Конечномерные полупростые алгебры Хопфа[1]

Артамонов В.А., г. Москва

artamon@mech.math.msu.su

В последние годы в [1] получено при некоторых ограничениях описание точечных конечномерных алгебр Хопфа. Другим важным классом, требующим описания, является алгебр Хопфа является класс конечномерных полупростых алгебр Хопфа H над алгебраически замкнутым полем k, характеристика которого не делит размерность алгебры.

Мы будет рассматривать случай, когда неизоморфные неприводимые H-модули размерности >1 имеют разные размерности.

В теории конечных групп известен результат Г. Сейтца [2], описавшего конечные группы G, имеющие только одно неприводимое комплексное представление размерности >1. Такие группы G либо экстраспециальные 2-группы порядка $2^{2m+1,}$ $n = 2^m$, либо $|G| = n(n+1)$, где $n+1 = p^f$, и p — простое число.

Напомним основные определения Ассоциативная алгебра H над полем k называется алгеброй Хопфа, если в ней задан гомоморфизма алгебр, $\Delta : H \to H^{\otimes 2}$, называемый of *коумножением*, гомоморфизм алгебр $\varepsilon : H \to k$, называемый *коединицей* и антиалгебраический гомоморфизм $S : H \to H$, называемый *антиподом*, причем коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & H^{\otimes 2} \arrow[d, "1\otimes\Delta"] \\
H^{\otimes 2} \arrow[r, "\Delta\otimes 1"'] & H^{\otimes 3}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "1"] & H^{\otimes 2} \arrow[d, "1\otimes\varepsilon"] \\
H^{\otimes 2} \arrow[r, "\varepsilon\otimes 1"'] & H
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[drr, "\varepsilon"] & H^{\otimes 2} \arrow[r, "1\otimes S"] & H^{\otimes 2} \arrow[d, "\mu"] \\
H^{\otimes 2} \arrow[r, "S\otimes 1"'] & H^{\otimes 2} \arrow[r, "\mu"'] & k
\end{tikzcd}$$

где $\mu : H^{\otimes 2} \to H$ отображение умножения.

Если H конечномерно, то дуальное пространство H^* также является алгеброй Хопфа с *конволютивным* умножением $l_1 * l_2$, коумножением Δ^*, коединицей ε^* и антиподом S^*, которые вводятся по правилу:

$$l_1 * l_2 = \mu \cdot (l_1 \otimes l_2) \cdot \Delta, \quad \Delta(l)(x \otimes y) = l(xy),$$
$$(S^* l)(x) = l(S(x)), \quad \varepsilon^*(l) = l(1)$$

для всех $x, y \in H$.

Элемент $g \in H$ *групповой*, если $\Delta(g) = g \otimes g$ и $\varepsilon(g) = 1$. Множество $G(H)$ всех групповых элементов образует мультипликативную подгруппу в группе обратимых элементов в H.

[1]Работа частично поддержана РФФИ грант 09-01-00058

Элементы из $G(H^*)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с гомоморфизмами алгебр $H \to k$. Поэтому H как полупростая k-алгебра имеет полупрямое разложение

$$\begin{gathered} H = (\oplus_{g\in G} k e_g) \oplus \mathrm{Mat}(d_1, k) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Mat}(d_m, k), \\ 1 < d_1 < \cdots < d_m, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\{e_g \mid g \in G\}$ — система центральных ортогональных идемпотентов в H.

Обозначим через E_g, $g \in G$, одномерный H-модуль, для которого $hx = h(g)x$ при любых $h \in H$. Число одномерных неизоморфных H-модулей E_g, $g \in G$, равно порядку группы G. Пусть $M_1, \dots, M_m$ — полное множество неизоморфных неприводимых H-модулей размерностей $d_1, \dots, d_m$.

