примитивным тогда и только тогда, когда вектор $(\partial_1' g, \partial_2' g, \ldots, \partial_n' g)$ унимодулярен. Это утверждение вместе с [3] позволяет доказать следующую лемму (ср. с [4]).

Лемма 5. *Элемент g является примитивным тогда и только тогда, когда для любых целых положительных чисел p, q и для любого целого положительного числа $m \geqslant 2$ вектор $(\overline{\partial}_1 g, \overline{\partial}_2 g, \ldots, \overline{\partial}_n g)$ унимодулярен в $\mathbb{Z}_{p,q,m}[X]$.*

Наконец, из леммы 5 вытекает следующая теорема.

Теорема 6. Элемент $g \in M(X)$ является примитивным тогда и только тогда, когда он сохраняет меру на многообразии метабелевых колец Ли над $\mathbb{Z}$.

Список литературы

[1] Е.И. Тимошенко. Примитивные и сохраняющие меру системы элементов на многообразиях метабелевых и метабелевых проконечных групп. Сиб. Мат. Ж. **54** (2012), 199–207.

[2] У.У. Умирбаев. Частные производные и эндоморфизмы некоторых относительно свободных алгебр Ли. Сиб. Мат. Ж. **34** (1993), no. 6, 179–188.

[3] G. Baumslag. Lecture notes on nilpotent groups. Amer. Math. Soc. Regional Conference Series 2, 1971.

[4] C.K. Gupta, V.A. Roman'kov. Finite separability of tameness primitivity in certain relatively free groups. Comm. Algebra **23** (1995), no. 11, 4101–4108.

Группы автоморфизмов особых $\mathbb{K}^\times$-поверхностей дель Пеццо

Е.Л. Ромаскевич
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
lena.apq@gmail.com

Для любого полного алгебраического многообразия X с конечно порожденной группой классов связная компонента единицы $\mathrm{Aut}(X)^0$ группы его автоморфизмов является линейной алгебраической группой. Естественным образом возникает задача описания этой группы.

Гладкая проективная поверхность X называется поверхностью дель Пеццо (или многообразием Фано), если её антиканонический класс обилен. Известно, что любая поверхность дель Пеццо изоморфна либо $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, либо $\mathbb{P}^2$, либо раздутию $\mathrm{Bl}_{p_1,\ldots,p_n}\mathbb{P}^2$ проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ в $n \leqslant 8$ точках общего положения. Так как $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^2$ и раздутия $\mathbb{P}^2$ не более чем в трех точках общего положения являются торическими поверхностями, задача описания их группы автоморфизмов может быть решена методами Демазюра. Для $X = \mathrm{Bl}_{p_1,\ldots,p_n}\mathbb{P}^2$, где $4 \leqslant n \leqslant 8$, группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ конечна. Попытки обобщения данных результатов приводят к исследованиям в двух возможных направлениях: увеличение размерности многообразия Фано или отказ от условия гладкости. Нами были рассмотрены негладкие $\mathbb{K}^\times$-поверхности дель Пеццо, особенности которых — простые двойные точки.

Используемая нами техника вычисления $\mathrm{Aut}(X)^0$ опирается на предложенный в [1] общий метод описания связной компоненты единицы группы автоморфизмов полного рационального многообразия с действием тора сложности один. В основе данного метода лежит понятие кольца Кокса $\mathcal{R}(X)$. Для нормального невырожденного алгебраического многообразия с конечно порожденной группой классов дивизоров $\mathrm{Cl}(X)$ кольцо Кокса — $\mathrm{Cl}(X)$-градуированное кольцо следующего вида:

$$\mathcal{R}(X) := \bigoplus_{[D]\in \mathrm{Cl}(X)} \Gamma(X, D),$$

где $\Gamma(X,D) = \{f \in \mathbb{K}(X)^\times \mid \operatorname{div}(f) + D \geqslant 0\} \cup \{0\}$. В случае рационального многообразия с действием тора сложности один полное описание кольца Кокса было приведено Зюссом и Хаузеном [3]. Ими было показано, что в данном случае кольцо Кокса является факторалгеброй алгебры многочленов по триномиальным соотношениям.

