МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИИ
ТОЛЬЯТТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Третья международная школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов,

посвящённая 75-летию Э.Б. Винберга

Тольятти, Россия
25–30 июня 2012 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

The Third International School-Conference on

Lie Algebras, Algebraic Groups and Invariant Theory

dedicated to 75$^{\text{th}}$ birthday of E.B. Vinberg

Togliatti, Russia
June 25–30, 2012

ABSTRACTS

Тольятти 2012

УДК 512.81+512.74+512.554.3
ББК 22.1
Т 66

Т 66 Третья международная школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», посвящённая 75-летию Э.Б. Винберга. Тольятти, Россия, 25–30 июня 2012 г. Тезисы докладов. — Тольятти: Изд-во ТГУ, 2012. — 64 с.

ISBN

Сборник содержит тезисы докладов участников Третьей международной школы-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», посвящённой 75-летию Э.Б. Винберга, проводившейся в Тольятти с 25 по 30 июня 2012 года Тольяттинским государственным университетом, Московским государственным университетом им. М.В. Ломоносова и Самарским государственным университетом.

Адресован научным работникам, преподавателям, студентам и аспирантам математических специальностей.

Школа-конференция включена в план проведения научных конференций, совещаний и семинаров Министерства образования и науки РФ в 2012 году.

Организация и проведение школы-конференции поддержаны грантом 12–01–06042–г Российского Фонда Фундаментальных Исследований.

ISBN

Предисловие

Третья международная школа-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», посвящённая 75-летию Э.Б. Винберга, проходила в Тольятти с 25 по 30 июня 2012 года. Её организаторами были Тольяттинский государственный университет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова и Самарский государственный университет. (Первая школа конференция проходила в 2009 году в Самаре, см. `http://ssu.samara.ru/lie2009`, а вторая — в Москве в 2011 году, см. `http://mech.math.msu.su/lie2011`.)

Программный комитет школы конференции: Э.Б. Винберг (МГУ им. М.В. Ломоносова, председатель), В.А. Артамонов (МГУ им. М.В. Ломоносова), Н.А. Вавилов (СПбГУ), М.Х. Гизатуллин (ТГУ), А.С. Клещёв (University of Oregon, США), В.И. Черноусов (University of Alberta, Канада), О.К. Шейнман (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН).

Организационный комитет школы-конференции: М.М. Криштал (ТГУ, председатель), С.В. Большаков (ТГУ, зам. председателя), Р.А. Утеева (ТГУ, зам. председателя), И.В. Аржанцев (МГУ им. М.В. Ломоносова), Н.А. Дроздов (ТГУ), М.В. Игнатьев (СамГУ), В.П. Кузьмин (ТГУ), А.Н. Панов (СамГУ), М.В. Райский (ТГУ), Ю.Х. Сагитов (ТГУ), Н.С. Симонова (ТГУ), С.В. Талалов (ТГУ).

Участниками школы были студенты, аспиранты и молодые учёные из России, Беларуси, Канады, Молдовы, США, Украины, Франции. Им были прочитаны следующие лекционные курсы:

- *Геометрическая теория инвариантов и кольца Кокса*
  (Иван Владимирович Аржанцев, МГУ им. М.В. Ломоносова);

- *Двойственность Клебша и подгруппы кремоновой группы плоскости*
  (Марат Харисович Гизатуллин, ТГУ);

- *Алгебраически замкнутые алгебры*
  (Павел Сергеевич Колесников, НГУ);

- *Представления полной линейной группы и категорные действия алгебр Каца–Муди*
  (Иван Вадимович Лосев, Northeastern University, США);

- *Метод орбит*
  (Александр Николаевич Панов, СамГУ);

- *Исчисление Шуберта, модули Демазюра и многогранники Гельфанда–Цетлина*
  (Евгений Юрьевич Смирнов, Высшая школа экономики).

Сборник содержит тезисы докладов участников школы-конференции, а также анонсы некоторых лекционных курсов.

Организация и проведение школы-конференции были поддержаны грантом 12–01–06042–г Российского Фонда Фундаментальных Исследований.

Оргкомитет

Эрнест Борисович Винберг

Третья международная школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» посвящена 75-летнему юбилею выдающегося российского математика, профессора МГУ им. М.В.Ломоносова и НМУ Эрнеста Борисовича Винберга.

Профессор Винберг внес большой вклад во многие разделы математики, связанные с алгеброй и геометрией. Своё математическое кредо он выразил в предисловии к замечательному учебнику «Курс алгебры»: «В соответствии со своим взглядом на математику я стремился заменять выкладки и сложные рассуждения идеями». Этому принципу Эрнест Борисович следует во всех своих работах, избегая длинных рутинных доказательств и всегда предлагая читателю краткие, элегантные, но при этом абсолютно строгие аргументы. Работы Винберга служат образцом глубины содержания, математического вкуса и стиля изложения уже для нескольких поколений изучающих их математиков. Указанному принципу подчинены и лекции Эрнеста Борисовича, отличительной чертой которых является четкость и продуманность изложения вместе с многообразием и содержательностью излагаемого материала и богатством математических идей.

Э.Б. Винберг окончил механико-математический факультет МГУ в 1959 году и аспирантуру по кафедре алгебры в 1961 году. С 1961 года и по сегодняшний день Эрнест Борисович работает на кафедре высшей алгебры Московского Университета (доцент с 1966 года, профессор с 1991 года). Первая научная работа Э.Б.Винберга посвящена описанию инвариантных линейных связностей на однородном пространстве G/H группы Ли G. Показано, что плоская инвариантная линейная связность на пространстве G/H полупростой группы Ли G определяет реализацию G/H в виде открытой орбиты M линейного действия группы G на векторном пространстве V и является ограничением стандартной плоской связности пространства V на M. Получена классификация однородных пространств, допускающих плоскую инвариантную связность.

Следующий цикл работ Э.Б. Винберга посвящён теории однородных выпуклых конусов. Эта теория непосредственно связана с теорией однородных областей Зигеля, в которой основополагающие результаты принадлежат Э. Картану и И.И. Пятецкому-Шапиро. Винберг построил первый пример несамомопряжённого выпуклого однородного конуса и получил полную классификацию самосопряжённых выпуклых конусов, основанную на неожиданной связи таких конусов с компактными йордановыми алгебрами. В этом контексте возникает и другой класс неассоциативных алгебр. Сам автор называет их компактными левосимметрическими нормальными алгебрами (или, сокращенно, кланами), но в современной литературе эти алгебры называют алгебрами Винберга. В этот же период были написаны известные совместные работы с И.И.Пятецким-Шапиро и С.Г. Гиндикиным, посвящённые однородным кэлеровым многообразиям.

Начиная с 1980 года, Э.Б.Винберг вновь возвращается к выпуклым конусам. Он исследует инвариантные конусы в алгебрах Ли, находит критерий существования выпуклого инвариантного конуса в пространстве конечномерного неприводимого вещественного представления полупростой группы Ли, вводит и детально изучает понятие непрерывного инвариантного упорядочения в группе Ли. Отметим, что инвариантные конусы и упорядочения тесно связаны с полугруппами в группах Ли. Результаты и идеи Винберга привели к существенному прогрессу в этой области, активные исследования здесь продолжаются и в настоящее время.

Э.Б. Винберг первым начал систематически изучать дискретные кристаллографические группы, порождённые отражениями. С конца 60-х годов прошлого века он является признанным мировым лидером этого направления. В 1983 году Винберг доказал следующую трудную теорему: в пространствах Лобачевского размерности $\geqslant 30$ отсутствуют гиперболические группы отражений компактного типа. К другим важным результатам следует отнести теорему о том, что арифметическая гиперболическая группа отражений является арифметической группой простейшего типа, то есть соизмерима с группой единиц подходящей гиперболической квадратичной решетки; критерий арифметичности гиперболической группы отражений; теорему о несуществовании арифметических дискретных групп отражений некомпактного типа в пространствах Лобачевского размерности $\geqslant 30$. Достижения Э.Б. Винберга в теории дискретных групп преобразований были отмечены премией Александра фон Гумбольдта (1997 г.).

Трудно переоценить вклад Эрнеста Борисовича в теорию инвариантов и, более общо, теорию алгебраических групп преобразований. Им была инициирована и во многом реализована программа исследования и классификации тех конечномерных представлений редуктивных групп, которые обладают определёнными «хорошими» свойствами. В основополагающей работе 1976 года (совм. с В.Г. Кацем и В.Л. Поповым) были классифицированы связные простые неприводимые линейные алгебраические группы, для которых алгебра инвариантов свободна. Предложенный там метод, основанный на изучении слайс-представлений, в настоящее время является стандартным инструментом исследования в теории инвариантов. Разработанная Винбергом теория тэта-групп позволяет доказать ряд замечательных свойств (свободность алгебры инвариантов и модуля ковариантов, конечность числа орбит в слоях морфизма факторизации и др.) для обширного класса представлений, связанных с периодическими градуировками комплексных полупростых алгебр Ли. Эта теория обобщает классические результаты о присоединённом представлении полупростой группы Ли и о представлении изотропии симметрического пространства (Б. Костант и С. Раллис).

Работы Винберга о локально транзитивных действиях алгебраических групп стимулировали развитие очень популярного в последнее время направления — теории эквивариантных вложений однородных пространств. Последняя включает в себя теорию торических многообразий, которая доставляет эффективное описание важного класса алгебраических многообразий в терминах выпуклой геометрии рациональных полиэдральных конусов и вееров. В 1972 году Эрнест Борисович опубликовал две работы (вторая — совместно с В.Л. Поповым), которые во многом положили начало использованию такого комбинаторного языка для описания действий алгебраических групп с открытой орбитой.

Центральную роль в теории эквивариантных вложений однородных пространств играет введенное Винбергом понятие сложности $c(X, G)$ действия редуктивной алгебраической группы G на неприводимом алгебраическом многообразии X. В его работе 1986 года доказано, что сложность действия редуктивной группы совпадает с модальностью действия ее борелевской подгруппы. Как показало дальнейшее развитие теории, $c(X, G)$ правильно отражает меру сложности действия, отделяя «ручные» случаи от «диких». Эрнесту Борисовичу принадлежат классификационные и структурные результаты теории аффинных алгебраических моноидов. Его работы обогатили эту область целым рядом красивых результатов, которые в дальнейшем получили существенное развитие. Так, предложенная Винбергом конструкция обертывающей полугруппы доставляет реализацию Кокса для чудесного вложения полупростой алгебраической группы присоединённого типа.

Исследования Э.Б.Винберга, его коллег и учеников по группам Ли, алгебраическим группам и теории инвариантов проходили под эгидой знаменитого семинара на механико-математическом факультете МГУ, деятельность которого продолжается и в настоящее время. Важнейшим итогом этапа работы семинара, посвященного систематическому изучению теории групп и алгебр Ли во взаимодействии с теорией алгебраических групп, явилась популярная монография Э.Б. Винберга и А.Л. Онищика «Семинар по группам Ли и алгебраическим группам».

В 2000-е годы научные интересы Эрнеста Борисовича связаны с задачами эквивариантной симплектической геометрии. Он систематически исследовал важнейший класс однородных пространств, которые ранее возникали в не связанных явно между собой задачах теории представлений, интегральной геометрии, гармонического анализа и теории алгебраических групп преобразований, — коммутативные однородные пространства, на которых алгебра инвариантных дифференциальных операторов коммутативна, а инвариантные функции на кокасательном расслоении коммутируют относительно скобки Пуассона. Винбергом и его учениками была построена структурная теория таких пространств и получена их классификация. Эрнест Борисович прочёл курс лекций по этой тематике на первой школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» в Самаре летом 2009 г.

В настоящее время Э.Б. Винберг реализует проект, названный им «трансцендентной теорией инвариантов». Основная идея проекта состоит в установлении связи между алгебраической теорией инвариантов тензоров и теорией инвариантов дискретных групп на симметрических пространствах с использованием многообразий модулей $K3$-поверхностей и отображения периодов. Эта связь позволяет изучать методами теории инвариантов различные свойства алгебр автоморфных форм. Эрнест Борисович руководит семинаром «Алгебра и геометрия» на механико-математическом факультете МГУ, который посвящён разработке этого проекта, а также активно популяризует эти идеи в публикациях и выступлениях. В частности, трансцендентной теории инвариантов был посвящен курс лекций Винберга на второй школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» в Москве зимой 2011 г.

Э.Б. Винберг является редактором и членом редколлегий ряда ведущих математических журналов, членом правления Московского Математического общества. Его трудолюбие и ответственное отношение к делу всегда служат примером для подражания.

Эрнест Борисович сочетает в себе талант математика с талантом педагога. Читаемые им лекции и специальные курсы уже более сорока лет привлекают к нему все новые поколения учеников. Как научный руководитель, Эрнест Борисович отличается особым талантом находить интересные задачи, позволяющие молодым исследователям самостоятельно продвигаться в изучении предмета и находить свой путь в математике. На этом пути они всегда могут рассчитывать на его поддержку.

Такие качества Эрнеста Борисовича, как внимание к людям, доброжелательность, объективность и принципиальность, снискали ему любовь и уважение коллег и многочисленных учеников. Многие лекторы и участники настоящей школы — ученики Эрнеста Борисовича и его учеников.

Эрнест Борисович Винберг является бессменным председателем программного комитета и одним из ключевых лекторов школ-конференций «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». От имени программного и организационного комитетов школы-конференции от всей души желаем юбиляру крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов!

Геометрическая теория инвариантов и кольца Кокса

И.В. Аржанцев
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
arjantse@mccme.ru

Первая лекция будет посвящена центральной конструкции геометрической теории инвариантов — конструкции Мамфорда факторизации множества полустабильных точек по действию редуктивной группы — и её обобщениям. Также мы обсудим комбинаторные методы геометрической теории инвариантов применительно к действиям алгебраических торов. Во второй лекции будет определён полезный инвариант алгебраического многообразия — его тотальное координатное кольцо, или кольцо Кокса. Мы докажем однородную факториальность кольца Кокса, построим с его помощью каноническую фактор-реализацию многообразия, а также определим широкий класс многообразий (Mori Dream Spaces), элементы которого допускают комбинаторное описание в духе торической геометрии.

Список литературы

[1] Э.Б.Винберг, В.Л.Попов. Теория инвариантов. Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фунд. направления **55**. М.: ВИНИТИ, 1989, с. 137–309.

[2] I.V. Arzhantsev, U. Derenthal, J. Hausen, A. Laface. Cox rings see arXiv: `math.AG/1003.4229`.

[3] I.V. Arzhantsev, J. Hausen. Geometric Invariant Theory via Cox rings. J. Pure Appl. Algebra **213** (2009), pp. 154–172.

[4] D.A. Cox. The homogeneous coordinate ring of a toric variety. J. Alg. Geom. **4** (1995), pp. 17–50.

[5] I. Dolgachev. Lectures on Invariant Theory. London Mathematical Society Lecture Note Series **296**. Cambridge University Press, 2003.

[6] Y. Hu, S. Keel. Mori Dream Spaces and GIT. Michigan Math. J. **48** (2000), pp. 331–348.

[7] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan. Geometric Invariant Theory. Third edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **34**. Springer–Verlag, Berlin, 1994.

Пополнения коммутативных алгебраических групп коранга один

И.В. Аржанцев, П.Ю. Котенкова
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
arjantse@mccme.ru, kotpy@mail.ru

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики.

Напомним, что нормальное алгебраическое многообразие X называется *торическим*, если оно допускает регулярное действие алгебраического тора T с открытой орбитой. Обозначим через M решётку характеров тора T, через N — решётку однопараметрических подгрупп в T. Между N и M существует невырожденное спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle : N \times M \to \mathbb{Z}$. Каждому торическому многообразию X соответствует веер Σ в пространстве $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, состоящий из выпуклых рациональных полиэдральных конусов и определяющий многообразие с точностью до T-эквивариантного изоморфизма, см., например, [4]. Пусть $\Sigma(1)$ — множество рёбер веера Σ и n_ρ — примитивный вектор на ребре ρ.

Определение. *Корнем Демазюра* веера Σ называется элемент $e \in M$, для которого существует такое ребро $\rho \in \Sigma(1)$, что $\langle n_\rho, e \rangle = -1$ и $\langle n_{\rho'}, e \rangle \geqslant 0$ для всех $\rho' \in \Sigma(1) \backslash \{\rho\}$.