Предложение 1 (Н. Андрушкиевич, В.А. Артамонов). *Если $g \in G$ и $i = 1, \dots, m$, то имеются изоморфизмы H-модулей $E_g \otimes M_i \simeq M_i \otimes E_g \simeq M_i$. Если $1 \leqslant i, j \leqslant m$, то имеются изоморфизмы H-модулей*

$$\begin{gathered} M_i \otimes M_j = \delta_{ij} \left(\oplus_{g\in G} E_g\right) \oplus \left(\oplus_{t=1}^m m_{ij}^t M_t\right), \\ m_{ij}^t = \dim_k \mathrm{Hom}_H(M_i \otimes M_j, M_t) \geqslant 0. \end{gathered}$$

Поэтому $d_i d_j = \delta_{ij}|G| + \sum_t m_{ij}^t d_t$ и $|G| \leqslant d_1^2$.

Следствие 1. *Если $m = 1$, то порядок G делится на d_1. Порядок $|G|$ делит d_1^2, причем $|G| = d_1^2$ тогда и только тогда, когда $M_1 \otimes M_1 \simeq \oplus_{g\in G} E_g$.*

Введем левое и правое действия $H^* \rightharpoonup H$, $H \leftharpoonup H^*$ по правилу: если $f \in H^*$ и $x \in H$, где

$$\Delta(x) = \sum_x x_{(1)} \otimes x_{(2)} \in H \otimes H,$$

то

$$f \rightharpoonup x = \sum_x x_{(1)} \langle f, x_{(2)} \rangle, \quad x \leftharpoonup f = \sum_x \langle f, x_{(1)} \rangle (x_{(2)}).$$

Если $g \in G(H^*)$, то $g \rightharpoonup x$, $x \leftharpoonup g$ являются автоморфизмами алгебры H.

Теорема 1 (Н. Андрушкиевич, В.А. Артамонов). *Пусть $g \in G$ и $x \in \mathrm{Mat}(d_r, k)$. Тогда существует (косо-)симметричная матрица $U_r \in \mathrm{GL}(d_r, k)$ и система ортогональных идемпотентов $\Delta_{g,i} \in \mathrm{Mat}(d_i, k)^{\otimes 2}$, $g \in G$, $1 \leqslant i \leqslant m$, такие что*

$$\begin{aligned} \Delta(e_g) &= \sum_{f\in G} e_f \otimes e_{f^{-1}g} + \sum_{i=1,\dots,m} \Delta_{g,i}, \\ \Delta(x) &= \sum_{g\in G} \left[(g \rightharpoonup x) \otimes e_g + e_g \otimes (x \leftharpoonup g)\right] + \sum_{i,j=1}^m \Delta_{ij}^r(x), \\ S(e_g) &= e_{g^{-1}},\ \varepsilon(e_g) = \delta_{1,g}, \quad S(x) = \frac{1}{d_r} U_r\, {}^t x U_r^{-1}, \quad \varepsilon(x) = 0, \end{aligned}$$

где $\Delta_{ij}^r(x) \in \mathrm{Mat}(d_i, k) \otimes \mathrm{Mat}(d_j, k)$. При этом

$$\Delta_{g,i} = \frac{1}{d_i} \sum_{r,s=1}^{d_i} E_{rs} \otimes \left(g^{-1} \rightharpoonup S\left(E_{sr}\right)\right) = \frac{1}{d_i} \sum_{r,s=1}^{d_i} \left(E_{rs} \leftharpoonup g^{-1}\right) \otimes S\left(E_{sr}\right).$$

Без ограничения общности можно считать, что каждая матрица U_r либо единичная, либо имеет блочно-диагональный вид, где по главной диагонали стоят двумерные клетки

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Алгебры Хопфа с $m = 1$ в разложении (1) были изучены рядом авторов.

Случай, когда порядок G имеет максимально возможное значение d_1^2 был рассмотрен в [3, Следствие 3.3]. Показано, что группа G абелева и дана классификация моноидальной категории представлений в терминах бихарактеров группы G.

При этом если $d_1 = 2$, то имеется с точностью до эквивалентности четыре класса алгебр Хопфа H. Именно, групповые алгебры абелевых групп D_4 порядка 8, группы диэдра порядка 8, группы кватернионов Q_8 порядка 8, и алгебра Г. Каца порождаемая элементами x, y, z с определяющими соотношениями, коумножением, коединицей и антиподом:

$$\begin{aligned} x^2 = y^2 = 1, \quad xy = yx, \quad zx = yz, zy = xz, \\ z^2 = \frac{1}{2}(1 + x + y - xy), \quad \varepsilon(z) = 1, \quad S(z) = z^{-1}, \\ \Delta(z) = \frac{1}{2}\left((1 + y) \otimes 1 + (1 - y) \otimes x\right)(z \otimes z), \end{aligned}$$

при этом элементы x, y — групповые.