В [2, Theorems 3.23–3.26] Хаузен приводит список колец Кокса неторических $\mathbb{K}^\times$-поверхностей Фано, удовлетворяющих условию Горенштейна, разбивая их на четыре таблицы в соответствии с числом Пикара. Оказывается, что число Пикара таких поверхностей не превосходит четырёх. Нами были вычислены связные компоненты единицы группы автоморфизмов этих проективных поверхностей. В следующей таблице указаны те из них, связная компонента единицы группы автоморфизмов которых отлична от $\mathbb{K}^\times$, и вычислены веса действия тора $\mathbb{K}^\times$ на одномерных унипотентных подгруппах группы $\mathrm{Aut}(X)^0$. Под $\mathbb{G}_a$ мы понимаем аддитивную группу основного поля $\mathbb{K}$, под U_3 — трехмерную группу верхних унитреугольных матриц 3×3 над полем $\mathbb{K}$.

$\mathcal{R}(X)$	$\mathrm{Aut}(X)^0$	веса
$\mathbb{K}[T_{01}, T_{02}, T_{11}, T_{21}] \ / \ \langle T_{01}T_{02} + T_{11}^2 + T_{21}^3 \rangle$	$\mathbb{K}^\times \leftthreetimes U_3$	(2,1,3)
$\mathbb{K}[T_{01}, T_{02}, T_{11}, T_{21}] \ / \ \langle T_{01}T_{02} + T_{11}^2 + T_{21}^4 \rangle$	$\mathbb{K}^\times \leftthreetimes \mathbb{G}_a$	(1)
$\mathbb{K}[T_{01}, T_{02}, T_{11}, T_{21}] \ / \ \langle T_{01}T_{02}^2 + T_{11}^3 + T_{21}^2 \rangle$	$\mathbb{K}^\times \leftthreetimes (\mathbb{G}_a)^2$	(3,2)
$\mathbb{K}[T_{01}, T_{02}, T_{11}, T_{21}] \ / \ \langle T_{01}T_{02}^3 + T_{11}^3 + T_{21}^2 \rangle$	$\mathbb{K}^\times \leftthreetimes \mathbb{G}_a$	(3)
$\mathbb{K}[T_{01}, T_{02}, T_{11}, T_{12}, T_{21}] \ / \ \langle T_{01}T_{02} + T_{11}T_{12} + T_{21}^2 \rangle$	$\mathbb{K}^\times \leftthreetimes U_3$	(1,1,2)
$\mathbb{K}[T_{01}, T_{02}, T_{11}, T_{12}, T_{21}] \ / \ \langle T_{01}T_{02} + T_{11}T_{12} + T_{21}^3 \rangle$	$\mathbb{K}^\times \leftthreetimes \mathbb{G}_a$	(1)
$\mathbb{K}[T_{01}, T_{02}, T_{11}, T_{12}, T_{21}] \ / \ \langle T_{01}T_{02} + T_{11}^2T_{12} + T_{21}^2 \rangle$	$\mathbb{K}^\times \leftthreetimes (\mathbb{G}_a)^2$	(2,1)
$\mathbb{K}[T_{01}, T_{02}, T_{11}, T_{12}, T_{21}] \ / \ \langle T_{01}T_{02} + T_{11}^3T_{12} + T_{21}^2 \rangle$	$\mathbb{K}^\times \leftthreetimes \mathbb{G}_a$	(1)
$\mathbb{K}[T_{01}, T_{02}, T_{11}, T_{12}, T_{21}] \ / \ \langle T_{01}T_{02}^2 + T_{11}T_{12}^2 + T_{21}^2 \rangle$	$\mathbb{K}^\times \leftthreetimes \mathbb{G}_a$	(2)
$\mathbb{K}[T_{01}, T_{02}, T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}] \ / \ \langle T_{01}T_{02} + T_{11}T_{12} + T_{21}T_{22} \rangle$	$\mathbb{K}^\times \leftthreetimes (\mathbb{G}_a)^2$	(1,1)
$\mathbb{K}[T_{01}, T_{02}, T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}] \ / \ l\langle T_{01}T_{02} + T_{11}T_{12} + T_{21}^2T_{22} \rangle$	$\mathbb{K}^\times \leftthreetimes \mathbb{G}_a$	(1)

Интересно, что все полученные группы оказываются разрешимыми. Основной идеей вычисления $\mathrm{Aut}(X)^0$ является поднятие автоморфизмов с многообразия X до однородных автоморфизмов кольца Кокса, для вычисления которых используется техника локально нильпотентных дифференцирований.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, J. Hausen, E. Herppich, A. Liendo. The automorphism group of a variety with torus action of complexity one, см. arXiv: `math.AG/1202.4568`.
[2] J. Hausen. Three lectures on Cox rings. In: LMS Lecture Note Series **405** (2013), 3–60.
[3] J. Hausen, H. Süß. The Cox ring of an algebraic variety with torus action. Advances Math. **225** (2010), 977–1012.