Данное понятие было введено в работе [3]. Известно, что если X — аффинное или полное торическое многообразие, то корни Демазюра взаимно однозначно соответствуют действиям на X одномерных унипотентных групп, нормализуемым тором T.

Пусть $\mathbb{G}_m = (\mathbb{K} \setminus \{0\}, \times)$ и $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$ — мультипликативная и аддитивная группы основного поля $\mathbb{K}$ соответственно. Естественным обобщением торических многообразий являются многообразия с локально транзитивным действием группы $(\mathbb{G}_m)^k \times (\mathbb{G}_a)^p$, где $k, p \in \mathbb{N}$. Нас будет интересовать случай $p = 1$. Введём обозначение $\mathbb{G}_n = (\mathbb{G}_m)^{n-1} \times \mathbb{G}_a$. Основным результатом доклада является следующая теорема, доказательство которой использует описание однородных локально нильпотентных дифференцирований алгебр функций аффинных многообразий с действием тора сложности один, см. [5], и реализацию Кокса, см. [1] и [2].

Теорема. *Пусть X — полное нормальное алгебраическое многообразие с заданным локально транзитивным действием группы $\mathbb{G}_n$. Тогда X — торическое многообразие. Более того, каждое локально транзитивное $\mathbb{G}_n$-действие на X задаётся корнем Демазюра веера многообразия X.*

Отметим, что для полного торического многообразия существует лишь конечное число корней Демазюра. Поэтому на полном многообразии существует с точностью до эквивариантного изоморфизма лишь конечное число различных $\mathbb{G}_n$-действий с открытой орбитой.

Список литературы

[1] И.В. Аржанцев. О факториальности колец Кокса. Мат. заметки **85** (2009), №5, с. 643—651.

[2] D.A. Cox. The homogeneous coordinate ring of a toric variety. J. Alg. Geom. **4** (1995), pp. 17–50.

[3] M. Demazure. Sous-groupes algebriques de rang maximum du groupe de Cremona. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **3** (1970), pp. 507–588.

[4] W. Fulton. Introduction to toric varieties. The William H. Roever lectures in geometry, Ann. of Math. Stud. **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

[5] A. Liendo. Affine $\mathbb{T}$-varieties of complexity one and locally nilpotent derivations. Transform. Groups **15** (2010), no. 2, pp. 389–425.

Касательные конусы многообразий Шуберта

М.А. Бочкарев

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

mbochk@gmail.com

Пусть G — простая комплексная группа Ли, B — её борелевская подгруппа. Обозначим через $X = G/B$ обобщенное многообразие полных флагов. Известно, что действие $B : X$ имеет конечное число орбит X_w°, нумеруемых элементами группы Вейля $w \in W$. Замыкание клетки Шуберта $X_w = \overline{X_w^\circ} \subseteq X$ называется многообразием Шуберта.

Основной целью работы является исследование касательного конуса C_w к многообразию Шуберта X_w в точке X_e, где e — единица группы Вейля W.

Нашей целью будет проверка следующих гипотез.

Гипотеза 1. *Касательные конусы многообразий, соответствующих взаимно обратным элементам группы Вейля, совпадают, то есть* $C_w = C_{w^{-1}}$.

Гипотеза 2. *Если касательные конусы многообразий Шуберта совпадают, то соответствующие элементы сопряжены.*

Гипотеза 3. *Пусть $G \supset H$ — полупростая подгруппа такая, что её касательная алгебра $\mathfrak{h}$ нормализуется подалгеброй Картана $\mathfrak{t}_G$. Тогда в $\mathfrak{u}_G^*$ верно, что $\overline{B_G \cdot C_w(H)} = C_w(G)$, причём для каждой неприводимой компоненты $Y \subset C_w(H)$ множество $\overline{B_G \cdot Y}$ будет одной из неприводимых компонент конуса $C_w(G)$.*

Гипотеза 4. *Всякий нильпотентный идеал в $\mathfrak{b}$ имеет вид $\mathfrak{u}_w$ для некоторого элемента $w \in W$.*

Гипотезы 1–3 были поставлены в работе [3] и были проверены там для полупростых групп типа A_2, A_3 и A_4.

В данной работе Гипотеза 1 доказывается в общем случае, предъявляются контрпримеры для Гипотез 2–3. Гипотеза 4 доказана для групп типа A_n и опровергнута в случаях B_3, C_3, G_2.

Список литературы

[1] Дж. Хамфри. Линейные алгебраические группы. М., Наука, 1980.
[2] P. Cellini, P. Papi. ad-Nilpotent ideals of a Borel subalgebra. J. Algebra **225** (2000), pp. 130-141.
[3] Д.Ю. Елисеев, А.Н. Панов. Касательные конусы многообразий Шуберта для A_n малого ранга. Записки научных семинаров ПОМИ **394** (2011), с. 218–225, см. также arXiv: `math.RT/1109.0399`.
[4] A.N. Panov. Diagram methods in research on coadjoint orbits, see arXiv: `math.RT/0902.4584`.

Расстановки ладей и замыкания орбит борелевской подгруппы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

А.С. Васюхин, М.В. Игнатьев
Самарский государственный университет, Самара, Россия
childofmalkav@mail.ru, mihail.ignatev@gmail.com

Пусть $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, B — её борелевская подгруппа, состоящая из верхнетреугольных матриц, U — унипотентный радикал группы B; пусть $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{u}$ — алгебры Ли групп G, B, U соответственно. Группа B действует на $\mathfrak{g}$ сопряжениями; это действие можно ограничить на $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{u}$, откуда автоматически возникает действие B на сопряжённом пространстве $\mathfrak{u}^*$. Мы будем называть это действие *коприсоединённым*:

$$b.\lambda(x) = \lambda(b^{-1}xb), \; b \in B, \; x \in \mathfrak{u}, \; \lambda \in \mathfrak{u}^*.$$

Отождествим множество положительных корней Φ^+ системы корней $\Phi = A_{n-1}$ с множеством пар (j, i), $1 \leqslant j < i \leqslant n$, тогда матрицы e_α, $\alpha \in \Phi^+$, образуют базис $\mathfrak{u}$, где $e_\alpha = e_{j,i}$, $\alpha = (j, i)$, — стандартная матричная единица. Обозначим через $\{e_\alpha^*,\ \alpha \in \Phi^+\}$ двойственный базис пространства $\mathfrak{u}^*$. *Расстановкой ладей* называется произвольное подмножество $P \subseteq \Phi^+$, состоящее из корней с попарно неположительными скалярными произведениями; обозначим множество всех расстановок ладей через $\mathcal{R}$. С каждой расстановкой $P \in \mathcal{R}$ можно связать коприсоединённую орбиту $\Omega_P \subset \mathfrak{u}^*$ группы B — по определению, это орбита элемента

$$X_P = \sum_{\alpha \in P} e_\alpha^* \in \mathfrak{u}^*.$$

Нас будет интересовать, при каких условиях на расстановки P, $P' \in \mathcal{R}$ орбита Ω_P лежит в замыкании орбиты $\Omega_{P'}$. В работе [1] ответ на этот вопрос получен для специального класса расстановок, а именно, для ортогональных подмножеств в A_{n-1}^+ (см. также аналогичные результаты в [2] для ортогональных подмножеств в C_n^+ и статью А. Мельниковой [5], результаты которой в каком-то смысле «двойственны» результатам [1]).

Оказалось, что ответ может быть дан в следующих комбинаторных терминах. Пусть R_P — строго нижнетреугольная матрица (с нулями на диагонали), (i, j)-й элемент которой при $i > j$ равен количеству корней (b, a) в P таких, что $a \geqslant i$, $b \leqslant j$. Будем писать $R_P \leqslant R_{P'}$, если это неравенство верно для каждого элемента этих матриц. Обозначим также через w_P инволюцию (элемент второго порядка) в S_n, равную произведению отражений, соответствующих корням из ортогонального подмножества P.

Теорема. [1, Theorem 1.1] *Пусть P, P' — ортогональные подмножества в A_{n-1}^+. Следующие условия эквивалентны*:

i) $\Omega_P \subseteq \overline{\Omega}_{P'}$;

ii) $R_P \leqslant R_{P'}$;

iii) $w_P \leqslant w_{P'}$ *в смысле порядка Брюа.*

Для доказательства эквивалентности этих условий использованы комбинаторные результаты Ф. Инчитти [3], [4], а также явное описание ортогональных подмножеств, *ближайших* к данному ортогональному подмножеству P в смысле частичного порядка, индуцированного порядком на матрицах R_P. Другими словами, для произвольного ортогонального подмножества $P \in \Phi^+$ описано множество $N^\perp(P)$, состоящее из таких ортогональных подмножеств P', что $R_{P'} < R_P$ и не существует ортогонального подмножества S, удовлетворяющего условию $R_{P'} < R_S < R_P$. Отталкиваясь от этих результатов, можно сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза. *Пусть P, $P' \in \mathcal{R}$ — произвольные расстановки ладей в A_{n-1}^+. Тогда условия $\Omega_P \subseteq \overline{\Omega}_{P'}$ и $R_P \leqslant R_{P'}$ эквивалентны.*

Для доказательства этой гипотезы достаточно описать множество расстановок ладей, ближайших к P, то есть множество

$$N(P) = \{P' \in \mathcal{R} \mid R_{P'} < R_P \text{ и не существует } \\ \text{такой } S \in \mathcal{R}, \text{ что } R_{P'} < R_S < R_P\}.$$

В докладе будет дано описание части множества $N(P)$, а также сформулирована гипотеза о его строении для всех $P \in \mathcal{R}$, доказать которую мы надеемся в ближайшее время.

Список литературы

[1] M.V. Ignatyev. Combinatorics of B-orbits and the Bruhat–Chevalley order on involutions. Transform. Groups, to appear, see also arXiv: `math.RT/1101.2189`.
[2] М.В. Игнатьев. Порядок Брюа–Шевалле на инволюциях в гипероктаэдральной группе и комбинаторика замыканий B-орбит. Записки научных семинаров ПОМИ, принята к печати, см. также arXiv: `math.RT/1112.2624`.
[3] F. Incitti. Bruhat order on the involutions of classical Weyl groups. Ph.D. thesis. Dipartimento di Matematika “Guido Castelnuovo”, Università di Roma “La Sapienza”, 2003.
[4] F. Incitti. The Bruhat order on the involutions of the symmetric group. J. Alg. Combin. **20** (2004), no. 3, pp. 243–261.
[5] A. Melnikov. Description of B-orbit closures of order 2 in upper-triangular matrices. Transform. Groups **11** (2006), no. 2, pp. 217–247.

Кольца конечномерных представлений классических супералгебр Ли

А.П. Веселов[1], А.Н. Сергеев[2]
[1]Loughborough University, Loughborough, UK
[2]Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия
`A.P.Veselov@lboro.ac.uk`, `SergeevAN@info.sgu.ru`

Один из основных результатов теории конечномерных представлений простых комплексных алгебр Ли можно сформулировать в следующем виде ([1], Теорема 23.24).

Кольцо конечномерных представлений $R(\mathfrak{g})$ полупростой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ изоморфно кольцу $\mathbb{Z}[P]^W$ W-инвариантов целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}[P]$, где P — соответствующая решетка весов и W — группа Вейля. Изоморфизм задается отображением, которое каждому модулю сопоставляет его характер $Ch\colon R(\mathfrak{g}) \to \mathbb{Z}[P]^W$.

Цель доклада — дать обобщение этих результатов на комплексные классические супералгебры Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ будет основной классической супералгеброй Ли (см. [2]), отличной от $A(1,1)$, и $\mathfrak{h}$ будет её подалгеброй Картана, $P_0 \subset \mathfrak{h}^*$ будет группой весов $\mathfrak{g}_0$, W_0 будет группой Вейля $\mathfrak{g}_0$ и $\mathbb{Z}[P_0]^{W_0}$ будет кольцом W_0-инвариантов в целочисленном групповом кольце $\mathbb{Z}[P_0]$. Разложение $\mathfrak{g}$ относительно присоединенного действия $\mathfrak{h}$ дает (обобщённую) систему корней $R \subset \mathfrak{h}^*$. На $\mathfrak{h}^*$ существует невырожденная билинейная форма, при этом некоторые корни являются изотропными. Определим *кольцо экспоненциальных суперинвариантов* $J(\mathfrak{g})$, заменяющее кольцо инвариантов группы Вейля в случае классических алгебр Ли:

$$J(\mathfrak{g}) = \{f \in \mathbb{Z}[P_0]^{W_0} : D_\alpha f \in (e^\alpha - 1) \text{ для любого изотропного корня } \alpha\},$$

где $(e^\alpha - 1)$ обозначает главный идеал в $\mathbb{Z}[P_0]^{W_0}$, порожденный $e^\alpha - 1$, и производная D_α определяется свойством $D_\alpha(e^\beta) = (\alpha, \beta)e^\beta$.

Основным результатом является следующая (см. [3])

Теорема. *Кольцо Гротендика $K(\mathfrak{g})$ конечномерных представлений основной классической супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ изоморфно кольцу $J(\mathfrak{g})$. Изоморфизм задается отображением взятия суперхарактера $Sch\colon K(\mathfrak{g}) \to J(\mathfrak{g})$.*

Элементы $J(\mathfrak{g})$ могут быть также описаны как инварианты действия некоторого группоида $\mathfrak{W}$, который естественно назвать *группоидом Вейля.*

Список литературы

[1] W. Fulton., J. Harris. Representation Theory. A First Course. Springer, New York, 1991.

[2] V.G. Kac. Lie superalgebras. Adv. Math **26** (1977), no. 1, pp. 8–96.

[3] A.N. Sergeev, A.P. Veselov. Grothendieck rings of basic classical Lie superalgebras. Ann. Math. **173** (2011), no. 2, pp. 663–703.

О когомологиях алгебры Ли векторных полей
на орбифолде $S^1/\mathbb{Z}_2$

Е.Ю. Волокитина
Саратовский государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия
evgenia.yu@gmail.com

В конце 60-х годов И.М. Гельфанд и Д.Б. Фукс доказали, что кольцо $H^*(\mathfrak{U}(S^1))$ изоморфно тензорному произведению кольца полиномов с одной двумерной образующей и внешней алгебры с одной трехмерной образующей.

Пусть S^1 — единичная окружность в плоскости комплексного переменного z. Рассматривается задача о нахождении когомологий алгебры Ли гладких векторных полей орбифолда $S^1/\mathbb{Z}_2$, получающегося из окружности действием группы $\mathbb{Z}_2$, порождённой отражением относительно оси x.

Пусть t — угловой параметр на окружности, тогда гладкими функциями на орбифолде $S^1/\mathbb{Z}_2$ являются чётные периодические гладкие функции на $\mathbb{R}$. Векторными полями на $S^1/\mathbb{Z}_2$ являются дифференцирования алгебры гладких функций на $S^1/\mathbb{Z}_2$. Любое гладкое векторное поле на окружности представляется в виде $X(t)\dfrac{d}{dt}$, где $X(t)$ — гладкая периодическая функция. Аналогичным образом гладкое векторное поле на орбифолде $S^1/\mathbb{Z}_2$ можно представить в виде $X(t)\dfrac{d}{dt}$, где $X(t)$ — нечётная периодическая гладкая функция. Таким образом, алгебра Ли $\mathfrak{U}(S^1/\mathbb{Z}_2)$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{U}(S^1)$.

Используя доказательство Гельфанда–Фукса и теорию обобщенных функций на окружности, мы получили следующий результат.

Теорема 1. *Алгебра когомологий $H^*(\mathfrak{U}(S^1/\mathbb{Z}_2))$ порождается двумя одномерными образующими α_1 и α_2 и одной двумерной образующей β, где*

$$\alpha_1(X(t)\frac{d}{dt}) = \frac{dX}{dt}(0), \qquad \alpha_2(X(t)\frac{d}{dt}) = \frac{dX}{dt}(\pi),$$

$$\beta(X(t)\frac{d}{dt}, Y(t)\frac{d}{dt}) = \int\limits_0^\pi \left(\frac{d^2X}{(dt)^2}\frac{dY}{dt} - \frac{dX}{dt}\frac{d^2Y}{(dt)^2}\right) dt.$$

Из Теоремы 1 следует, что существуют два нетривиальных двумерных класса когомологий β и $\alpha_1 \wedge \alpha_2$. Они порождают два нетривиальных неэквиалентных расширения алгебры Ли $\mathfrak{U}(S^1/\mathbb{Z}_2)$. Изучение этих расширений является одним из направлений продолжения исследования. Аналогичное расширение для алгебры Ли $\mathfrak{U}(S^1)$, называемое алгеброй Вирасоро, имеет многочисленные применения в математике и физике.