В работе [4] дано явное описание H, если порядок G равен d_1^2 и либо d_1 нечетно, либо G — элементарная абелева 2-группа.

Теорема 2 [5, 6]. *Предположим, что H из (1), $m = 1$ и порядок группы $G = G(H^*)$ равен d_1^2 . Тогда $\Delta_{11}^1 = 0$ в теореме 1 и проективное представление $\Psi(g) = A_g \in \mathrm{GL}(d_1, k)$ размерности d_1 группы G является неприводимым и точным, причем*

$$\begin{aligned} g \rightharpoonup x = A_g x A_{g^{-1}}, \quad x \leftharpoonup g = U\,{}^t\!A_g U^{-1} x\, U^t A_{g^{-1}} U^{-1}, \\ \left[A_g,\, U\,{}^t\!A_h^{-1} U^{-1}\right] = \mu_{g,h} E, \quad \mu_{g,h} \in k^*, \end{aligned}$$

для всех $g \in G$. В частности, $G = A \times A$ для некоторой абелевой группы A порядка d_1. Обратно, если H имеет полупростое разложение (1) при $m = 1$ и коумножением, коединицей, антиподом из теоремы 1, где $\Delta_{11}^1 = 0$, и $G = A \times A$, как и выше, то H является алгеброй Хопфа.

Следствие 2 [5]. *Если H из теоремы 2, то дуальная алгебра H^* является $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгеброй*

$$H^* = H_0^* \oplus H_1^*, \quad H_0^* = kG,\ H_1^* = \mathrm{Mat}(d_1, k).$$

Теорема 3 [5]. *Если $m = 1$, $d_1 > 2$ и H из теоремы 2. Тогда H^* не изоморфно любой алгебра Хопфа из той же теоремы.*

Неприводимые проективные представления Ψ, используемые для построения алгебры Хопфа в теореме 2, обладают свойством

$$[\Psi(g), U\,{}^t\Psi(h)U^{-1}] = 1. \tag{2}$$

Теорема 4 [6]. *Пусть G — прямое произведение двух циклических групп порядка d_1. Тогда существует неприводимое проективное представление группы G размерности d_1 с условием* (2). *С помощью этого представления строится алгебра Хопфа H, $U_1 = E$ или U_1 — кососимметрическая матрица, у которой по побочной диагонали чередуются 1, -1. Если $d_1 = p$ — простое число, то группа G всего имеет указанное прямое разложение, и этом случае получается полное описание алгебр Хопфа.*

Дано описание действия алгебр Хопфа H из теоремы 2 на квантовых многочленах.

Список литературы

[1] N. Andruskiewitch, H.-J. Schneider. "On the classification of finite dimensional pointed Hopf algebras", math.QA/0502157.

[2] G.M. Seitz. Finite groups having only one irreducible representation of degree greater than one. Proc. Amer. Math. Soc., v. **19**, 1968, p. 459—461.

[3] D. Tambara, S. Yamagami, Tensor categories with fusion rules of self-duality for finite abelian groups, J. Algebra, v. **209**, 1998, p. 692–707.

[4] D. Tambara. Representations of tensor categories with fusion rules of self-duality for finite abelian groups. Israel J. Math., v. **118**, 2000, p. 29–60.

[5] V.A. Artamonov, I.A. Chubarov. Dual algebras of some semisimple finite dimensional Hopf algebras, Modules and comodules, Trends in Mathematics, Birkhauser Verlag Basel/Switzerland, 2008, p. 65–85.

[6] V.A. Artamonov, I.A. Chubarov, Properties of some semisimple Hopf algebras, Contemp. Math., Proceedings of the Conference on Algebras, Representations and Applications Edited by: V. Futorny, V. Kac, I. Kashuba and E. Zelmanov.