Детерминантные формулы для флаговых многочленов Шура

Е.Ю. Смирнов
Высшая школа экономики, Независимый Московский университет, Москва, Россия
esmirnov@hse.ru

Многочлены Шура — это семейство симметрических многочленов, введенных Якоби в XIX веке. Они играют важную роль в теории представлений (как характеры представлений полной линейной группы) и в комбинаторике, в особенности в задачах, связанных с таблицами Юнга. Они могут быть выражены через элементарные и полные симметрические многочлены при помощи детерминантных формул, известных как формулы Якоби–Труди. Флаговые многочлены Шура являются обобщениями классических многочленов Шура. Они были определены в 1982 году в работе А. Ласку и М.-П. Шютценберже [2]. Флаговый многочлен Шура $s_\lambda(b)$ определяется по разбиению λ и последовательности возрастающих натуральных чисел $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Для флаговых многочленов Шура также имеются детерминантные формулы, полученные И. Гесселем [1] и М. Вакс [3], выражающие их через обычные многочлены Шура.

В докладе будут рассмотрены флаговые многочлены Шура для флага вида $b = (h+1, h+2, \ldots, h+n)$; они называются *$h$-флаговыми многочленами Шура.* Получены новые детерминантные формулы, отличные от формул Гесселя и Вакс, выражающие h-флаговые многочлены Шура через 1-флаговые. Как следствие из этого получаются детерминантные формулы, выражающие многочлены Шуберта некоторых вексилярных перестановок через многочлены Шуберта перестановок более простого вида. Главные специализации и специализации в единице некоторых из этих формул имеют интересные приложения к теории плоских разбиений; так, в частности, из них получается формула Кириллова–Фомина для числа плоских разбиений внутри треугольной призмы.

Доклад основан на совместной работе с Г.А. Мерзоном.

Список литературы

[1] I. Gessel. Determinants and plane partitions, preprint, 1982.
[2] A. Lascoux, M.-P. Schützenberger. Polynômes de Schubert. C.R. Acad. Sci. Paris **294** (1982), 447–450.
[3] M. Wachs. Flagged Schur functions, Schubert polynomials, and symmetrizing operators. J. Comb. Theory, Ser. A **40** (1985), no. 2, 276–289.

О представлениях янгианов базисных супералгебр Ли

В.А. Стукопин
Донской государственный технический университет,
Южный математический институт ВНЦ РАН,
Ростов-на-Дону, Россия
strukopin@mail.ru

Доклад в значительной степени основан на работе автора [6].

1. Описание неприводимых представлений янгианов супералгебр Ли является важной задачей для теории точно-решаемых моделей статистической механики и квантовой теории поля. С точки зрения теории янгианов конструкция трансфер-матрицы основана на нахождении образа универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана при действии тензорного произведения неприводимого представления и тождественного отображения (см. [4], [1]). Вычисление спектра гамильтониана и корреляционных функций также может быть проведено на основе теории представлений янгианов при использовании формулы для универсальной R-матрицы. Основным результатом данной работы являются теоремы о классификации конечномерных неприводимых представлений янгианов базисных супералгебр Ли типа $A(n,n)$ (см. также работу [6]) и $D(m,n)$. Классификация неприводимых представлений янгиана полной линейной алгебры $\mathfrak{gl}(m,n)$ получена ранее в работе [7]. Классификация конечномерных неприводимых представлений янгиана $Y(A(m,n))$, $m \neq n$, получена в работе [2]. Мы используем определение янгиана супералгебры Ли $A(m,n)$, данное в работе [3]. Общей теории янгианов посвящена монография [1].

2. Определение супералгебры Ли $A(n,n)$ дано в работе [3] (см. также [6]). Первый результат работы — следующая теорема (см. [6]).