U-инварианты присоединённого представления

К.А. Вяткина, А.Н. Панов
Самарский государственный университет,
Самара, Россия
vjatkina.k@gmail.com, apanov@list.ru

Рассматривается присоединённое представление $\mathrm{Ad}_g A = gAg^{-1}$ группы $\mathrm{GL}(n, K)$, где K — произвольное поле нулевой характеристики, в алгебре матриц $\mathrm{Mat}(n, K)$. Пусть U — подгруппа верхнетреугольных матриц в $\mathrm{GL}(n, K)$ с единицами на диагонали, $X = (x_{ij})$ — матрица общего вида из $\mathrm{Mat}(n, K)$, $X^* = (x^*_{ij})$ — присоединённая матрица: $X \cdot X^* = X^* \cdot X = \det X \cdot E$.

Для любого $1 \leqslant k \leqslant n$ через J_k обозначим левый нижний угловой минор матрицы, получающийся из X удалением первых $n - k$ строк и последних $n - k$ столбцов.

С каждым минором J_k свяжем систему из k определителей $J_{k,i}$, где $0 \leqslant i \leqslant k - 1$. Определитель $J_{k,0}$ совпадает с минором J_k. В определителе $J_{k,i}$, где $1 \leqslant i \leqslant k - 1$, первые $k - i$ строк совпадают с последними $k - i$ строками из минора J_k, а последние i строк совпадают с аналогичными строками из минора $J_k(X^*)$ присоединённой матрицы $X^* = (x^*_{ij})$.

Пример 1. Случай $n = 2$, $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, $X^* = \begin{pmatrix} x^*_{11} & x^*_{12} \\ x^*_{21} & x^*_{22} \end{pmatrix}$, $J_{1,0} = x_{2,1}$, $J_{2,0} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}$, $J_{2,1} = \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x^*_{21} & x^*_{22} \end{vmatrix}$.

Пример 2. Случай $n = 3$, $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$, $X^* = \begin{pmatrix} x^*_{11} & x^*_{12} & x^*_{13} \\ x^*_{21} & x^*_{22} & x^*_{23} \\ x^*_{31} & x^*_{32} & x^*_{33} \end{pmatrix}$, $J_{1,0} = x_{3,1}$, $J_{2,0} = \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix}$, $J_{2,1} = \begin{vmatrix} x_{31} & x_{32} \\ x^*_{31} & x^*_{32} \end{vmatrix}$, $J_{3,0} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$, $J_{3,1} = \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x^*_{31} & x^*_{32} & x^*_{33} \end{vmatrix}$, $J_{3,2} = \begin{vmatrix} x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x^*_{21} & x^*_{22} & x^*_{23} \\ x^*_{31} & x^*_{32} & x^*_{33} \end{vmatrix}$.

Теорема. *Поле U-инвариантов присоединённого представления группы* $\mathrm{GL}(n,K)$ *есть поле рациональных функций от* $\{J_{k,i},\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ 0 \leqslant i \leqslant k-1\}$.

Целые модели Нерона двумерных алгебраических торов над локальными полями

М.В. Грехов
Самарский государственный университет, Самара, Россия
natdem@bk.ru

В данной работе предлагается явная конструкция модели Нерона алгебраических торов размерности 2 над полями p-адических чисел.

Пусть T — алгебраический тор, определённый над k (конечным расширением поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$), L — его минимальное поле разложения, $\hat{T}$ — группа характеров, $G = Gal(L/k)$, $n = [L:k]$, $d = \mathrm{rk}\,\hat{T}$.

Целой моделью T называется $\mathcal{O}_k$-схема X (где $\mathcal{O}_k \subset k$ — кольцо целых элементов k) такая, что $X \otimes_{\mathcal{O}_k} k \cong T$. Соответствующие определению модели могут быть самыми разнообразными, но классическими являются две: модели Воскресенского и Нерона. Обе они полностью определяются расширением L/k и группой $\hat{T}$, рассматриваемой как G-модуль.

Модель Воскресенского (стандартная целая модель) хорошо изучена в работах [1] и [2]. Пусть ω_j, $j = 1,\ldots,n$, — целый базис L над k. Известно, что имеет место разложение $L[\hat{T}] = B\omega_1 \oplus B\omega_2 \oplus \ldots \oplus B\omega_n$, где $L[\hat{T}]$ — групповое кольцо T, $B = L[\hat{T}]^G$ — координатное кольцо T. В частности, для базисных характеров $\hat{T}$ разложение будет вида $\chi_i = \omega_1 x_{i1} + \omega_2 x_{i2} + \ldots + \omega_n x_{in}$, а для обратных им ${\chi_i}^{-1} = \omega_1 y_{i1} + \omega_2 y_{i2} + \ldots + \omega_n y_{in}$, где $i = 1,\ldots,d$, причём B как алгебра Хопфа порождена x_{ij}, y_{lm}, $i,l = 1,\ldots,d$, $j,m = 1,\ldots,n$. Моделью Воскресенского тора T называется рассматриваемый как $\mathcal{O}_k$-схема спектр кольца $A(\hat{T}) = \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{lm}]$. Наиболее важное свойство этой модели — она конструктивна, то есть определение даёт алгоритм её построения в явном виде для произвольного тора. Также она всегда имеет конечный тип.

Целая модель X является гладкой, если её редукция $\overline{X} = X \otimes_{\mathcal{O}_k} r_k$ (где $r_k = \mathcal{O}_k/\wp$ – поле вычетов, $\wp$ – простой идеал) будет приведённой схемой.

Модель Воскресенского может не быть гладкой. Известно (объяснение приводится в работе [2]), что это имеет место только в случае дикого ветвления L над k, то есть когда индекс ветвления $e(L/k) > 1$ и $\mathrm{char}\, r_k \mid e$.

В отличие от модели Воскресенского, модель Нерона, подробно описанная в работе [3], всегда гладкая, поэтому является канонической. Конечный тип она имеет, вообще говоря, не всегда. Моделью Нерона тора T называется такая гладкая целая модель X, которая удовлетворяет свойству отображения Нерона: для любой гладкой $\mathcal{O}_k$-схемы Y любой k-морфизм $u_k\colon Y \otimes_{\mathcal{O}_k} k \to X \otimes_{\mathcal{O}_k} k$ единственным образом продолжается до $\mathcal{O}_k$-морфизма $u\colon Y \to X$.

Это определение не даёт алгоритма построения модели Нерона, явного описания алгоритма в настоящее время и не существует. То есть модель неконструктивна, хотя доказано её существование для произвольного тора. Известно, что если модель Воскресенского является гладкой, то модель Нерона совпадает с ней, а если нет, модель Нерона можно построить за конечное число шагов путём сглаживания модели Воскресенского. Сглаживание представляет собой построение последовательности моделей T^i, где T^0 — модель Воскресенского, а каждая следующая модель T^{i+1} является дилатацией определённой замкнутой приведённой подсхемы $Z^i \subset T^i \otimes r_k$.

Но в явной форме процесс сглаживания до сих пор не был описан. В данной работе он реализован для частного случая двумерных торов над полями p-адических чисел. На основании известной классификации двумерных торов определяются те случаи, в которых модель Воскресенского не будет гладкой, для них проводится построение модели и её сглаживание до получения модели Нерона.

Список литературы

[1] В.Е. Воскресенский. Алгебраические торы. М., Наука, 1977.

[2] S. Yu. Popov. Standard integral models of algebraic tori. Preprintreihe des SFB 478 — Geometrische Strukturen in der Mathematik, 2003.

[3] S. Bosch, W. Lutkebohmert, M. Rayn. Néron models. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990.

Канонические представления на плоскости Лобачевского дуального переменного

Ю.В. Дунин[1]
Тамбосвский государственный университет им. Г.Р. Державина, Тамбов, Россия
duninne@rambler.ru

В настоящей работе мы вводим для плоскости Лобачевского дуального переменного $\mathcal{L}$ (называемой также плоскостью Лобачевского–Галилея) канонические представления аналогично классической плоскости Лобачевского, см. [2].

Алгебра Λ дуальных чисел есть двумерная алгебра над полем $\mathbb{R}$, состоящая из элементов $z = x + jy$, $x, y \in \mathbb{R}$, с соотношением $j^2 = 0$. Числом, сопряжённым дуальному числу $z = x + jy$, называется число $\overline{z} = x - jy$. Абсолютная величина $|z|$ числа z есть $\sqrt{z\overline{z}} = |x|$.

Множество $\mathcal{L}$ задается неравенством $z\overline{z} < 1$ на плоскости Λ. Это вертикальная полоса, ограниченная прямыми $x = -1$ и $x = 1$.

Приведем некоторый материал из [1] о группе G движений многообразия $\mathcal{L}$ и её представлениях T_σ, $\sigma \in \mathbb{C}$. Группа G состоит из дробно-линейных преобразований

$$z \mapsto z \cdot g = \frac{az + \overline{b}}{bz + \overline{a}}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \quad a\overline{a} - b\overline{b} = 1, \quad a, b \in \Lambda. \tag{1}$$

Она сохраняет меру $(1 - z\overline{z})^{-2} dxdy$. Обозначим $a = \alpha + jp$, $b = \beta + jq$. Условие $a\overline{a} - b\overline{b} = 1$ равносильно тому, что $\alpha^2 - \beta^2 = 1$, так что $\alpha^2 \geqslant 1$, то есть $\alpha \geqslant 1$ или $\alpha \leqslant -1$. Следовательно, группа $\mathrm{SU}(1,1;\Lambda)$, образованная матрицами g, состоит из двух связных кусков. Для связной компоненты единицы выполняется $\alpha \geqslant 1$. Она изоморфна группе G, поэтому сохраним для неё обозначение G. Параметры α и β матрицы $g \in G$ можно записать в виде $\alpha = \operatorname{ch} t$ и $\beta = \operatorname{sh} t$, где $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, всякую матрицу $g \in G$ можно записать в виде

$$g = g(t) + j\, c(p, q), \tag{2}$$

где

$$g(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}, \quad c(p, q) = \begin{pmatrix} p & q \\ -q & -p \end{pmatrix}. \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проекты 1.1.2/9191 и 1.1.11, и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», проект 14.740.11.0349.

Стационарной подгруппой точки $z = 0$ служит подгруппа K, состоящая из диагональных матриц:

$$k = \begin{pmatrix} 1 + jp & 0 \\ 0 & 1 - jp \end{pmatrix},$$

так что $\mathcal{L} = G/K$.

Представление T_σ, $\sigma \in \mathbb{C}$, группы G действует в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ финитных функций $\varphi(s)$ на $\mathbb{R}$ класса C^∞ по формуле

$$T_\sigma(g)\varphi(s) = \varphi(s + t) \cdot \exp\left\{\sigma[-p \operatorname{sh}(2s + t) + q \operatorname{ch}(2s + t)]\right\},$$

где t, p, q — параметры элемента g, см. (2), (3). Эрмитова форма (скалярное произведение из $L^2(\mathbb{R}, ds)$)

$$\langle \psi, \varphi \rangle_{\mathbb{R}} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s)\overline{\varphi(s)}\, ds$$

инвариантна относительно пары $(T_\sigma, T_{-\overline{\sigma}})$, то есть

$$\langle T_\sigma(g)\psi, \varphi \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \psi, T_{-\overline{\sigma}}(g^{-1})\varphi \rangle_{\mathbb{R}}, \tag{4}$$

так что для чисто мнимых σ представление T_σ унитаризуемо. С помощью (4) представление T_σ распространяется на пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ обобщённых функций ψ на $\mathbb{R}$.

Каноническое представление R_λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, группы G действует в пространстве $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ финитных функций $f(z)$ на $\mathcal{L}$ класса C^∞ по формуле

$$\begin{aligned} \left(R_\lambda(g)f\right)(z) &= f(z \cdot g)\, |bz + \overline{a}|^{-2\lambda - 4} \\ &= f(z \cdot g)\, (\operatorname{sh} t \cdot x + \operatorname{ch} t)^{-2\lambda - 4}, \end{aligned} \tag{5}$$

формула (5) копирует соответствующую формулу из [2]. При $\lambda = -2$ это представление становится квазирегулярным представлением, см. [1].

Эрмитова форма

$$\langle f,\, h \rangle_{\mathcal{L}} = \int_{\mathcal{L}} f(z)\, \overline{h(z)}\, dx\, dy\,, \quad z = x + jy,$$

инвариантна относительно пары $(R_\lambda, R_{-\overline{\lambda}-2})$:

$$\langle R_\lambda(g)f,\, h \rangle_{\mathcal{L}} = \langle f,\, R_{-\overline{\lambda}-2}(g^{-1})h \rangle_{\mathcal{L}}.$$

Это позволяет распространить представление R_λ на пространство $\mathcal{D}'(\overline{\mathcal{L}})$ обобщённых функций на Λ с носителями в $\overline{\mathcal{L}}$, в частности, на пространство обобщённых функций, сосредоточенных на вертикальных прямых $x = \pm 1$. Получающиеся таким образом граничные представления раскладываются по представлениям ещё одной серии представлений группы G, описанной в [1]. Они не участвуют в разложении канонических представлений R_λ на $\mathcal{D}(\mathcal{L})$. Причина этого состоит в том, что для функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ её преобразование Пуассона $(P_{\lambda,\sigma}\,\varphi)\,(z)$, см. ниже, имеет носитель, лежащий в полосе, более узкой, чем $\mathcal{L}$ (в полосе $|x| < 1-\varepsilon < 1$), поэтому имеет нулевую асимптотику при $|x| \to 1$. Поэтому в этой статье граничные представления мы рассматривать не будем.

Введём два сплетающих оператора, связанных с каноническим представлением R_λ. Это преобразование Пуассона $P_{\lambda,\sigma}\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathcal{L})$ и преобразование Фурье $F_{\lambda,\sigma}\colon \mathcal{D}(\mathcal{L}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R})$, определяемые формулами

$$\begin{aligned}
(P_{\lambda,\sigma}\,\varphi)\,(z) &= (1-x^2)^{-\lambda-2}\varphi(\xi)\,\exp\left\{\sigma\frac{y}{1-x^2}\right\},\\
(F_{\lambda,\sigma}\,f)\,(s) &= (1-c^2)^{\lambda+1}\int_{-\infty}^{\infty} f(c+iy)\,\exp\left\{\sigma\frac{y}{1-c^2}\right\}dy,
\end{aligned}$$

здесь $x = \operatorname{th}\xi$, $c = \operatorname{th}s$. Преобразование Пуассона сплетает $T_{-\sigma}$ с R_λ, а преобразование Фурье сплетает R_λ с T_σ:

$$\begin{aligned}
R_\lambda(g)P_{\lambda,\sigma} &= P_{\lambda,\sigma}T_{-\sigma}(g),\\
F_{\lambda,\sigma}R_\lambda(g) &= T_\sigma(g)F_{\lambda,\sigma},
\end{aligned}$$

где $g \in G$. Преобразования Пуассона и Фурье сопряжены друг другу:

$$\langle P_{-\lambda-2,\sigma}\,\varphi, f\rangle_{\mathcal{L}} = \langle \varphi, F_{\overline{\lambda},\overline{\sigma}}f\rangle_{\mathbb{R}}.$$

Теорема 1. *Каноническое представление R_λ группы G в пространстве $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ разлагается по представлениям $T_{i\rho}$ (здесь $i = \sqrt{-1}$ — комплексное число, $\rho \in \mathbb{R}$) с кратностью единица следующим образом. Сопоставим функции $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ совокупность её компонент Фурье $F_{\lambda,i\rho}f$, $\rho \in \mathbb{R}$. Это соответствие G-эквивариантно. Имеет место формула обращения*:

$$f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_{\lambda,-i\rho}\,F_{\lambda,i\rho}\,f\,d\rho.$$

Список литературы

[1] Yu.V. Dunin. Harmonic analysis on the Lobachevsky–Galilei plane. Вестник Тамбовского университета. Серия: Ест. техн. науки **16** (2011), №6, с. 1641–1645.