Теорема. 1) *Каждый неприводимый конечномерный $Y(A(n,n))$-модуль V является модулем со старшим весом d: $V = V(d)$.*
2) *Модуль $V(d)$ конечномерен тогда и только тогда, когда существуют многочлены P_i^d, $i \in \{1,2,\ldots,n,n+2,\ldots 2n+1\} = I\backslash\{n+1\}$, а также многочлены P_{n+1}^d, Q_{n+1}^d, удовлетворяющие следующим условиям:*
а) *все эти многочлены со старшими коэффициентами, равными* 1;

b)

$$\frac{P_i^d(u+a_{ii}/2)}{P_i^d(u)} = 1+\sum_{k=0}^{\infty} d_{i,k}\cdot u^{-k-1},\ i\in I\backslash\{n+1\}, \quad (1)$$

$$\frac{P_{n+1}^d(u)}{Q_{n+1}^d(u)} = 1+\sum_{k=0}^{\infty} d_{n+1,k}\cdot u^{-k-1}. \quad (2)$$

Здесь a_{ii} — матричный элемент симметричной матрицы Картана суперал-гебры Ли $A(n-1,n-1)$.

3. Напомним определение янгиана супералгебры Ли типа $D(m,n)$. Здесь мы также используем симметризованную матрицу Картана (см. [5]). $Y(D(m,n))$ — это ассоциативная супералгебра над полем комплексных чисел C порождённая образующими $h_{i,k}, x_{i,k}^{\pm}, i\in I=\{1,2,\ldots,2n+1\}, k\in Z_+$ $(p(x_{n+1,k}^{\pm})=1, p(x_{i,k}^{\pm})=p(h_{j,k})=0, i\in I\backslash\{n+1\}, j\in I, k\in Z_+)$, которые удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:

$$[h_{i,k},h_{j,l}]=0, \quad \delta_{i,j}h_{i,k+l}=[x_{i,k}^+,x_{j,l}^-],$$
$$[h_{i,k+1},x_{j,l}^{\pm}]=[h_{i,k},x_{j,l+1}^{\pm}]+(a_{ij}/2)\hbar(h_{i,k}x_{j,l}^{\pm}+x_{j,l}^{\pm}h_{i,k}),$$
$$[h_{i,0},x_{j,l}^{\pm}]=\pm a_{ij}x_{j,l}^{\pm}, \quad [x_{i,k+1}^{\pm},x_{j,l}^{\pm}]=[x_{i,k}^{\pm},x_{j,l+1}^{\pm}]+(a_{ij}/2)\hbar(x_{i,k}^{\pm}x_{j,l}^{\pm}+x_{j,l}^{\pm}x_{i,k}^{\pm}),$$
$$[x_{n,k}^{\pm},x_{n,l}^{\pm}]=0, \quad [[x_{n-1,k}^{\pm},x_{n,0}^{\pm}],[x_{n,0}^{\pm},x_{n+1,k}^{\pm}]]=0,$$
$$[x_{i,k}^{\pm},x_{j,l}^{\pm}]=0,\ |i-j|>1,$$
$$[x_{i,k_1}^{\pm},[x_{i,k_2}^{\pm},x_{j,k_3}^{\pm}]]+[x_{i,k_2}^{\pm},[x_{i,k_1}^{\pm},x_{j,k_3}^{\pm}]]=0,$$
$$|i-j|=1,\ i\neq m+n, m+n-1,\ k_i\in\mathbb{Z}_+,$$
$$[x_{i,k_1}^{\pm},x_{j,k_2}^{\pm}]=0, \quad |i-j|>2 \text{ или } |i-j|>1, i\neq m+n, m+n-1, \quad k_i\in\mathbb{Z}_+,$$
$$\textstyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2}[x_{m+n,k_{\sigma(1)}}^{\pm},[x_{m+n,k_{\sigma(2)}}^{\pm},[x_{m+n,k_{\sigma(3)}}^{\pm},x_{m+n-1,k_3}^{\pm}]]]=0, \quad k_i\in\{0,1\},$$
$$\textstyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2}[x_{m+n,k_{\sigma(1)}}^{\pm},[x_{m+n,k_{\sigma(2)}}^{\pm},[x_{m+n,k_{\sigma(3)}}^{\pm},x_{m+n-2,k_3}^{\pm}]]]=0, \quad k_i\in\mathbb{Z}_+.$$

Теорема. 1) *Каждое неприводимый конечномерный $Y(D(m,n))$-модуль V является модулем со старшим весом Λ — $V(\Lambda)$.*
2) *Если модуль $V(\Lambda)$ является конечномерным неприводимым, то существуют многочлены $P_i^d(u)$, $i\in\{1,2,\ldots,n-1,n+1,\ldots m+n\}=I\backslash\{n\}$ и многочлены $P_n^d(u)$, $Q_n^d(u)$, которые удовлетворяют следующим условиям:*
a) *все эти многочлены являются многочленами с коэффициентом при мономе старшей степени, равным* 1;
b)

$$\tfrac{P_i^d(u+a_{ii}/2)}{P_i^d(u)} = 1+\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} d_{i,k}\cdot u^{-k-1}, \quad i\in I\backslash\{n\},$$
$$\tfrac{P_n^d(u)}{Q_n^d(u)} = 1+\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} d_{n,k}\cdot u^{-k-1}.$$

Список литературы

[1] А.И. Молев. Янгианы и классические алгебры Ли. М., МЦНМО, 2009.
[2] В.А. Стукопин. О представлениях янгианов супералгебры Ли типа $A(m, n)$. Известия РАН. Серия матем. **77** (2013), вып. 5, 65–80.
[3] В.А. Стукопин. О янгианах супералгебр Ли типа $A(m, n)$. Функциональный анализ и его приложения **28** (1994), no. 3, 85–88.
[4] В.О. Тарасов. О строении квантовых L операторов для R-матрицы XXZ модели. Теорет. и матем. физика **61** (1984), no. 2, 163–173.
[5] L. Frappat, P. Sorba. Dictionary on Lie superalgebras. Academic Press, London, 2000.
[6] V. Stukopin. On representations of Yangian Lie superalgebra $A(n, n)$ type. Journal of Physics **411** (2013), 1–13.
[7] R.B. Zhang. The $\mathfrak{gl}(M, N)$ super Yangian and its finite-dimensional representations. Lett. Math. Phys. **37** (1996), 419–434.

Компактные линейные группы с факторпространством, гомеоморфным клетке

О.Г. Стырт
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
oleg_styrt@mail.ru

Исследуется вопрос о том, в каких случаях топологический фактор вещественного линейного представления компактной группы Ли является топологическим многообразием, а также гладким многообразием. К настоящему моменту разобраны случаи группы с коммутативной связной компонентой, простой трёхмерной группы и неприводимой простой группы классического типа. В коммутативном случае ответ формулируется весьма сложно в терминах весов представления компактного тора. В трёхмерном случае показано, что если фактор является гладким многообразием, то сумма целых частей половин размерностей неприводимых компонент действия связной компоненты не превосходит четырёх; разобрана большая часть представлений, удовлетворяющих данному неравенству. В случае же неприводимой простой группы классического типа ранга более 1 показано, что фактор может быть гладким многообразием лишь для линейных групп из определённого ограниченного списка (включая серийные), а при дополнительном требовании связности группы — лишь для линейных групп $\varphi_5(B_5)$ и $\varphi_6(D_6)$.

Каждый из полученных результатов заключается в достаточности некоторого условия для того, чтобы фактор был топологическим многообразием, либо в необходимости некоторого условия для гладкости фактора. Между тем, относительно недавно докладчику удалось доказать, что в коммутативном случае соответствующие условия, необходимые для гладкости фактора, необходимы и для того, чтобы фактор был топологическим многообразием.

В докладе планируется изложить наиболее кратко и доступно формулируемые среди вышеописанных результатов, а также явно построить отображение факторизации в определённых нетривиальных случаях, для которых фактор гомеоморфен векторному пространству.

Список литературы

[1] О.Г. Стырт. О пространстве орбит компактной линейной группы Ли с коммутативной связной компонентой. Труды ММО **70** (2009), 235–287.

[2] О.Г. Стырт. О пространстве орбит трёхмерной компактной линейной группы Ли. Изв. РАН. Сер. мат. **77** (2011), no. 4, 165–188.

[3] О.Г. Стырт. О пространстве орбит неприводимого представления специальной унитарной группы. Труды ММО, 2013, в печати.

[4] О.Г. Стырт. О пространстве орбит неприводимого представления простой компактной группы Ли типа B, 2013, 13 с., препринт.

[5] О.Г. Стырт. О пространстве орбит неприводимого представления простой компактной группы Ли типа C, 2013, 12 с., препринт.

[6] О.Г. Стырт. О пространстве орбит неприводимого представления простой компактной группы Ли типа D, 2013, 12 с., препринт.