[2] V.F. Molchanov, L.I. Grosheva. Canonical and boundary representations on the Lobachevsky plane. Acta Appl. Math. **73** (2002), no. 1–2, pp. 59–77.

Многочлены Костанта и касательные конусы к многообразиям Шуберта

Д.Ю. Елисеев, М.В. Игнатьев
Самарский государственный университет, Самара, Россия
`dmitriyelis@gmail.com`, `mihail.ignatev@gmail.com`

Пусть G — полупростая комплексная алгебраическая группа, T — максимальный тор в G, $\Phi = \Phi(G, T)$ — система корней, W — её группа Вейля, B — борелевская подгруппа, содержащая T. Обозначим через $\mathcal{F} = G/B$ многообразие флагов, через $X_w^\circ = B\dot{w}B \bmod B$ — клетку Шуберта, соответствующую элементу $w \in W$ ($\dot{w}$ — любой представитель w в G), а через $X_w = \overline{X_w^\circ}$ — многообразие Шуберта. (Как известно, $\mathcal{F} = \bigcup_{w \in W} X_w^\circ$.) Для изучения геометрии многообразия X_w важную роль играет вычисление касательного конуса C_w в точке $p = \mathrm{id} \bmod B \in X_w$, см., к примеру, [1].

В работе [3] конусы C_w были вычислены для всех $w \in W$ для $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ при $n \leqslant 5$. На основе этих вычислений А.Н. Пановым был выдвинут ряд гипотез о строении касательных конусов в общем случае. В частности, он предположил, что если касательные конусы C_w и $C_{w'}$ совпадают, то w и w' сопряжены в $W \cong S_n$. В таком виде гипотеза оказывается неверной: контрпримером служат подстановки $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $w' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. В то же время, остаётся в силе такая

Гипотеза. *Пусть w, $w' \in S_n$ сопряжены и $C_w = C_{w'}$. Тогда w и w' сопряжены уже с помощью подгруппы, переставляющей числа внутри независимых циклов подстановки w.*

Это означает, среди прочего, что если w и w' — инволюции (элементы второго порядка) в S_n, причём $w \neq w'$, то $C_w \neq C_{w'}$. Аналогичную гипотезу можно выдвинуть и для произвольной группы G. (См. [4], [5] по поводу связи касательных конусов к X_w для инволюций и коприсоединённых орбит унипотентного радикала группы B.) В статье [6] Б. Костантом для любых w, $v \in W$ были определены элементы $c_{w,v}$ поля частных симметрической алгебры пространства $\mathfrak{h}^*$, сопряжённого к алгебре Ли группы T; см. также [7] и [2]. В [2] элементы $(-1)^{l(w)-l(v)} \cdot c_{w,v} \cdot \prod_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$ симметрической алгебры пространства $\mathfrak{h}^*$ названы *многочленами Костанта* (здесь $l(w)$ — длина элемента w в группе Вейля). В работе [8] С. Кумар показал, что многочлены $d_w = (-1)^{l(w)} \cdot c_{w,\mathrm{id}} \cdot \prod_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$ зависят только от канонической структуры T-модуля на алгебре функций касательного конуса C_w.

Следовательно, чтобы показать, что $C_w \neq C_{w'}$, достаточно проверить, что $d_w \neq d_{w'}$. Мы доказываем этот факт для серии A_n для произвольного n и, используя пакет компьютерной алгебры `SAGE` [9], для систем корней F_4 и G_2. Тем самым, доказана

Теорема. *Пусть каждая неприводимая компонента системы корней* Φ *имеет тип* A_n, F_4 *или* G_2. *Пусть* w, w' *— инволюции в группе Вейля* W *и* $w \neq w'$. *Тогда* $C_w \neq C_{w'}$.

В ближайшее время мы надеемся получить аналогичный результат для остальных классических серий корней, а также для E_6, E_7 и E_8. Также несложными комбинаторными рассуждениями доказывается следующее

Утверждение. *Для произвольной системы корней* Φ *и любого элемента* $w \in W$ *многочлены Костанта* d_w *и* $d_{w^{-1}}$ *совпадают.*

Список литературы

[1] S. Billey, V. Lakshmibai. Singular loci of Schubert varieties. Progr. in Math. **182**, Birkhäuser, 2000.
[2] S. Billey. Kostant polynomials and the cohomology ring for G/B. Duke Math. J. **96** (1999), pp. 205–224.
[3] Д.Ю. Елисеев, А.Н. Панов. Касательные конусы многообразий Шуберта для A_n малого ранга. Записки научных семинаров ПОМИ **394** (2011), с. 218–225, см. также arXiv: `math.RT/1109.0399`.
[4] M.V. Ignatyev. Combinatorics of B-orbits and the Bruhat–Chevalley order on involutions. Transform. Groups, to appear, see also arXiv: `math.RT/1101.2189`.
[5] М.В. Игнатьев. Порядок Брюа–Шевалле на инволюциях в гипероктаэдральной группе и комбинаторика замыканий B-орбит. Записки научных семинаров ПОМИ, принята к печати, см. также arXiv: `math.RT/1112.2624`.
[6] B. Kostant, S. Kumar. The nil-Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac–Moody group G^*. Adv. Math. **62** (1986), pp. 187–237.
[7] B. Kostant, S. Kumar. T-equivariant K-theory of generalized flag varieties. J. Diff. Geom. **32** (1990), pp. 549–603.
[8] S. Kumar. The nil-Hecke ring and singularities of Schubert varieties. Invent. Math. **123** (1996), pp. 471–506.
[9] W.A. Stein et al. Sage Mathematics Software (Version 4.6.1). The Sage Development Team, 2011, available at `http://www.sagemath.org`.

О радикалах $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр

Ю.В. Кочетова, Е.Е. Ширшова
Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия
jkochetova@mail.ru, shirshova.elena@gmail.com

Пусть F — частично упорядоченное поле и $A = \langle A; +; \cdot \rangle$ — линейная алгебра над полем F. Будем говорить, что на алгебре A определен $\mathcal{K}$-*порядок* $\leq$, если выполнены следующие условия:

(1) $\langle A; +; \leq \rangle$ — частично упорядоченная группа [1];

(2) из $a \leq b$ следует, что $\lambda a \leq \lambda b$ для всех $a, b \in A$ и $\lambda > 0$, $\lambda \in F$;

(3) из $0 \leq a$ следует, что $ab \leq a$ и $ba \leq a$ для всех $a, b \in A$.

Если при этом группа $\langle A; +; \leq \rangle$ является линейно (решёточно) упорядоченной, то алгебра A называется *линейно* (*решёточно*) $\mathcal{K}$-*упорядоченной алгеброй*. Данное определение упорядочения было введено для алгебр Ли В.М. Копытовым (см. [2]).

Назовем l-*первичным радикалом* решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F пересечение всех l-идеалов J алгебры A, для каждого из которых произведение $UV = \{z = \sum_{i=1}^{n=n(z)} x_i y_i \mid x_i \in U, y_i \in V\}$ любых двух ненулевых l-идеалов U, V факторалгебры A/J отлично от множества $\{J\}$.

Теорема 1. *l-первичный радикал конечномерной линейно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры над линейно упорядоченным полем совпадает со всей алгеброй.*

Теорема 2. *l-первичный радикал решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченной ассоциативной алгебры (алгебры Ли) над частично упорядоченным полем содержится в её первичном радикале.*

Следствие. *Во всякой конечномерной линейно $\mathcal{K}$-упорядоченной ассоциативной алгебре (алгебре Ли) l-первичный радикал совпадает с первичным радикалом и равен всей алгебре. При этом в конечномерной линейно $\mathcal{K}$-упорядоченной ассоциативной алгебре l-первичный радикал совпадает и с радикалом Джекобсона.*

Список литературы

[1] Л. Фукс. Частично упорядоченные алгебраические системы. М., Мир, 1965.

[2] В.М. Копытов. Решёточно упорядоченные группы. М., Наука, 1984.

Нормальность замыканий орбит максимального тора в неприводимых представлениях простых алгебраических групп

К.Г. Куюмжиян
НИУ ВШЭ, Лаборатория алгебраической геометрии и её приложений, Москва, Россия
karina@mccme.ru

Пусть G – связная односвязная простая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики. Зафиксируем в ней максимальный тор T. Пусть V — конечномерный рациональный G-модуль. Будем искать такие V, для которых для любого $v \in V$ замыкание орбиты $\overline{Tv}$ нормально. Для одного отдельно взятого замыкания орбиты $\overline{Tv}$ на данный вопрос есть простой комбинаторный ответ — насыщенность соответствующего множества весов. Это является ключевым ингредиентом для работы с замыканиями T-орбит. Доказательства проходят на языке систем весов неприводимых представлений с заданным старшим весом. В работах [1], [2], [3] найдены все такие пары (G, V), для которых замыкания всех T-орбит нормальны. Результат приведён в терминах соответствующих систем корней.

Теорема 1. *Для следующих типов простых алгебраических групп и соответствующих модулей, а также для сопряжённых к ним модулей, замыкания всех орбит максимального тора нормальны.*

Система корней	Старший вес
$A_n, n \geqslant 1$	π_1
$A_n, n \geqslant 1$	$\pi_1 + \pi_n$
A_1	$3\pi_1$
A_1	$4\pi_1$
A_2	$2\pi_1$
A_3	π_2
A_4	π_2
A_5	π_2
A_5	π_3
$B_n, n \geqslant 2$	π_1
B_2	π_2
B_2	$2\pi_2$
B_3	π_3

Система корней	Старший вес
B_4	π_4
$C_n, n \geqslant 3$	π_1
C_3	π_2
C_4	π_2
$D_n, n \geqslant 4$	π_1
D_4	π_2
D_4	π_3
D_4	π_4
D_5	π_4
D_6	π_5
D_6	π_6
F_4	π_4
G_2	π_1

В остальных случаях модуль содержит орбиту максимального тора с ненормальным замыканием.

Как видно из таблицы, это свойство является достаточно редким. Например, для систем корней E_6, E_7, E_8 для любого представления найдётся T-орбита с ненормальным замыканием. Мы покажем, как, разобрав для некоторой группы G конечное число «небольших» модулей и получив в них отрицательный ответ, то есть построив T-орбиту с ненормальным замыканием, проверить для всех остальных G-модулей, что в них также найдётся T-орбита с ненормальным замыканием.

Но сложность задачи не только в том, что требуется построить бесконечно много контрпримеров. В тех случаях, когда замыкания всех T-орбит нормальны, проверка этого может быть очень нетривиальной и, несмотря на «конечность» задачи, невероятно трудоёмкой. Одними из самых сложных случаев были спинорные представления систем D_5 и D_6. Для их разбора был разработан метод почти унимодулярных и 2-унимодулярных множеств, обобщающий существовавший ранее метод унимодулярных множеств [4], о котором тоже хотелось бы рассказать.

Список литературы

[1] И.И. Богданов, К.Г. Куюмжиян. Простые модули исключительных групп с нормальными замыканиями орбит максимального тора. Мат. заметки, принята к печати, см. также arXiv: `math.AG/1105.4577`.

[2] K. Kuyumzhiyan. Simple $SL(n)$-modules with normal closures of maximal torus orbits. J. Alg. Combin. **30** (2009), no. 4, pp. 515–538.

[3] К.Г. Куюмжиян. Простые модули классических линейных групп с нормальными замыканиями орбит максимального тора. Подана в Сиб. матем. журнал, см. также arXiv: `math.AG/1009.4724`.

[4] B. Sturmfels. Equations defining toric varieties. Proc. Sympos. Pure Math. **62**, Part 2, AMS, Providence, RI, 1997, pp. 437–449

О деформациях алгебр Ли над полями малой характеристики

А.А. Ладилова
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия
ladilova@algebraic.ru

Исследование деформаций алгебр Ли над полями малой характеристики представляет интерес в рамках программы классификации простых алгебр Ли над алгебраически замкнутыми полями положительной характеристики.

В работе С.М. Скрябина [1] были построены серии исключительных алгебр Ли над полями характеристики $p = 3$, не имеющих аналогов в других характеристиках. Данный доклад посвящен описанию фильтрованных деформаций этих алгебр. В работах [2], [3], [4] было доказано, что градуированные алгебры серий R, Y и алгебры Франк являются жесткими относительно фильтрованных деформаций. Несколько иначе обстоит дело с алгебрами серий X и Z. Семейство фильтрованных деформаций градуированных алгебр серии X было описано в [1]. Существование нетривиальных деформаций алгебр серии Z было анонсировано, например, в [5]; там же приведена реализация этих деформаций как подалгебр в бесконечномерной алгебре серии Z.

В настоящее время вопрос об описании фильтрованных деформаций алгебр Ли серий X и Z полностью не решен.

Список литературы

[1] С.М. Скрябин. Новые серии простых алгебр Ли характеристики 3. Матем. сб. **183** (1992), №8, с. 3–22.

[2] А.А. Ладилова. Фильтрованные деформации алгебр Франк. Изв. вузов. Матем. **53** (2009), №8, с. 53—56.

[3] М.И. Кузнецов, А.А. Ладилова. Фильтрованные деформации алгебр Ли серии R. Мат. заметки **91** (2012), №3, с. 400–406.

[4] А.А. Ладилова. Фильтрованные деформации алгебр Ли серии Y. Фунд. и прикл. матем. **14** (2008), №6, с. 135–140.

[5] А.А. Ладилова. О деформациях алгебр Ли серии Z. Алгебра и математическая логика: материалы международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения проф. В.В. Морозова. Казань, КФУ, 2011, с. 123–124.

Представления полной линейной группы и категорные действия алгебр Каца–Муди

И.В. Лосев
Northeastern University, Boston, USA
i.loseu@neu.edu

Категорные действия алгебр Каца–Муди — относительно молодой предмет, формальное определение было дано Chuang, Rouquier в 2004 для алгебры $\mathfrak{sl}_2$ и Rouquier в 2008 для общих алгебр Каца–Муди. Грубо говоря, такое категорное действие есть набор функторов и их преобразований, удовлетворяющих некоторым условиям. Категорные действия оказываются полезны как в теории представлений, так и в теории узлов.

В этих лекциях я планирую ввести относительно несложный пример категорных действий — действия на категории представлений группы GL_n над полем характеристики p. Эта категория снабжена категорным действием аффинной алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_p$, приходящим из взятия тензорных произведений.

План:
Лекция 1: Представления GL_n в характеристике p.
Лекция 2: Тензорные произведения с тавтологическим представлением.
Лекция 3: Категорное действие алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_p$.

О диких и ручных алгебрах Ли

Е.А. Македонский
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев, Украина
makedonskyi@univ.kitv.ua

Пусть L — конечномерная алгебра Ли. Рассматривается вопрос о классификации всех неразложимых конечномерных представлений L. В работе [1] доказывается, что категория представлений конечномерной алгебры Ли с абелевым радикалом эквивалентна категории представлений некоторого колчана со счётным числом точек и некоторым набором однородных соотношений второй степени. На основе этого результата доказывается, что задача классификации конечномерных представлений алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики с радикалом размерности более 1 содержит в себе как подзадачу задачу о классификации пары матриц (является дикой). Эта задача считается исключительно сложной.

Для алгебр Ли с одномерным радикалом все неразложимые представления нетрудно описываются.

Список литературы

[1] Ie. Makedonskyi. On wild Lie algebras, see arXiv: math.RT/1202.1401.

Лиевское многообразие дробной экспоненты

О.А. Малюшева[1]

Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия

malyusheva_o_a@mail.ru

Характеристика основного поля предполагается равной нулю. Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие линейных алгебр, а $F(\mathbf{V})$ — его относительно свободная алгебра счётного ранга, порождённая элементами $x_1, x_2, \ldots$. Обозначим через $P_n(\mathbf{V})$ подпространство полилинейных многочленов от $x_1, \ldots, x_n$ в $F(\mathbf{V})$, а через $c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V})$ – его размерность. Рост числовой последовательности $c_n(\mathbf{V})$ называют ростом многообразия $\mathbf{V}$. Если последовательность $c_n(\mathbf{V})$ мажорируется экспонентой a^n для подходящего a, то существуют пределы

$$\underline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})},\ \overline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})},$$

которые называют нижней и верхней экспонентой многообразия $\mathbf{V}$.