Обобщение конструкции Кинга для колчанов

С.Н. Федотов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

glwrath@yandex.ru

Пусть Q — некоторый колчан, Q_0 — множество его вершин, α — вектор размерностей. Как хорошо известно, классификация α-мерных представлений колчана Q сводится к изучению действия редуктивной группы $\mathrm{GL}(\alpha) := \prod_{i\in Q_0}\mathrm{GL}(\alpha_i)$ на пространстве представлений $\mathrm{Rep}(Q,\alpha)$. И здесь достаточно продуктивным подходом оказывается построение категорного фактора всего пространства представлений или же некоторого его открытого подмножества.

В работе [2] А.Д. Кинг исследовал открытые подмножества вида $\mathrm{Rep}_{\chi}^{ss}(Q,\alpha) \subseteq \mathrm{Rep}(Q,\alpha)$, состоящие из представлений, полустабильных относительно некоторого характера χ центрального тора $T(\alpha) \subseteq \mathrm{GL}(\alpha)$. В частности, им была получена характеризация χ-полустабильных представлений в терминах теории представлений. Будучи факторами Мамфорда, факторы Кинга квазипроективны. Поэтому возникает вопрос: существуют ли открытые подмножества пространства представлений, допускающие непроективные факторы? Ответ на него следует из более общей теории.

Пусть редуктивная алгебраическая группа G действует на аффинном факториальном многообразии X. *Хорошим фактором* называется аффинный морфизм $\pi_X\colon X \to Y$ на многообразие Y, для которого индуцированный морфизм пучков $\pi^*\colon \mathcal{O}_Y \to ((\pi_X) * \mathcal{O}_X)^G$ является изоморфизмом. *Хорошее G-подмножество* $U \subseteq X$ — это открытое G-инвариантное подмножество, допускающее хороший фактор $U \to U /\!\!/ G$. Хорошее G-подмножество $U \subseteq X$ является *qp-максимальным* (соответственно, *2-максимальным*), если $U /\!\!/ G$ является квазипроективным многообразием (соответственно, $A2$-многообразием).

Пусть T — центральный тор группы G. Определим орбитный конус точки $x \in X$ как выпуклый конус $\omega(x)$, порожденный всеми характерами T, допускающими полуинвариант соответствующего веса, не обращающийся в нуль в точке x. Набор Ψ орбитных конусов назовём *2-максимальным*, если относительные внутренности любой пары конусов из Ψ имеют непустое пересечение и Ψ является максимальной по включению среди всех собраний, обладающих этим свойством.

В работе [1] И.В. Аржанцев и Ю. Хаузен показали, что максимальные в некотором строгом смысле $A2$-подмножества находятся во взаимно однозначном соответствии с 2-максимальными наборами орбитных конусов. Нетрудно убедиться, что факторы Кинга возникают из 2-максимальных наборов специального вида. При этом некоторые (хотя и далеко не все) колчаны допускают в каких-то векторах размерностей максимальные $A2$-подмножества, факторы которых не являются квазипроективными.

В докладе будет дано описание таких подмножеств с точки зрения теории представлений. Оказывается, условие принадлежности им может быть сформулировано геометрически в терминах взаимного расположения конусов рассматриваемого набора и векторов размерностей самого представления и его подпредставлений. Это позволяет распространить понятие «полустабильности» относительно 2-максимального набора конусов на всю категорию представлений. В частности, становится возможным определить «элементарные» полустабильные представления, играющие ту же роль, что и стабильные представления в теории Кинга.

Список литературы

[1] I.V. Arzhantsev, J. Hausen. Geometric invariant theory via Cox rings. J. Pure and Applied Algebra **213** (2009), no. 1, 154–172.

[2] A.D. King. Moduli of representations of finite-dimensional algebras. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **45** (1994), no. 180, 515–530.

Представления нильпотентных алгебр Ли, многогранники Винберга и обобщённые многообразия флагов

Е.Б. Фейгин
Высшая школа экономики, Москва, Россия
`evgfeig@gmail.com`

Доклад основан на работе [1].

Мы определим класс *хороших* представлений нильпотентных алгебр Ли и опишем алгебраические и геометрические свойства таких представлений. В частности, мы обсудим связь *хороших* представлений с многогранниками Винберга, теорией представлений простых алгебр Ли, телами Ньютона–Окунькова и вырожденными многообразиями флагов.

Список литературы

[1] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann. Favourable modules: filtrations, polytopes, Newton–Okounkov bodies and flat degenerations, see arXiv: `math.AG/1306.1292`.

Касательные конусы к многообразиям Шуберта для инволюций в группе Вейля типа D_n

А.А. Шевченко
Самарский государственный университет, Самара, Россия
`shevchenko.alexander.1618@gmail.com`

Пусть G — комплексная редуктивная группа, T — максимальный тор в G, B — борелевская подгруппа в G, содержащая T, Φ — система корней группы G относительно T, W — её группа Вейля. Пусть $\mathcal{F} = G/B$ — многообразие флагов, X_w — подмногообразие Шуберта в $\mathcal{F}$, соответствующее элементу $w \in W$, C_w — касательный конус к X_w в точке $p = eB$ (рассматриваемый как подсхема в касательном пространстве $T_p\mathcal{F}$).

В работе [1] Д.Ю. Елисеев и А.Н. Панов вычислили касательные конусы C_w для всех w для $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ при $n \leqslant 5$. На основе этих вычислений А.Н. Панов сформулировал следующую гипотезу.

Гипотеза. (А.Н. Панов, 2011) *Если w_1, w_2 — разные инволюции в W, то касательные конусы C_{w_1} и C_{w_2} различны.*

Эта гипотеза была доказана Д.Ю. Елисеевым и М.В. Игнатьевым в [2] для систем корней A_n, F_4 и G_2. В [3] эта гипотеза была доказана автором совместно с М.А. Бочкарёвым и М.В. Игнатьевым для систем корней B_n и C_n. В обеих работах ключевую роль в доказательстве играют так называемые *многочлены Костанта–Кумара* (см. [4], [5]). Здесь мы рассматриваем эту гипотезу для систем корней типа D_n. Доклад основан на совместной работе с М.В. Игнатьевым. Автор был поддержан грантом РФФИ 14–01–31052–мол_а.

Список литературы

[1] Д.Ю. Елисеев, А.Н. Панов. Касательные конусы к многообразиям Шуберта для A_n малого ранга. Записки научных семинаров ПОМИ **394** (2011), 218–225, см. также arXiv: `math.RT/1109.0399`.

[2] Д.Ю. Елисеев, М.В. Игнатьев. Многочлены Костанта–Кумара и касательные конусы к многообразиям Шуберта для инволюций в A_n, F_4 и G_2. Записки научных семинаров ПОМИ **414** (2013), 82–105, см. также arXiv: `math.RT/1210.5740`.

[3] M.A. Bochkarev, M.V. Ignatyev, A.A. Shevchenko. Tangent cones to Schubert varieties in types A_n, B_n and C_n. J. Algebra, submitted, см. также arXiv: `math.AG/1310.3166`.

[4] B. Kostant, S. Kumar. T-equivariant K-theory of generalized flag varieties. J. Diff. Geom. **32** (1990), 549–603.

[5] S. Kumar. The nil-Hecke ring and singularities of Schubert varieties. Invent. Math. **123** (1996), 471–506.

Алгебры операторов Лакса типа G_2

О.К. Шейнман

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

`sheinman@mi.ras.ru`

Впервые построена алгебра операторов Лакса, соответствующая исключительной системе корней, а именно, системе G_2. Планируется обсудить возможности аналогичного построения для остальных исключительных систем корней.

О фробениусовых алгебрах Ли

А.Г. Элашвили
Математический институт им. А. Размадзе, Тбилиси, Грузия
aelashvili@gmail.com

Пусть L — конечномерная алгебра Ли. Определим билинейную кососимметрическую форму $B_f(x, y) = f([x, y])$ по фиксированной линейной функции f на L. Если существует такая f, для которой форма B_f невырождена, то L называют фробениусовой алгеброй Ли.

В докладе будет рассказано о вычислении функции $F(n)$, определённой как число сопряжённых класов фробениусовых алгебр Ли в классе бипараболических подалгебр специальной линейной алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$ (алгебра Ли матриц порядка n с нулевым следом)б и будут приведены примеры семейств фробениусовых алгебр Ли бипараболического типа в $\mathfrak{sl}(n)$, для которых можно явно указать асимптотику их числа по n.

Основные результаты получены совместно с М. Джибладзе (Математический институт им. А. Размадзе).

Self-similar Lie and associative algebras

V.M. Petrogradsky
University of Brasilia, Brasilia, Brazil
petrogradsky@rambler.ru

The talk is based on the works joint with I. Shestakov and E. Zelmanov [1]–[6].