Все не определяемые здесь понятия можно найти в работе [1]. На тех же идеях, что и в статье [2], построен новый пример многообразия алгебр Ли с дробной экспонентой. Пусть $\mathbf{A}^2$ — многообразие алгебр Ли, определяемое тождеством $(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0$, а $M = F_4(\mathbf{A}^2)$ является относительно свободной алгеброй этого многообразия с множеством свободных образующих $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$. Рассмотрим линейное преобразование d четырёхмерного векторного пространства $\langle z_1, z_2, z_3, z_4\rangle$, определённое правилом $z_1d = z_2$, $z_2d = z_3$, $z_3d = z_4$, $z_4d = z_1$. В этом случае d может быть продолжено до дифференцирования алгебры M.

Обозначим через $D = \langle d\rangle$ одномерную алгебру Ли с нулевым умножением, а через $M \leftthreetimes D$ полупрямое произведение алгебр M и D.

Теорема. *В случае поля нулевой характеристики для многообразия алгебр Ли* $\mathbf{V} = var(M \leftthreetimes D)$ *выполняется равенство*

$$LEXP(\mathbf{V}) = HEXP(\mathbf{V}) \approx 3,83.$$

[1] Работа частично поддержана грантом РФФИ 10–01–00209–а.

Список литературы

[1] A. Giambruno, M. Zaicev. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Mathematical Surveys and Monographs **122**, AMS, Providence, RI, 2005.

[2] А.Б. Верёвкин, М.В. Зайцев, С.П. Мищенко. Достаточное условие совпадения нижней и верхней экспонент многообразия линейных алгебр. Вестник Московского университета. Сер. Математика и механика, 2011, №2, с. 36–39.

О свойствах внутренних идеалов алгебр Ли

Е.В. Мещерина, С.А. Пихтильков, О.А. Пихтилькова
Оренбургский государственный университет,
Оренбург, Россия
elena_lipilina@mail.ru, pikhtilkov@mail.ru

Впервые понятие внутреннего идеала было введено Джорджией Бенкарт [1].

Определение. Скажем, что подпространство B алгебры Ли L над полем является внутренним идеалом, если $[B,[B,L]] \subseteq B$.

В частности Д. Бенкарт доказала следующее утверждение.

Лемма A. *Пусть T — внутренний идеал и подалгебра алгебры L. Тогда для любого натурального n множество T^n является внутренним идеалом.*

Авторы работы доказали следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{b}$ является внутренним идеалом алгебры Ли L. Тогда n-й член производного ряда $\mathfrak{b}^{(n)}$ является внутренним идеалом.*

Авторам неизвестно, справедливы ли леммы A и 1 для произвольного внутреннего идеала алгебры Ли. Найдены примеры, показывающие что взаимный коммутант внутренних идеалов может не являться внутренним идеалом; внутренний идеал может не быть подалгеброй Ли.

В работе Д. Бенкарт приведён пример внутренних одномерных идеалов алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(F)$ матриц порядка 2×2 над полем характеристики не равной 2, порождённых матричными единицами e_{12} и e_{21}. Этот пример инициировал изучение всех собственных внутренних идеалов алгебры $\mathfrak{sl}_2(F)$. Было доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{sl}_2(F)$ над алгебраически замкнутым полем F характеристики не равной 2. Тогда все её собственные идеалы* *одномерны, порождены матрицами вида* $\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$, *где* $x^2+yz=0$, x, y, z *не равны нулю одновременно.*

Легко указать пример простой алгебры Ли, не содержащей собственных внутренних идеалов. Такой, например, будет алгебра Ли векторов трёхмерного евклидова пространства по отношению к операции векторного произведения.

Естественно поставить следующие вопросы: верно ли, что в любой простой алгебре Ли над алгебраически замкнутым полем существует собственный внутренний идеал? Является ли такой внутренний идеал нильпотентным?

Ф. Лопес, Е. Гарсия, Г. Лозано исследовали понятие внутреннего идеала применительно к артиновости с помощью йордановых пар [2]. Можно сформулировать несколько определений артиновости для алгебр Ли.

Определение. Пусть L — алгебра Ли.
а) Если убывающая цепочка идеалов стабилизируется, то алгебра называется i-артиновой;
б) если убывающая цепочка алгебр стабилизируется, то алгебра называется a-артиновой;
в) если убывающая цепочка внутренних идеалов стабилизируется, то алгебра называется inn-артиновой;

Легко проверить, что из inn-артиновости следует i-артиновость, а из a-артиновости следует i-артиновость.

Найдены примеры, показывающие что условие i-артиновости сильнее, чем условия a-артиновости и inn-артиновости.

В 2001 году А.В. Михалёв на семинаре механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова «Кольца и модули» поставил проблему: существует ли артинова алгебра Ли, первичный радикал которой не является разрешимым?

С.А. Пихтильков доказал, что первичный радикал специальной алгебры Ли является разрешимым [3]. Пока непонятно как решать проблему А.В. Михалёва в общем случае. Интересно было бы рассмотреть её для a-артиновых и inn-артиновых алгебр Ли.

Список литературы

[1] G. Benkart. On inner ideals and ad-nilpotent elements of Lie algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **232** (1977), pp. 61–81.

[2] A.F. Lopez, E. Garcia, M.G. Lozano. An artinian theory for Lie algebras. J. Algebra **319** (2008), pp. 938–951.
[3] С.А. Пихтильков. Артиновые специальные алгебры Ли. Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Сб. науч. трудов. Тула, изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2001, с. 189–194.

Метод орбит в теории представлений

А.Н. Панов
Самарский государственный университет, Самара, Россия
apanov@list.ru

Метод орбит — это метод классификации неприводимых представлений групп Ли в терминах орбит коприсоединённого представления. Этот метод впервые появился в 1962 году в работе А.А. Кириллова [1]. Было доказано, что существует взаимно однозначное соответствие между неприводимыми представлениями произвольной связной односвязной нильпотентной группы Ли и её коприсоединёнными орбитами. Метод орбит даёт конструкцию, позволяющую по коприсоединённой орбите построить неприводимое представление. Это соответствие между орбитами и представлениями создаёт новый язык в теории представлений, позволяющий решать задачи теории представлений в геометрических терминах соответствующих орбит [2].

Начиная с 1962 года, методу орбит посвящены многочисленные исследования. Одно из главных направлений: существование, пусть и в каком-то обобщённом смысле, соответствия между орбитами и представлениями для других классов групп Ли [3], [4]. Эти исследования далеко не завершены и интересны для специалистов в теории интегрируемых систем, теории специальных функций, математической физике.

В планируемом курсе лекций будет подробно рассказан метод орбит для нильпотентных групп Ли и сделан обзор по методу орбит для разрешимых, компактных и вещественных редуктивных групп Ли.

Список литературы

[1] А.А. Кириллов. Унитарные представления нильпотентных групп Ли. УМН **17** (1962), №4, с. 57–110.
[2] А.А. Кириллов. Лекции по методу орбит. Новосибирск, Научная книга (ИДМИ), 2002.

[3] D. Vogan Jr. The orbit method and unitary representations for reductive Lie groups. Algebraic and analytic methods in representation theory. Sonderborg, 1994, pp. 243–339.
[4] D. Vogan Jr. The method of coadjoint orbits for real reductive groups. Representation theory of Lie groups, 1998, pp. 179–238.

Гибкость аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степени 4 и 5

А.Ю. Перепечко
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия,
Институт Фурье, Гренобль, Франция
perepechko@mccme.ru

Аффинное алгебраическое многообразие X, определённое над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль, называется *гибким*, если касательное пространство к X в произвольной гладкой точке порождается касательными векторами к орбитам действия однопараметрических унипотентных групп [3]. В этой работе мы установим гибкость аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степени 4 и 5.

Известно, что каждому действию одномерной унипотентной группы $\mathbb{G}_a = \mathbb{G}_a(\mathbb{K})$ на X соответствует локально нильпотентное дифференцирование $\delta \in \mathrm{LND}(\mathbb{K}[X])$ алгебры регулярных функций на X. Все такие действия порождают подгруппу *специальных автоморфизмов* $\mathrm{SAut}\, X \subset \mathrm{Aut}\, X$.

Говорят, что группа G действует на множестве X *бесконечно транзитивно*, если для любого $m \in \mathbb{N}$ она действует транзитивно на множестве упорядоченных наборов из m попарно различных точек множества X.

Следующая теорема объясняет значение условия гибкости.

Теорема 1. [3, Theorem 0.1] *Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие размерности $\geqslant 2$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *многообразие X является гибким;*
2. *группа $\mathrm{SAut}\, X$ действует транзитивно на множестве гладких точек X_{reg};*
3. *группа $\mathrm{SAut}\, X$ действует бесконечно транзитивно на X_{reg}.*

В [4] описаны три класса гибких аффинных многообразий, а именно, аффинные конусы над многообразиями флагов, невырожденные торические многообразия размерности $\geqslant 2$ и надстройки над гибкими многообразиями. Заметим, что аффинные конусы над поверхностями дель Пеццо степени $\geqslant 6$ являются торическими, а значит, гибкими многообразиями.

Для поверхностей дель Пеццо степени $\leqslant 3$ пока неизвестно наличие хотя бы одного $\mathbb{G}_a$-действия на аффинном конусе, см. [6], [7, Proposition 4.21]. Это приводит нас к следующему результату для случаев степени 4 и 5.

Теорема 2.

- *Пусть H — произвольный очень обильный дивизор на поверхности дель Пеццо Y степени 5. Тогда аффинный конус $\mathrm{AffCone}_H Y$, отвечающий H, является гибким.*
- *Пусть Y — поверхность дель Пеццо степени 4, а H — очень обильный дивизор, принадлежащий определённому подконусу обильного конуса, см.* [9, Theorem 4.1]. *Тогда аффинный конус $\mathrm{AffCone}_H Y$ является гибким. В частности, это верно для антиканонического дивизора $H = -K_Y$.*

В доказательстве мы используем конструкцию из [7], которая по каждому открытому цилиндрическому подмножеству некоторого специального вида в проективном многообразии Y позволяет построить регулярное действие группы $\mathbb{G}_a$ на аффинном конусе над Y. В терминах трансверсального покрытия такими подмножествам получено достаточное условие гибкости аффинного конуса над проективным многообразием, применяемое впоследствии к поверхностям дель Пеццо.

Список литературы

[1] Ю.И. Манин. Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика. М., Наука, Физматлит, 1972.

[2] Р. Хартсхорн. Алгебраическая геометрия. М., Мир, 1981.

[3] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups, see arXiv: `math.AG/1011.5375`.

[4] I.V. Arzhantsev, K. Kuyumzhiyan, M. Zaidenberg. Flag varieties, toric varieties, and suspensions: three instances of infinite transitivity. Мат. сборник, в печати, см. также arXiv: `math.AG/1003.3164`.

[5] I.V. Dolgachev. Topics in classical algebraic geometry, available at `http://www.math.lsa.umich.edu/~idolga/topics.pdf`.

[6] H. Flenner, M. Zaidenberg. Rational curves and rational singularities. Math. Zeitschrift **244** (2003), pp. 549–575.
[7] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, M. Zaidenberg. Group actions on affine cones, Montreal Centre de Recherches Mathématiques, CRM Proceedings and Lecture Notes **54**, 2011 (to appear), see also arXiv: `math.AG/0905.4647`.
[8] R. Lazarsfeld. Positivity in Algebraic Geometry I. Classical setting: line bundles and linear series. Ergebnisse der Mathematik **48**, Springer, 2004.
[9] A. Perepechko. Flexibility of affine cones over del Pezzo surfaces of degree 4 and 5, see arXiv: `math.AG/1108.5841`.
[10] W.A. Stein et al. Sage Mathematics Software (Version 4.6.1). The Sage Development Team, 2011, available at `http://www.sagemath.org`.

О росте подалгебр в ограниченных алгебрах Ли

В.М. Петроградский, И.А. Субботин
Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия
`petrogradsky@hotbox.ru`, `shelby888@yandex.ru`

Пусть L — конечно порожденная p-алгебра Ли над конечным полем $K=\mathbb{F}_q$. Обозначим через $a_n(L)$ число ограниченных подалгебр таких, что $\dim_{\mathbb{F}_q}(L/H)=n$, $n\geqslant 0$. Таким образом получаем последовательность роста подалгебр $a_n(L)$.

Введем также *дзета-функцию* для ограниченной алгебры Ли следующим образом:

$$\zeta_L(s)=\sum_{H\subseteq L}|L/H|^{-s}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(L)q^{-ns}.$$

Это понятие введено по аналогии с теорией групп [1].

Теорема 1. *Пусть L — конечно порожденная абелева p-алгебра Ли над полем $\mathbb{F}_q$. Рассмотрим ее разложение на свободную абелеву p-алгебру и ее алгебраическую часть $L=\boldsymbol{A}_d\oplus\mathcal{A}(L)$. Тогда дзета-функция $\zeta_L(s)$ рациональна при $t=q^{-s}$ и равна*

$$\zeta_L(s)=\frac{\zeta_{\mathcal{A}(L)}(s-d)}{(1-q^{1-s})(1-q^{2-s})\dots(1-q^{d-s})}.$$

Одним из простейших примеров нильпотентной алгебры Ли является алгебра Гейзенберга размерности 3:

$$\langle x, y, z|\ [x,y] = z, [x,z] = [y,z] = 0\rangle_K.$$

Лемма 1. *Пусть* $L = \langle x, y, z, x^{p^i}, y^{p^i}, z^{p^i}, i \geqslant 1, [x,y] = z\rangle_{\mathbb{F}_q}$, *все остальные произведения нулевые. Тогда*

$$\zeta_L(s) = \frac{1 - q^{3-s}(1-q^{-s})(1-q^{1-s})}{(1-q^{1-s})(1-q^{2-s})(1-q^{3-s})}.$$

Еще один пример p-оболочки алгебры Гейзенберга:

Лемма 2. *Пусть* $L = \langle x, y, z, z^{p^i}, i \geqslant 1, [x,y] = z, x^p = y^p = 0\rangle_{\mathbb{F}_q}$, *все остальные произведения равны нулю и* $p > 2$. *Тогда*

$$(1)\ \zeta_L(s) = \frac{1 + q^{-s} + q^{2-2s}}{1 - q^{1-s}};$$

$$(2)\ a_n(L) = q^n(2 + 1/q) \text{ для } n \geqslant 2.$$

Список литературы

[1] A. Lubotsky, D. Segal. Subgroup growth. New York, Springer–Verlag, 2003.
[2] V.M. Petrogradsky. Growth of subalgebras for restricted Lie algebras and transitive actions. Int. J. Alg. Comput. **15** (2005), no. 5–6, pp. 1151–1168.
[3] В.М. Петроградский, А.А. Смирнов. Перечисление максимальных подалгебр в свободных ограниченных алгебрах Ли. Сиб. матем. журнал **49** (2008), №6, с. 1381–1390.

Изотропность объединения всех K-нильпотентных изотропных K-орбит

А.В. Петухов
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия
Alex--2@yandex.ru

Пусть G — редуктивная алгебраическая группа, K — её симметрическая подгруппа (то есть множество неподвижных точек некоторой инволюции). Пусть $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{g}$ — алгебры Ли групп K и G соответственно, $\mathcal{O}$ — нильпотентная коприсоединённая G-орбита в $\mathfrak{g}^*$, а $\mathfrak{k}^\perp$ — аннулятор $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{g}^*$. Хорошо известно, что для симметрической пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ пересечение $\mathfrak{k}^\perp$ и $\mathcal{O}$ содержит конечное число K-орбит (замыкание каждой из них содержит 0), является изотропным (так как всякая K-орбита в $\mathfrak{k}^\perp$ изотропна) и почти всегда лагранжевым подмногообразием в $\mathcal{O}$.

Автором был найден аналог этого утверждения для произвольной редуктивной подгруппы K в G: объединение всех изотропных K-орбит в $\mathcal{O}$, замыкание которых включает 0, является изотропным подмногообразием $\mathcal{O}$. Этому результату и его связи с теорией $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модулей и посвящён доклад.

Стек модулей стабильных торических многообразий

Н.А. Печенкин
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
kolia.pechnik@gmail.com

Доклад основан на совместной работе с Ольгой Чувашовой.