We discuss analogues of group theoretic constructions for Lie algebras. We consider examples of self-similar Lie algebras and their properties. In particular, we construct finitely generated restricted Lie algebras of polynomial growth with nil p-mapping. By their properties, these restricted Lie algebras resemble Grigorchuk group and Gupta–Sidki group. We discuss general examples of self-similar associative algebras generalizing a recent example of Sidki. We describe triangular decompositions for such algebras and their properties.

Список литературы

[1] V.M. Petrogradsky. Examples of self-iterating Lie algebras. J. Algebra **302** (2006), no. 2, 881–886.

[2] V.M. Petrogradsky, I.P. Shestakov. Examples of self-iterating Lie algebras, 2. J. Lie Theory **19** (2009), no. 4, 697–724.

[3] V.M. Petrogradsky, I.P. Shestakov, E. Zelmanov. Nil graded self-similar algebras. Groups Geom. Dyn. **4** (2010), no. 4, 873—900.
[4] V.M. Petrogradsky, I.P. Shestakov. On properties of Fibonacci restricted Lie algebra. J. Lie Theory **23** (2013), no. 2, 407–431.
[5] V.M. Petrogradsky, I.P. Shestakov. Self-similar associative algebras. J. Algebra **390** (2013), 100—125.
[6] I.P. Shestakov, E. Zelmanov. Some examples of nil Lie algebras. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **10** (2008), no. 2, 391–398.

Surfaces containing several circles through each point

M.B. Skopenkov[1,2]
[1]**IITP RAS, Moscow, Russia**
[2]**KAUST, Thuwal, Kingdom of Saudi Arabia**
skopenkov@rambler.ru

This is a joint work with F. Nilov, R. Krasauskas, A. Pakharev, H. Pottmann, and L. Shi.

Motivated by potential applications in architecture, we study surfaces in 3-dimensional Euclidean space containing several circles through each point. Complete classification of such surfaces is a challenging open problem. We provide some examples and reduce the problem to an algebraic one. For the latter we provide some partial advances.

An old theorem of Darboux says that a surface containing sufficiently many circles through each point must be a so-called Darboux cyclide. Darboux cyclides are algebraic surfaces of degree at most 4 and are a superset of Dupin cyclides and quadrics. They contain up to 6 circles through each point. We show that certain triples of circle families may be arranged as so-called hexagonal webs, and we provide a complete classification of all possible hexagonal webs of circles on all surfaces except spheres and planes.

Another class of surfaces with two circles through each point is obtained by a (Clifford) parallel translation of one circle along another one in space or in the 3-dimensional sphere. This class is nicely described by quaternions, and we attack general classification problem on surfaces with several circles through each point using quaternionic rational parametrizations.

Most part of the talk is elementary and is accessible for high school students. Several open problems are stated. An opportunity to see a lot of surfaces containing several circles through each point and to hold a Darboux cyclide in hands is provided.

The speaker is supported in part by the President of the Russian Federation grant MK–5490.2014.1, by “Dynasty” foundation, by the Simons–IUM fellowship, and by grant RFBR–12–01–00748–a.

Список литературы

[1] R. Krasauskas, S. Zube. Bezier-like parametrizations of spheres and cyclides using geometric algebra. In: K. Guerlebeck (ed.). Proceedings of 9th International Conference on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics. Weimar, Germany, 2011.
[2] F. Nilov, M. Skopenkov. A surface containing a line and a circle through each point is a quadric. Geom. Dedicata **163** (2013), no. 1, 301–310, см. также arXiv: `math.AG/1110.2338` (2011).
[3] H. Pottmann, L. Shi, M. Skopenkov. Darboux cyclides and webs from circles. Computer Aided Geom. Design **29** (2012), no. 1, 77–97, см. также arXiv: `math.AG/1106.1354` (2011).

Содержание

Для заметок

Научное издание

Четвёртая школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов

Москва, Россия
27 января – 1 февраля 2014 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка в пакете LaTeX, макет М.В. Игнатьев

Подписано в печать 23.01.2014.
Гарнитура Times New Roman. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Печать оперативная. Усл.-печ.л. 4,25. Уч.-изд. л. 3,52.
Тираж 150 экз. Заказ № 30.
Издательство Московского университета
Москва, ул. Большая Никитская, д.5.
Отпечатано в ООО «Википринт»
Москва, ул. Пятницкая, д.56, стр.1
Тел.: +7(495)971-64-33

www.art-bear.ru