Пусть X — аффинное T-многообразие. Алгебра функций многообразия X градуирована решёткой характеров $\mathfrak{X}(T)$ тора T:

$$k[X] = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(T)} k[X]_\chi.$$

Обозначим $\Sigma_X := \{\chi \in \mathfrak{X}(T) : k[X]_\chi \neq 0\}$ весовой моноид, и $\widehat{\Sigma}_X := \mathfrak{X}(T) \cap \operatorname{cone}(\Sigma_X)$ — его насыщение в решётке характеров тора.

Аффинным стабильным торическим многообразием под действием тора T мы будем называть такое аффинное T-многообразие X, что $k[X]$ является T-модулем без кратностей и $\Sigma_X = \widehat{\Sigma}_X$. Это определение согласовано с общим определением стабильного торического многообразия, данным в работе

[1, Section 1.1.A]. Если многообразие X неприводимо, то оно является (нормальным) торическим многообразием в обычном смысле.

Зафиксируем неприводимое аффинное T-многообразие $\mathbb{X}$. Будем рассматривать семейства аффинных стабильных торических T-многообразий над $\mathbb{X}$. По определению, такое семейство состоит из пары морфизмов схем $p_S\colon X \to S$ и $p_{\mathbb{X}}\colon X \to \mathbb{X}$, удовлетворяющей следующим свойствам:

- p_S — (плоское) семейство аффинных T-схем с функцией Гильберта $h_{\widehat{\Sigma}_{\mathbb{X}}}$ (см. определение в работе [3, Definition 6]);
- слои морфизма p_S над замкнутыми точками схемы S приведены;
- морфизм $p_S \times p_{\mathbb{X}}\colon X \to S \times \mathbb{X}$ конечный.

Из определения следует, что слои морфизма p_S над замкнутыми точками схемы S являются аффинными стабильными торическими T-многообразиями.

Рассмотрим категорию $\mathcal{M}_{\mathbb{X},T}$, объектами которой являются семейства аффинных стабильных торических T-многообразий над $\mathbb{X}$, а морфизмы определены естественным образом. Категория $\mathcal{M}_{\mathbb{X},T}$ является категорией, расслоенной на группоиды над категорией схем. Мы доказываем, что $\mathcal{M}_{\mathbb{X},T}$ является факторстеком (определение и основные свойства стеков можно найти, например, в [4] и [5]).

В работе [2, Section 2] для действия $T : \mathbb{X}$ определяется GIT-веер $\mathcal{Q}$ с носителем $\operatorname{cone}(\Sigma_{\mathbb{X}})$. Выберем такое конечное подмножество $\Xi \subset \widehat{\Sigma}_{\mathbb{X}}$, что для каждого $\sigma \in \mathcal{Q}$ моноид $\widehat{\Sigma}_{\mathbb{X}} \cap \sigma$ порождён элементами $\Xi \cap \sigma$. Вложение $\Xi \subset \widehat{\Sigma}_{\mathbb{X}}$ индуцирует сюръективное отображение решёток $\mathbb{Z}^{\Xi} \to \mathfrak{X}(T)$, которое, в свою очередь, соответствует вложению торов $T \subset (k^{\times})^{\Xi}$. С помощью этого вложения получаем естественное действие тора T на многообразии $\mathbb{X} \times \mathbb{A}^{\Xi}$. Обозначим $H_{\mathbb{X}\times\mathbb{A}^{\Xi},T}$ торическую схему Гильберта (определение см., например, в работе [3, Section 3.2.2]) для этого действия. Диагональное действие тора $(k^{\times})^{\Xi}$ на $\mathbb{A}^{\Xi}$ индуцирует его действие на $H_{\mathbb{X}\times\mathbb{A}^{\Xi},T}$.

Теорема. *Имеется изоморфизм категорий, расслоенных на группоиды, между $\mathcal{M}_{\mathbb{X},T}$ и факторстеком открытой подсхемы в $H_{\mathbb{X}\times\mathbb{A}^{\Xi},T}$ по действию $(k^{\times})^{\Xi}$.*

Список литературы

[1] V. Alexeev. Complete moduli in the presence of semiabelian group action. Ann. Math. **155** (2002), pp. 611–708.

[2] F. Berchtold, J. Hausen. GIT-equivalence beyond the ample cone. Michigan Math. J. **54** (2006), pp. 483–515.

[3] O.V. Chuvashova, N.A. Pechenkin. Quotients of an affine variety by an action of a torus, see arXiv: `math.AG/1202.5760`.
[4] T.L. Gómez. Algebraic stacks. Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **111** (2001), pp. 1–31.
[5] G. Laumon, L. Moret-Bailly. Champs algébriques. Ergebnisse der Math. **39**, Springer–Verlag, Berlin (2000).

Размерность Крулля в решении проблемы центра и фокуса для полиномиальных дифференциальных систем

М.Н. Попа, В.В. Прикоп
Институт математики и информатики
АН Молдовы, Кишинёв, Молдова
`popam@math.md`, `pricopv@mail.ru`

Работа посвящена решению одной из давних проблем качественной теории автономных двумерных дифференциальных систем, именуемой «проблемой центра и фокуса» [1], [2]. Её постановка довольно проста и формально ей можно придать следующую алгебраическую интерпретацию: *Если дана бесконечная ненулевая последовательность многочленов*

$$L_0, L_1, L_2, \ldots, L_k, \ldots, \tag{1}$$

построенная по какому-то признаку от конечного числа переменных, то какое конечное число полиномов

$$L_0,\ L_1,\ L_2, \ldots, L_\omega \tag{2}$$

необходимо привлечь, чтобы их равенство нулю аннулировало бы все остальные многочлены (1)?

Нетрудно заметить, что весь смысл этой задачи кроется в нахождении числа ω из (2).

Отметим, что эта задача приобретает особый смысл в теории автономных полиномиальных дифференциальных систем.

Для дифференциальной системы

$$\dot{x} = y + P(x,y),\ \dot{y} = -x + Q(x,y), \tag{3}$$

где P и Q являются полиномами от x и y степени > 1, а элементами последовательности (1) являются фокусные величины данной системы, зависящие от коэффициентов P и Q, полиномы (2) дают решение проблемы центра и фокуса этой системы, то есть их равенство нулю указывает на то, что система (3) имеет в начале координат особую точку типа центр (окружена замкнутыми траекториями), а в противном случае — фокус (окружена спиралями).

Путь, по которому в основном шли исследователи до сих пор в поиске числа ω из (2), зачастую выбирался на ощупь, то есть определенными вычислениями строились, по возможности, первые выражения фокусных величин из (1) без знания числа ω. Иногда также предполагалось наличие каких-то геометрических свойств у системы (3), например, существование интегральных прямых, коник, других кривых и т.д. А затем методом проб и ошибок с их помощью предпринимались попытки показать, что равенство нулю имеющихся в наличии фокусных величин влечет за собой равенство нулю остальных членов последовательности (1), о выражениях которых чаще всего имелось лишь смутное представление.

Такой подход нередко давал неудовлетворительные результаты. Одна из причин кроется в непреодолимых огромных вычислениях фокусных величин (даже сегодня при наличии сверхмощных компьютеров), которые удавалось получить лишь для достаточно простых дифференциальных систем (3).

Поэтому задача нахождения числа ω из (2), или получения для него хотя бы какой-нибудь аргументированной верхней числовой границы, которая до сих пор отсутствует, является особо важным условием в полном решении проблемы центра и фокуса.

В настоящей работе показано, что в качестве такой границы можно взять размерность Крулля градуированной алгебры унимодулярных комитантов некоторой обобщенной дифференциальной системы, соответствующей (3).

Но самым важным в данной работе является то, что с помощью рядов Гильберта и алгебр Ли операторов [3]–[5] получена общая формула указанной размерности в явном виде для любой обобщенной дифференциальной системы, соответствующей (3).

Список литературы

[1] Математическая энциклопедия. Центра и фокуса проблема. Доступна по адресу: `http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/6088`.

[2] А.П. Садовский. Полиномиальные идеалы и многообразия. Минск, БГУ, 2008.

[3] М.Н. Попа. Приложения алгебр к дифференциальным системам. Кишинёв, АН Молдовы, 2001.

[4] M.N. Popa. Applications of algebraic methods to differential systems

(in Romanian). Romania, Piteshty Univers., The Flower Power Edit., 2004.
[5] М.Н. Попа, В.В. Прикоп. Приложения алгебр к проблеме центра и фокуса. Препринт, Кишинев, АН Молдовы, Институт математики и информатики, №0007, 2011.

О многообразии алгебр Пуассона с тождеством $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$

С.М. Рацеев
Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия
RatseevSM@rambler.ru

Алгебра $A = A(+, \cdot, \{,\}, K)$ с двумя бинарными операциями умножения $\cdot$ и $\{,\}$ над полем K называется алгеброй Пуассона, если $A(+, \cdot, K)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей, $A(+, \{,\}, K)$ — алгебра Ли с операцией умножения $\{,\}$, которая называется скобкой Пуассона, и выполняется правило Лейбница: $\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b$, $a, b, c \in A$.

Пусть $L(X)$ — свободная алгебра Ли с умножением $[,]$, где $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счётное множество свободных образующих. Пусть также $F(X)$ — свободная алгебра Пуассона. Обозначим через P_n подпространство в $F(X)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, ..., x_n$, а через P_n^L — подпространство полилинейных элементов степени n в свободной алгебре Ли $L(X)$. Пусть V — некоторое многообразие алгебр Пуассона, $Id(V)$ — идеал тождеств многообразия V. Обозначим $P_n(V) = P_n/(P_n \cap Id(V))$, $c_n(V) = \dim P_n(V)$.

Обозначим через $L_{\geqslant 2}(X)$ подалгебру в свободной алгебре Ли $L(X)$, каждый элемент которой является линейной комбинацией мономов степени $\geqslant 2$.

Если многообразие V имеет экспоненциальный рост, то введем в рассмотрение нижнюю и верхнюю экспоненты:

$$\underline{EXP}(V) = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(V)},\ \overline{EXP}(V) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(V)}.$$

Если $\underline{EXP}(V) = \overline{EXP}(V)$, то будем обозначать их через $EXP(V)$.

Обозначим через $Id(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\})$ идеал тождеств в свободной алгебре Пуассона $F(X)$, порождённый элементом $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}$.

Теорема 1. *Пусть V_L — некоторое многообразие алгебр Ли над произвольным полем K, определённое системой тождеств $\{f_i = 0 \mid f_i \in L_{\geqslant 2}(X),$*

$i \in I\}$. *Пусть также имеется совокупность элементов* $\{g_j \in Id(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}) \mid j \in J\}$, *причём* $|J| > 0$. *Пусть* V — *многообразие алгебр Пуассона, определённое тождествами* $f_i = 0$, $g_j = 0$, $i \in I$, $j \in J$. *Тогда будут выполняться следующие условия*:

(i) $Id(V_L) = Id(V) \cap L_{\geqslant 2}(X)$;

(ii) $P_n^L(V) = P_n^L(V_L)$;

(iii) $c_n(V) \geqslant 1 + \sum_{k=2}^n C_n^k \cdot P_k^L(V_L)$, *где* C_n^k — *число сочетаний из* n *по* k;

(iv) *если* $|I| = 0$, *то* $c_n(V) \geqslant 1 + \sum_{k=2}^n C_n^k \cdot (k-1)! \geqslant [(n-1)! \cdot e]$, *где* $e = 2,71\ldots$, $[\cdot]$ — *целая часть числа.*

Теорема 2. *Пусть* V_L — *некоторое многообразие алгебр Ли над произвольным полем* K, *определённое системой тождеств* $\{f_i = 0 \mid f_i \in L_{\geqslant 2}(X), i \in I\}$. *Пусть также* V — *многообразие алгебр Пуассона, определённое тождествами* $f_i = 0$, $i \in I$, *и* $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$. *Тогда будут верны следующие утверждения.*

i) *Для любого* n *выполнено равенство*

$$c_n(V) = 1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \cdot \dim P_k^L(V_L).$$

ii) *Если существует* $EXP(V_L)$, *то* $EXP(V) = EXP(V_L) + 1$, *в частности, если найдутся такие действительные числа* $d \geqslant 0$, α *и* β, *что для всех достаточно больших* n *выполнено двойное неравенство* $n^\alpha d^n \leqslant \dim P_n^L(V_L) \leqslant n^\beta d^n$, *то найдутся такие* γ *и* δ, *что для всех достаточно больших* n *будет выполнено такое двойное неравенство*: $n^\gamma (d+1)^n \leqslant c_n(V) \leqslant n^\delta (d+1)^n$.

iii) *Если поле* K *бесконечно и некоторая алгебра Ли* A_L *порождает многообразие* V_L, *то алгебра Пуассона* $A = A_L \oplus K$ *с операциями*

$$(x+\alpha)\cdot(y+\beta) = (\beta x + \alpha y) + \alpha\beta,$$
$$\{x+\alpha, y+\beta\} = [x, y],$$

$x, y \in A_L$, $\alpha, \beta \in K$, *будет порождать многообразие* V.

iv) *Если поле* K *бесконечно*, $|I| < +\infty$ *и многообразие* V_L *является шпехтовым, то многообразие* V *также будет являться шпехтовым.*

v) *Пусть поле* K *бесконечно и* W — *некоторое собственное подмногообразие в* V. *Тогда идеал тождеств* $Id(W) \cap L_{\geqslant 2}(X)$ *определяет некоторое собственное подмногообразие в* V_L.

vi) *Многообразие* V_L *нильпотентно тогда и только тогда, когда рост многообразия* V *ограничен полиномом.*

Предложение 1. *В случае основного поля нулевой характеристики многообразие алгебр Пуассона, определённое тождествами*

$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \ \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4, x_5, x_6\}\} = 0,$$

имеет почти экспоненциальный рост.

Предложение 2. *В случае основного поля нулевой характеристики многообразие алгебр Пуассона, определённое тождествами (для некоторого s)*

$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \ \{\{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{2s-1}, x_{2s}\}\} = 0,$$

где во втором тождестве скобки расставлены левонормированным образом, является шпехтовым.

О сумме однородных локально нильпотентных дифференцирований

Е.Л. Ромаскевич
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
lena.apq@gmail.com

Пусть $\mathbf{k}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Дифференцирование ∂ аффинной алгебры $A = \mathbf{k}[X]$ называется *локально нильпотентным* (LND), если для любого $a \in A$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\partial^n(a) = 0$. Локально нильпотентные дифференцирования выделяются среди всех дифференцирований алгебры A как дифференциалы регулярных действий аддитивной группы $\mathbb{G}_a(\mathbf{k})$ основного поля $\mathbf{k}$ на аффинном алгебраическом многообразии X.

Мы рассматриваем аффинное многообразие X с эффективным действием тора $\mathbb{T} = (\mathbf{k}^*)^n$. Действие тора $\mathbb{T}$ на X задаёт эффективную градуировку алгебры A решёткой $M \simeq \mathbb{Z}^n$ характеров тора:

$$A = \bigoplus_{m \in \omega_M} A_m \chi^m, \quad A_m \subseteq \mathbf{k}(X)^{\mathbb{T}},$$

где $\omega = \langle m \in M \mid A_m \neq 0 \rangle$ — выпуклый полиэдральный конус полной размерности, называемый *весовым конусом*, а $\omega_M = \omega \cap M$. Дифференцирование *однородно* относительно данной градуировки, если оно сдвигает однородные компоненты на некоторый вектор $\deg \partial$ решётки M, называемый *степенью* *дифференцирования.* Легко видеть, что $\partial \in LND(A)$ однородно тогда и только тогда, когда соответствующее действие $\mathbb{G}_a(\mathbf{k})$ на X нормализуется действием тора. Однородное LND алгебры A называется дифференцированием *вертикального типа*, если $\partial(\mathbf{k}(X)^{\mathbb{T}}) = 0$, и *горизонтального типа* в противном случае. В частности, любое однородное LND алгебры функций торического многообразия является дифференцированием вертикального типа. Следующая теорема дает критерий локальной нильпотентности суммы двух однородных LND вертикального типа в терминах их степеней.

Теорема. *Пусть ∂_1 и ∂_2 — однородные LND вертикального типа алгебры A, градуированной решёткой M. Тогда $\partial_1 + \partial_2$ является локально нильпотентным дифференцированием тогда и только тогда, когда* $\deg \partial_1 + \deg \partial_2 \notin \omega_M$.

Доказательство основывается на классификации однородных LND вертикального типа, полученной А. Льендо (см. [2]). Его результаты развивают подход М. Демазюра, изложенный в [1]. Для дифференцирований горизонтального типа теорема не выполняется.

Список литературы

[1] M. Demazure. Sous-groupes algebriques de rang maximum du groupe de Cremona. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **3** (1970), pp. 507–588.

[2] A. Liendo. $\mathbb{G}_a$-actions of fiber type on affine $\mathbb{T}$-varieties. J. Algebra **324** (2010), pp. 3653–3665.

Ранги групп зацеплений и свободные алгебры Ли

М.Б. Скопенков[1]

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия

skopenkov@rambler.ru

Доклад посвящен классификации узлов и зацеплений в многомерных пространствах. Естественный вопрос состоит в том, *в каких размерностях множество изотопических классов зацеплений является конечным?* Оказывается, ответ на этот вопрос сводится к следующему результату об алгебрах Ли. Пусть $L = \bigoplus_{m=1}^{\infty} L_m$ — свободная градуированная супералгебра Ли над полем $\mathbb{Q}$, порожденная r элементами $P_1 \in L_{p_1}, \ldots, P_r \in L_{p_r}$. Пусть

[1]Докладчик частично поддержан грантом Президента РФ МК–3965.2012.1, фондом «Династия», фондом Саймонса, грантом РФФИ 12–01–00748–а.

$w\colon L_{m-p_1}\oplus\dots\oplus L_{m-p_r}\to L_m$ — линейное отображение, заданное формулой $w(x_1,\dots,x_r)=[P_1,x_1]+\dots+[P_r,x_r]$.

Теорема. [1] *Пусть $r>2$ и $p_1,\dots,p_r<m-2$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

- *множество изотопических классов гладких вложений $S^{m-p_1+1}\sqcup\dots\sqcup S^{m-p_r+1}\to S^{m+3}$ с незаузленными компонентами конечно*;
- *отображение $w\colon L_{m-p_1}\oplus\dots\oplus L_{m-p_r}\to L_m$ инъективно*;
- *уравнение $p_1x_1+\dots+p_rx_r=m$ не имеет решений в положительных целых числах $x_1,\dots,x_r$.*

В докладе приводится также формула для размерности ядра отображения w, что дает явную формулу для ранга *группы зацеплений*. Некоторые вычисления приведены в таблице. Одно из применений полученных результатов приводится в работе докладчика [4].

Указанные результаты получены совместно с Д. Кроули и С. Ферри [1]. Доказательства основаны на точной последовательности А. Хефлигера [2] и обобщении формулы Э. Витта, полученном В. Петроградским [3].

Таблица 1: Ранги групп изотопических классов гладких вложений $S^p\sqcup S^{p+k}\to S^{p+l+k}$ с незаузленными компонентами при $p\leqslant 5$.

p		1	2		3			4				5				
l		≥ 3	3	≥ 4	3	4	≥ 5	3	4	5	≥ 6	3	4	5	6	≥ 7
k	0	0	1	0	2	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
	2	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
	≥ 3	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0

Список литературы

[1] D. Crowley, S. Ferry, M. Skopenkov. The rational classification of links in codimension >2. Forum Math. 2012, to appear, see also arXiv: `math.AT/1106.1455`.

[2] A. Haefliger. Differentiable embeddings of S^n in S^{n+q} for $q>2$. Ann. Math., Ser. 3 **83** (1966), pp. 402–436.

[3] V. Petrogradsky. Witt's formula for restricted Lie algebras. Adv. Appl. Math., **30:1** (2003), pp. 219–227.

[4] M. Skopenkov. When the set of embeddings is finite? Submitted (2011), see also arXiv: `math.GT/1106.1878`.

Тождества, связанные с неприводимыми модулями алгебры Гейзенберга[1]

Т.В. Скорая, Ю.Ю. Фролова
Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия
skorayatv@yandex.ru, yuyufrolova@mail.ru

Характеристика основного поля K предполагается нулевой. Напомним, что алгеброй Лейбница называется линейная алгебра, удовлетворяющая тождеству

$$(xy)z \equiv (xz)y + x(yz).$$

Это тождество эквивалентно классическому тождеству Якоби, когда выполняется тождество антикоммутативности. Поэтому любая алгебра Ли является, в частности, алгеброй Лейбница.

Пусть $T = K[t]$ — кольцо многочленов, рассматриваемое как линейная алгебра с нулевым умножением. Рассмотрим алгебру Гейзенберга H с базисом a, b, c и таблицей умножения $ba = -ab = c$, все остальные произведения базисных элементов равны 0. Превратим T в H-модуль, считая, что $f \cdot c = f$, $f \cdot a = f'$, $f \cdot b = tf$, где $f \in T$. Штрих над многочленом означает взятие производной. Полупрямое произведение $T \leftthreetimes H$ является алгеброй Ли.

В работе [1] С.П. Мищенко доказал, что если W — неприводимый H-модуль бесконечной размерности, то тождества алгебр $W \leftthreetimes H$ и $T \leftthreetimes H$ совпадают.

Для случая алгебр Лейбница рассматривается аналог полупрямого произведения. Пусть L_1 — алгебра Ли, L_2 — алгебра с нулевым умножением. Если L_2 является L_1-модулем, то можно рассмотреть прямую сумму векторных пространств L_1 и L_2 с правилом умножения $(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = x_1x_2 + y_1x_2$, где $x_1, x_2 \in L_1$, $y_1, y_2 \in L_2$. Обозначим построенную алгебру $L_1 \leftthreetimes L_2$ и отметим, что она является алгеброй Лейбница. Заметим, что $xy = 0$, где $x \in L_1$, $y \in L_2$, в отличие от определения полупрямого произведения алгебр Ли.

Обозначим $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ многообразие почти полиномиального роста, порожденное алгеброй $T \leftthreetimes H$, с умножением $(f + x)(g + y) = f \cdot y + xy$, где $f, g \in T$, а $x, y \in H$.

[1]Работа частично поддержана грантом РФФИ 10–01–00209–а.

Теорема. *Пусть W — произвольный неприводимый бесконечномерный H-модуль. Тогда алгебра Лейбница $W \rightthreetimes H$ порождает многообразие $\widetilde{\boldsymbol{V}}_3$.*

Список литературы

[1] С.П. Мищенко. Рост многообразий алгебр Ли. УМН **45** (1990), №6(276), с. 25–45.

Простые редуцированные обёртывающие алгебры

С.М. Скрябин

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

Serge.Skryabin@ksu.ru

В теории представлений конечномерной p-алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$ важную роль играет семейство редуцированных обёртывающих алгебр $U_\xi(\mathfrak{g})$, параметризованных линейными функциями $\xi \in \mathfrak{g}^*$. Алгебра $U_\xi(\mathfrak{g})$ есть факторалгебра универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ по её идеалу, порождённому множеством центральных элементов $\{x^p - x^{[p]} - \xi(x)^p \cdot 1 \mid x \in \mathfrak{g}\}$. С каждой линейной функцией ξ можно связать альтернирующую билинейную форму $\beta_\xi \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ по формуле

$$\beta_\xi(x, y) = \xi\big([x, y]\big), \; x, y \in \mathfrak{g}.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется фробениусовой, если семейство $\{\beta_\xi \mid \xi \in \mathfrak{g}^*\}$ содержит невырожденную билинейную форму.

Теорема 1. *Предположим, что p-алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима и $p > 2$. Для того, чтобы алгебра $U_\xi(\mathfrak{g})$ была простой, необходимо и достаточно, чтобы билинейная форма β_ξ была невырожденной. Если β_ξ невырождена, то ξ имеет $[p]$-нильпотентную поляризацию $\mathfrak{p}$, для которой $\xi(\mathfrak{p}^{[p]}) = 0$. В этом случае единственный неприводимый $U_\xi(\mathfrak{g})$-модуль индуцирован с одномерного $U_\xi(\mathfrak{p})$-модуля.*

Теорема 2. *Предположим, что p-алгебра Ли $\mathfrak{g}$ фробениусова и все её присоединённые дифференцирования принадлежат алгебре Ли группы автоморфизмов* $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$. *В этом случае простота алгебры $U_\xi(\mathfrak{g})$ также равносильна невырожденности билинейной формы β_ξ.*

В общем случае остаётся неизвестным, совпадают ли множества линейных функций ξ, выделяемых условием простоты $U_\xi(\mathfrak{g})$ и условием невырожденности β_ξ.

Многообразия флагов

Е.Ю. Смирнов
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
evgeny.smirnov@gmail.com

Это очень предварительная и достаточно оптимистичная программа, которая, скорее всего, будет скорректирована в соответствии с предварительными знаниями, пожеланиями и энтузиазмом слушателей. Темы, помеченные звёздочками, скорее всего, останутся за кадром.

Лекция 1. Многообразия флагов. Базовый пример: полные флаги в трёхмерном пространстве. Вложения многообразия флагов в проективное пространство и неприводимые представления полной линейной группы. Представление Бореля для кольца когомологий многообразия флагов. (*) Теорема Бореля–Вейля–Ботта.

Лекция 2. Разложение Брюа для полной линейной группы. Разложение Шуберта, порядок Брюа. Циклы Шуберта в представлении Бореля, многочлены Шуберта, операторы разделенных разностей. (*) Комбинаторный подход к многочленам Шуберта: rc-графы и теорема Кириллова–Фомина.

Лекция 3. Исчисление Шуберта. Теорема о трансверсальности. Формула Шевалле–Монка для пересечения цикла Шуберта и дивизора. (*) Многогранник Гельфанда–Цетлина как модель для исчисления Шуберта.

Дельта-функция в пространстве многочленов с гауссовской метрикой

М.А. Соколова
Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, Тамбов, Россия
Sokolik-tsu@mail.ru

Пусть V_n, $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, — пространство многочленов $f(x)$ от одного переменного степени не выше n (над полем $\mathbb{C}$). Его размерность равна $n+1$. Введем в V_n скалярное произведение с гауссовской метрикой:

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,e^{-x^2} dx. \tag{1}$$

Дельта-функция $\delta = \delta(x)$ сопоставляет всякой непрерывной функции $f(x)$ её значение в нуле: $(\delta, f) = f(0)$. В пространстве V_n эта дельта-функция есть непрерывный линейный функционал. Он может быть записан как скалярное произведение с некоторым многочленом $\Phi_n(x)$ из V_n:

$$(\delta, f) = f(0) = (f, \Phi_n). \tag{2}$$

Мы хотим написать явное выражение для Φ_n, см. теорему 1, оно использует многочлены Эрмита $H_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Напомним некоторый материал об этих многочленах, см. [1]. Многочлены $H_n(x)$ получаются ортогонализацией системы $1, x, x^2, \ldots$ по скалярному произведению (1). Имеют место следующие формулы — формула Родрига:

$$H_n(x) = (-1)^n \, e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \, e^{-x^2},$$

формула Кристоффеля–Дарбу:

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{H_n(x) H_n(y)}{2^m m!} = \frac{H_{n+1}(x) H_n(y) - H_n(x) H_{n+1}(y)}{2^{n+1} n!}\,, \tag{3}$$

явная формула:

$$H_n(x) = n! \sum \frac{(-1)^k}{(n-2k)!\,k!} \,(2x)^{n-2k}\,. \tag{4}$$

Скалярный квадрат дается формулой:

$$(H_n, H_n) = \sqrt{\pi}\, 2^n \, n! \tag{5}$$

Теорема 1. *Многочлен $\Phi_n(x)$ — чётная функция от x. Для чётного n многочлен $\Phi_n(x)$ есть*

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n+1}(n/2)!} \cdot \frac{H_{n+1}(x)}{x}\,, \tag{6}$$

для нечётного n многочлен $\Phi_n(x)$ совпадает с $\Phi_{n-1}(x)$ (поскольку $\delta(x)$ обращается в нуль на нечётных функциях).

Доказательство. Достаточно рассмотреть чётное n. Разложим $\Phi_n(x)$ по многочленам Эрмита:

$$\Phi_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(\Phi_n, H_m)}{(H_m, H_m)} H_m(x).$$

В силу (2) и (5) получим

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{n} \frac{H_m(0)}{2^m m!} H_m(x). \tag{7}$$

Теперь используем (3) и получаем (6). $\square$

С другой стороны, мы можем уточнить формулу разложения (7). По (4) имеем

$$\begin{aligned} H_m(0) &= \frac{(-1)^{(m/2)}}{(m/2)!}\, m! \text{ при чётном } m, \\ H_m(0) &= 0 \ \text{ при нечётном } m, \end{aligned}$$

поэтому

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{n/2} \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!}\, H_{2m}(x).$$

Теорема 2. *Скалярный квадрат многочлена $\Phi_n(x)$ с четным n даётся формулой*:

$$(\Phi_n, \Phi_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(n+1)!}{2^{n+1} (n/2)!^2}\,. \tag{8}$$

Его асимптотика при $n \to \infty$ такова:

$$(\Phi_n, \Phi_n) \sim \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \cdot \sqrt{n}\,. \tag{9}$$

Доказательство. По (2) имеем $(\Phi_n, \Phi_n) = \Phi_n(0)$. По (6) и (4) находим выражение (8). Формула (9) получается с помощью формулы Стирлинга. $\square$

Пусть $\mathcal{F}_h$ — пространство Фока, состоящее из целых аналитических функций $f(z)$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{\pi h} \int_{\mathbb{C}} f(z)\, \overline{g(z)} \exp\left(-\frac{z\overline{z}}{h}\right) dx\, dy, \quad z = x + iy.$$

Параметр h есть «постоянная Планка». Это пространство изометрично пространству $L^2(\mathbb{R}, dq)$ с помощью преобразования Баргмана

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} T(z, q)\, \psi(q)\, dq,$$

где

$$T(z, q) = D \cdot \exp\left\{-\frac{1}{h}\left(\frac{z^2}{2} - \sqrt{2} zq + \frac{h^2}{2}\right)\right\}, \quad D = (\pi h)^{-1/4}.$$

В свою очередь, пространство $L^2(\mathbb{R}, dq)$ изометрично пространству L^2 на $\mathbb{R}$ со скалярным произведением (1).

При сквозном изоморфизме многочлену Эрмита $H_n(x)$ отвечает функция

$$\pi^{1/4}\ (2/h)^{n/2}\ z^n$$

из $\mathcal{F}_h$. Поэтому многочлену $\Phi_n(x)$ с чётным n отвечает многочлен

$$M_n(z) = \pi^{-1/4} \sum_{m=0}^{n/2} \frac{1}{m!} \left(-\frac{z^2}{2h}\right)^m$$

из $\mathcal{F}_h$. Это есть частичная сумма ряда для функции

$$h^{1/4}\, T(z,0) = \pi^{-1/4} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2h}\right).$$

Список литературы

[1] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., Наука, 1966.

О классификации представлений янгиана супералгебры Ли типа $A(1,1)$

В.А. Стукопин[1]

Донской государственный технический университет, Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, Ростов-на-Дону, Россия

stukopin@mail.ru

Теория янгианов простых алгебр Ли и их представлений является развитой теорией, разделом теории квантовых групп, основы которой были заложены В.Г. Дринфельдом (см. [1], а также монографию [2]). С 90-х годов прошлого века стала развиваться теория янгианов супералгебр Ли. Следует сказать, что описание неприводимых представлений янгианов супералгебр Ли является важной задачей для теории и имеет многочисленные приложения. К настоящему времени число таких приложений значительно выросло, в частности, прояснилась связь с квантовой теорией суперструн, а также с теорией калибровочных полей Янга–Миллса, играющих важнейшую

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» в рамках мероприятия 1.2.2 (госконтракт П1116).

роль в современной фундаментальной физике. С этой точки зрения важным является исследование представлений янгианов супералгебр Ли типа $A(n,n) = \mathfrak{sl}(n+1, n+1), n = 1,\ 2,\ 3$. Исследованию представлений янгиана супералгебры Ли $A(1,1)$ и посвящена настоящая заметка. Основной результат работы — классификация неприводимых представлений янгиана $Y(A(1,1))$ супералгебры Ли $A(1,1) = \mathfrak{sl}(2,2)$.

Напомним определение супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,2) = A(1,1)$. Это базисная супералгебра Ли, порождённая образующими $h_1, h_2, h_3, x_1^{\pm}, x_2^{\pm}, x_3^{\pm}$. Матрица Картана, задающая систему определяющих соотношений имеет следующий вид:

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что простые корни супералгебры Ли типа $A(n,n)$ не являются независимыми, именно, в случае супералгебры Ли типа $A(1,1)$: $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$. Сама же система определяющих соотношений выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
&[h_i, h_j] = 0, i = 1,2,3,\\
&[h_i, x_j^{\pm}] = \pm a_{ij} x_j^{\pm}, i,j = 1,2,\\
&[x_i^{\pm}, [x_i^{\pm}, x_j^{\pm}]] = 0,\\
&[x_i^{+}, x_j^{-}] = \delta_{ij} h_j, i = 1,2,3.
\end{aligned}$$

Отметим, что образующие $x_2^{\pm}$ — нечётные, а остальные образующие чётные, то есть $p(x_2^{\pm}) = 1, p(x_1^{\pm}) = p(x_3^{\pm}) = p(h_1) = p(h_2) = p(h_3) = 0$, где p — функция чётности. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,2)$. Напомним теперь определение янгиана $Y(\mathfrak{g}) = Y(\mathfrak{sl}(2,2))$ (см. [3], а также [4]).

Пусть $Y(\mathfrak{g})_{\hbar}$ (см. [3]) — супералгебра (над кольцом формальных степенных рядов $C[[\hbar]]$), порождённая образующими $h_{i,k}, x_{i,k}^{\pm}, i \in I = \{1,2,3\}, k \in \mathbb{Z}_+$ ($p(x_{2,k}^{\pm}) = 1, p(x_{1,k}^{\pm}) = p(x_{1,k}^{\pm}) = p(h_{1,k}) = p(h_{2,k}) = p(h_{3,k}) = 0, k \in \mathbb{Z}_+$), которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
&[h_{i,k}, h_{j,l}] = 0,\\
&\delta_{i,j} h_{i,k+l} = [x_{i,k}^{+}, x_{j,l}^{-}],\\
&[h_{i,k+1}, x_{j,l}^{\pm}] = [h_{i,k}, x_{j,l+1}^{\pm}] + (a_{ij}/2)\hbar(h_{i,k} x_{j,l}^{\pm} + x_{j,l}^{\pm} h_{i,k}),\\
&[h_{i,0}, x_{j,l}^{\pm}] = \pm a_{ij} x_{j,l}^{\pm},\\
&[x_{i,k+1}^{\pm}, x_{j,l}^{\pm}] = [x_{i,k}^{\pm}, x_{j,l+1}^{\pm}] + (a_{ij}/2)\hbar(x_{i,k}^{\pm} x_{j,l}^{\pm} + x_{j,l}^{\pm} x_{i,k}^{\pm}),\\
&[x_{i,k_1}^{\pm}, [x_{i,k_2}^{\pm}, x_{s,j}^{\pm}]] + [x_{i,k_2}^{\pm}, [x_{i,k_1}^{\pm}, x_{s,j}^{\pm}]] = 0.
\end{aligned}$$

Легко проверить, что при различных $\hbar$, не равных 0, супералгебры Хопфа $Y(\mathfrak{g})_\hbar$ изоморфны. Янгиан получается при специализации $\hbar = 1$.

Ниже используются понятия теории представлений янгианов: модуль Верма янгиана, простой модуль (неприводимое представление) (см. [2], [5]).

Следующий теорема является аналогом результата, полученного в [5], и является основным результатом работы.

Теорема. 1) *Каждый неприводимый конечномерный* $Y(\mathfrak{sl}(2,2))$*-модуль* V *является модулем со старшим весом* d: $V(d)$.
2) *Модуль* $V(\Lambda)$ *конечномерен тогда и только тогда когда существуют многочлены* P_1^d, P_3^d *а также многочлены* P_2^d, Q_2^d, *удовлетворяющие следующим условиям*:
a) *все эти многочлены со старшими коэффициентами, равными* 1;
b)

$$\frac{P_i^d(u+1)}{P_i^d(u)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{i,k} \cdot u^{-k-1}, i = 1, 3,$$
$$\frac{P_2^d(u)}{Q_2^d(u)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{2,k} \cdot u^{-k-1}.$$

Список литературы

[1] V. Drinfeld. Quantum groups. Proc. Int. Cong. Math. **1** (1988), Berkley, pp. 789–820.
[2] V. Chari, A. Pressley. A guide to quantum groups. Camb. Univ. Press, Cambridge, 1995.
[3] В.А. Стукопин. О янгианах супералгебр Ли типа $A(m,n)$. Функциональный анализ и его приложения **28** (1994), №3, с. 217–219.
[4] В.А. Стукопин. О дубле янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$. Функциональный анализ и его приложения **40** (2006), №2, с. 81–84.
[5] В.А. Стукопин. О представлениях янгиана супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(1,2)$. Владикавказ. матем. журнал **13** (2011), №3, с. 52–63.

Вычисление характеров унитреугольной группы

Е.В. Сурай
Самарский государственный университет,
Самара, Россия
suraylena@mail.ru

Пусть G — связная нильпотентная группа Ли, T_g — её неприводимое представление. Продолжим представление T_g группы G до представления T_φ её групповой алгебры $L^1(G)$. В работе [1] показано, что для любой финитной функции φ оператор T_φ имеет след и формулой $(\chi, \varphi) = \mathrm{Tr}(T_\varphi)$ определен характер $\chi(g)$ как обобщённая функция на G.

Напомним, что согласно методу орбит А.А.Кирилова существует взаимно однозначное соответствие между неприводимыми представлениями связной нильпотентной группы Ли и её коприсоединёнными орбитами. В [1] вычислены характеры неприводимых представлений, ассоциированных с коприсоединёнными орбитами максимальной размерности для группы $\mathrm{UT}(n, \mathbb{R})$, состоящей из верхнетреугольных $n \times n$ матриц с единицами по диагонали. Классификация субрегулярных коприсоединённых орбит (то есть орбит размерности на два меньше максимальной) для этой группы содержится в работе [2]. В докладе будут рассказаны результаты работы [4], в которой на основе классификации из [2] получены формулы для субрегулярных характеров. (Отметим, что в статье [3] получены формулы для субрегулярных характеров группы $\mathrm{UT}(n, \mathbb{F}_q)$.)

Формулы имеют различный вид для чётного и нечётного n. Рассмотрим случай чётного n. Пусть $n = 2(k+m+2)$. Разобьём строки и столбцы на блоки $(m, 1, 1, k, k, 1, 1, m)$. Общий элемент $g \in \mathrm{UT}(n, \mathbb{R})$ запишем в виде блочной матрицы $g = (C_{ij})$, где $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 8$.

Из [2] вытекает, что на всякой субрегулярной коприсоединённой орбите группы $\mathrm{UT}(n, \mathbb{R})$ существует единственный элемент вида

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ \Lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$, Λ_1, Λ_2 — квадратные матрицы, у которых элементы побочной диагонали отличны от нуля, а вне побочной диагонали нулевые. Пусть $C =$

(c_{ij}) — матрица размера $k \times k$, Δ_s — её нижний левый минор размера s, $P_s = \dfrac{(-1)^{k-s}\Delta_s}{\Delta_{s+1}}$, $\Lambda = \mathrm{sdiag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Положим

$$\chi^*_\Lambda(C) = \frac{e^{2\pi i(\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k)}}{\mu_0 \cdot |\Delta_2 \Delta_3 \cdots \Delta_k|},\ \mu_0 = |\lambda_1^{k-1}\lambda_2^{k-2}\cdots\lambda_k^0|.$$

Теорема. *Пусть $n = 2(k+m+2)$. Характер неприводимого представления, соответствующего орбите элемента $f \in \mathfrak{ut}(n,\mathbb{R})^*$ из (1), имеет вид*

$$\chi(g) = \delta(S) \cdot \chi^*_{\Lambda_1}(\widetilde{C}_{18}) \cdot \chi^*_{\Lambda_2}(C_{45}) \cdot \chi^*_0(g)$$

где $\delta(S)$ — произведение дельта-функций от некоторой системы рациональных функций S. Замыкание аннулятора S совпадает с замыканием множества $\mathrm{Ad}_G(G^f)$. Матрица $\widetilde{C}_{18}$ составлена из элементов блока C_{18} с помощью явных рациональных функций, и

$$\chi^*_0(g) = \frac{1}{|\gamma_1\gamma_2|^k \cdot (C_{23} \cdot \det C_{45} \cdot C_{67})^m} e^{2\pi i\left(\frac{\gamma_1}{C_{67}}Q_0 + \gamma_3 C_{67}\right)},$$

$$Q_0 = c_{23}c_{37} + c_{24}c_{47} + c_{25}c_{57} + c_{26}c_{67}.$$

Случай нечётного n рассматривается аналогично.

Список литературы

[1] А.А. Кириллов. Унитарные представления нильпотентных групп Ли. УМН **17** (1962), №4, с. 57–110.
[2] М.В. Игнатьев, А.Н. Панов. Коприсоединенные орбиты группы $\mathrm{UT}(7, K)$. Фунд. и прикл. матем. **13** (2007), №.5, с. 127–159.
[3] М.В. Игнатьев. Субрегулярные характеры унитреугольной группы над конечным полем. Фунд. и прикл. матем. **13** (2007), №.5, с. 103–126.
[4] А.Н. Панов, Е.В. Сурай. Субрегулярные характеры группы $\mathrm{UT}(n, \mathbb{R})$. Записки научных семинаров ПОМИ, сдана в печать.

Об одном способе описания кос в терминах спектральных задач первого и второго порядка

С.В. Талалов
Тольяттинский государственный университет, Тольятти, Россия
svtalalov@tltsu.ru

В докладе исследуется динамика точек возврата кривой, эволюционирующей на плоскости в соответствии с правилами теории струн. Таким образом, рассматриваемым объектом являются самопересекающиеся, вообще говоря, поверхности в псевдоевклидовом пространстве $E_{1,2}$ (мировые листы струны), имеющие нулевую среднюю кривизну. Локальная структура такой поверхности описывается в представляемом подходе с помощью системы нелинейных уравнений [1], которая обобщает известное уравнение Лиувилля. Группа симметрии данной системы (обобщающая $2D$ конформную группу $\xi_\pm \to f_\pm(\xi_\pm)$) позволяет провести факторизацию множества струнных мировых листов, что позволяет далее сосредоточиться на изучении их особенностей — мировых линий точек возврата. Оказывается, что каждому смежному классу можно сопоставить ту или иную (в зависимости от выбора представителя) спектральную задачу. Так, в определённых случаях представитель в указанных смежных классах может быть выбран так, что его мировой лист восстанавливается (с точностью до группы движений пространства $E_{1,2}$) по решениям пары спектральных задач Штурма–Лиувилля либо Дирака, коэффициенты которых определены второй квадратичной формой мирового листа. Рассматриваются «N-солитонные решения» (то есть безотражательные потенциалы в данном случае). Как показывают примеры, суммарное число точек дискретного спектра в указанных спектральных задачах соответствует числу нитей косы мировых линий точек возврата струны; деформация спектра приводит, вообще говоря, к изменению топологии косы. Результаты получены в рамках подхода, разработанного автором ранее [2], [3], [4], [5].

Список литературы

[1] А.К. Погребков, С.В. Талалов. Модель «Тирринг×Лиувилль». Теор. и мат. физика **70** (1987), №3, с. 342–350.
[2] С.В. Талалов. Об N-солитонных струнах в четырёхмерном пространстве-времени. Теор. и мат. физика **152** (2007), №3, с. 430–439.
[3] С.В. Талалов. Об описании кос в терминах спектральных задач первого порядка. Теор. и мат. физика **159** (2009), №1, с. 58–63.

[4] С.В. Талалов. Замечание о геометрическом описании релятивистской струны. Теор. и мат. физика **123** (2000), №1, с. 38–43.
[5] S.V. Talalov. Classical $D = 2 + 1$ spinning string: geometrical description and current algebras. J. Phys. A. **22** (1989), pp. 2275–2284.

Пространства модулей оснащенных представлений колчанов и классификация наборов операторов

С.Н. Федотов
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
glwrath@yandex.ru

В работе [6] М. Райнеке для колчанов без ориентированных циклов получил явную реализацию пространства модулей стабильных оснащённых представлений с данным вектором размерности в виде грассманиана подпредставлений некоторого инъективного представления. Возможны два пути обобщения этой конструкции для колчанов с ориентированными циклами. Прежде всего, можно вместо всего пространства модулей рассмотреть слои его проекции π_s на стандартный категорный фактор. Их структура была исследована для произвольных колчанов над алгебраически замкнутым полем в [1] и для некоторого специального класса колчанов над произвольным бесконечным полем в [2]. В частности, в [2] показано, что для рассматриваемых колчанов каждый из слоёв π_s изоморфен грассманиану подпредставлений некоторого представления другого колчана.

Поскольку для колчана с ориентированными циклами пространство модулей стабильных оснащённых представлений не является проективным, оно не может быть изоморфно грассманиану подпредставлений. Тем не менее, может быть доказана следующая

Теорема 1. [3, Theorem 4.3(2)] *Пространство модулей стабильных оснащённых представлений изоморфно локально замкнутому подмногообразию в произведении грассманианов.*

Центральную роль в доказательстве играют *скелеты* стабильных оснащённых представлений. Для модулей над конечномерными алгебрами аналогичное понятие было введено К. Бонгартцом и Б. Юзген-Циммерманн (см., например, [4]); в нашей ситуации скелеты можно интерпретировать как некоторые канонические базисы двойственного пространства к пространству представления.

Известно [5, Proposition 0.9], что для множества стабильных оснащённых представлений морфизм факторизации является локально тривиальным расслоением. Оказывается, что тривиализущее покрытие может быть описано достаточно естественным образом с помощью скелетов оснащённых представлений. Более точно, имеем

Теорема 2. [3, Theorem 4.3(1)] *Существует покрытие множества стабильных оснащённых представлений открытыми подмножествами $X(\mathfrak{S})$, параметризуемыми допустимыми скелетами $\mathfrak{S}$, ограничение на которые морфизма факторизации есть проекция на прямой сомножитель, изоморфный аффинному пространству.*

Доказательства обеих теорем достаточно конструктивны; используемые методы позволяют получить алгоритм, определяющий, изоморфны ли друг другу два стабильных оснащённых представления.

Наиболее простой вид эти конструкции принимают для колчана L_q, в котором одна вершина и q петель. С точки зрения линейной алгебры классификация оснащённых представлений этого колчана — это классификация наборов из q линейных операторов $a_1, \ldots, a_q$ и k линейных функций $f_1, \ldots, f_k$ на векторном пространстве (здесь k — это параметр, задающий оснащение). Условие стабильности может быть проинтерпретировано следующим образом: никакое ненулевое общее инвариантное подпространство операторов a_i не содержится в пересечении ядер f_i. Таким образом, для наборов, удовлетворяющих этому свойству, получена полная классификация; кроме того, описана структура пространства модулей.

Список литературы

[1] J. Engel, M. Reineke. Smooth models of quiver moduli. Math. Z. **262** (2009), pp. 817–848

[2] S. Fedotov. Framed moduli and Grassmannians of submodules. Trans. Amer. Math. Soc., to appear, see also arXiv: `math.AG/1010.4761`.

[3] S. Fedotov. Framed moduli spaces and tuples of operators, see arXiv: `math.AG/1203.3174`.

[4] B. Huisgen-Zimmermann. Classifying representations by way of Grassmannians. Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), pp. 2687–2719.

[5] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan. Geometric Invariant Theory. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2). Springer, Berlin, 1994.

[6] M. Reineke. Framed quiver moduli, cohomology, and quantum groups. J. Algebra **320** (2008), no. 1, pp. 94–115.

Содержание

Для заметок

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка в пакете LaTeX, макет М.В. Игнатьев

Подписано в печать 26.05.2009.
Гарнитура Times New Roman. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Печать оперативная. Усл.-печ.л. 4,25. Уч.-изд. л. 3,52.
Тираж 100 экз. Заказ № 891.
Издательство «Универс групп», 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Отпечатано в ООО «Универс групп»